Micro Bettern

Wintersemester 2008/09

Modulprüfung Analysis 1

(Bachelor Mathematik, Wirtschaftsmathematik)

24. 02. 2009

Bearbeitungszeit:	150 Minuten
Erlaubte Hilfsmittel:	Schreib- und Zeichenmaterial
Hinweis:	Alle angegebenen Lösungen sind zu begründen! Fehlende Begründungen mindern die Bewertung.

Teil A: (Bitte für jede Aufgabe ein separates Blatt verwenden)

Aufgabe 1, 3+3+4=10 Punkte:

a) Man bestimme Real- und Imaginärteil von $z = (\sqrt{2} - i\sqrt{2})^{24}$.

b) Man bestimme alle $z \in \mathbb{C}$ in der Form $z = x + iy$ mit $z^3 - 8i = 0$.

c) Für welche $z \in \mathbb{C}$ gilt $\left|\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}}\right| = 1$? (Skizze!)

Aufgabe 2, 2+3=5 Punkte:

Die Folge $(a_k)_k$ sei gegeben durch

$$a_1 = 1\,, \quad a_{k+1} = \sqrt{20 + a_k}\,, \quad k \in \mathbb{N}\,.$$

a) Ist die Folge monoton?

b) Ist die Folge konvergent? Wenn ja, berechne man den Grenzwert.

Aufgabe 3, 3+3+2=8 Punkte:

a) Man berechne $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + n7^n}$.

b) Ist die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 + k - 1}$ konvergent bzw. absolut konvergent?

c) Ist die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k$ konvergent?

Aufgabe 4, 3+3+3=9 Punkte:

a) Es sei $f(x) := (x-2)^{\sqrt{x-3}}$, $x > 3$. Man gebe die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(4,2)$ an.

b) Man berechne $\lim\limits_{x\to 0} \left(\sqrt{\cos ax} - \sqrt{\cos bx}\right) \cdot \frac{1}{x^2}$.

c) Man berechne $\lim\limits_{x\to 0+} (\ln x) \cdot (\ln(1-x))$.

Aufgabe 5, 4+4=8 Punkte:

a) Man berechne die lokalen Extrema der Funktion $f(x) = \arctan x - \ln\sqrt{1+x^2}$.

b) Man untersuche die Funktion $f(x) = x^2 \ln x$ auf Konvexität, Konkavität und Wendepunkte.

Aufgabe 6, 3+4+3=10 Punkte:

a) Man berechne $\int \tan^2 x \, dx$.

b) Man berechne $\int \sqrt{x} e^{\sqrt{x}} \, dx$.

c) Man berechne $\int\limits_1^4 \frac{|x-2|}{x^2} \, dx$.

Teil B: (Bitte für jede Aufgabe ein separates Blatt verwenden)

Aufgabe 7, 2+2+4=8 Punkte:

a) Wie ist $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = a \in \mathbb{R}$ definiert?

b) Wie lautet das Leibniz'sche Konvergenzkriterium für unendliche Reihen?

c) Es sei $a_k \geq 0$ $k \in \mathbb{N}$, und es sei $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent? Man zeige, dass dann $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k} \cdot \sqrt{a_{k+1}}$ konvergent ist. (Hinweis: Es gilt $2ab \leq a^2 + b^2$.)
Man zeige ferner, dass für monoton fallende Folgen $(a_k)_k$ auch die Umkehrung gilt.

Aufgabe 8, 3+5=8 Punkte:

a) Es sei $f(x) := \begin{cases} x^2\,, & x \text{ rational} \\ \frac{1}{2} - x^2\,, & x \text{ irrational} \end{cases}$. In welchen Punkten ist f stetig?

b) Wann heißt eine Funktion $f:\ (0,1) \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig? Man gebe ein Beispiel einer Funktion an, die auf dem Intervall $(0,1)$ stetig, jedoch nicht gleichmäßig stetig ist (mit Begründung!).

Aufgabe 9, 3+6=9 Punkte:

a) Man zeige, dass jede differenzierbare Funkton auch stetig ist.

b) Es sei $f:\ [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und nicht konstant. Man zeige, dass dann das Bild $f([a,b])$ ebenfalls ein abgeschlossenes Intervall ist.

Klausurpunkte insgesamt: 75
Zu erreichende Mindestpunktzahl: 25