Klausur Differential- und Integralrechnung 1

(8. Februar 2003, *Vorlesung* : Prof. Dr. H.-J. Schmeißer)

- *Alle angegebenen Lösungswege müssen durchschaubar sein, fehlende Begründungen mindern die Bewertung.*
- *Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.*
- *Jedes Lösungsblatt ist leserlich (!) mit Namen und Vornamen (bzw. Matrikelnummer) zu versehen.*

	Aufgaben	**Punkte**
1	Für welche reellen Zahlen x gilt $\left\lvert\dfrac{x-2}{2x+3}\right\rvert > 1$?	**3**
2	Ermitteln Sie, für welche natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $2^n > n+2$ gilt, und weisen Sie dies mittels vollständiger Induktion nach.	**3**
3	**(a)** Ermitteln Sie die Menge aller $z \in \mathbb{C}$, für die $\Re\mathrm{e}\left(\dfrac{z}{z+1}\right) < 0$ gilt, und stellen Sie diese in der *Gaußschen Zahlenebene* dar.	**3**
	(b) Berechnen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^4 - 2z^2 + 2 = 0$.	**4**
4	Untersuchen Sie die Zahlenfolgen $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ auf Konvergenz, und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.	**5**
	(a) $x_n = (-1)^n + \dfrac{n+3}{5+2n^2}$	(1)
	(b) $x_n = \sqrt[n]{2^n + n\,5^n}$	(2)
	(c) $x_n = n\left(\sqrt{n^2+3} - n\right)$	(2)
5	Berechnen Sie die Summe der Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4+(-1)^n}{3^{n+1}}$.	**2**

BITTE WENDEN !

	Aufgaben	Punkte
6	Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz, in **(c)** auch auf absolute Konvergenz.	6
	(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ **(b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \, n!}{n^n}$ **(c)** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^2+1}$	(1 + 2 +3)
7	**(a)** Geben Sie die Definition dafür an, daß eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig im Punkt $x_0 \in D(f)$ ist.	2
	(b) Untersuchen Sie damit die Funktion $f(x) = \begin{cases} x \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$ auf Stetigkeit in $x_0 = 0$.	2
8	Geben Sie zwei auf ganz $\mathbb{R}$ definierte unbeschränkte stetige Funktionen an, von denen die erste gleichmäßig stetig sein soll, die zweite jedoch nicht. (*Begründung !*)	4
9	Berechnen Sie den punktweisen Grenzwert der Funktionenfolge $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, gegeben durch $f_n(x) = \frac{2+x^n}{1+x^n}$, $x \in [0,2]$, auf dem Intervall $[0,2]$.	2
	Ist die Konvergenz gleichmäßig (*Begründung*) ?	1
10	Sei $f(x) = \sqrt{x}$, $D(f) = (0, \infty)$. Bestimmen Sie mit Hilfe der Definition $f'(x_0)$ für beliebige $x_0 \in D(f)$.	3
11	Berechnen Sie jeweils die erste Ableitung $f'(x)$ der folgenden Funktionen f mit $D(f) = (0, \infty)$.	6
	(a) $f(x) = e^{\sin(\ln x)}$	(2)
	(b) $f(x) = x^x + x^2 + 2^x$	(2)
	(c) $f(x) = \frac{\cos^2 x - \sqrt{x}}{x \, e^x}$	(2)
	Für den Übungsschein benötigen Sie mindestens 20 Punkte.	**Σ : 46**