Wintersemester 2008/09

Modulprüfung Analysis 1 (2. Wiederholung)

(Bachelor Mathematik, Wirtschaftsmathematik)

07. 08. 2009

Bearbeitungszeit: 150 Minuten
Erlaubte Hilfsmittel: Schreib- und Zeichenmaterial
Hinweis: Alle angegebenen Lösungen sind zu begründen! Fehlende Begründungen mindern die Bewertung.

Teil A: (Bitte für jede Aufgabe ein separates Blatt verwenden)

Aufgabe 1, 3+4=7 Punkte:

a) Durch indirekten Beweis zeige man, dass für reelle Zahlen a, b mit $0 < a < b$ die Ungleichung $\sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{b-a}$ gilt.

b) Für welche reellen Zahlen x gilt die Ungleichung $|x-3||x+3| \le 16$?

Aufgabe 2, 3+3=6 Punkte:

a) Man bestimme Real- und Imaginärteil von $z = \dfrac{2-i}{3i-(i-1)^8}$.

b) Für welche $z \in \mathbb{C}$ gilt $|z+1| \le 2|z-1|$? (Skizze!)

Aufgabe 3, 3+3=6 Punkte:

Man berechne die Grenzwerte

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1})}{(1-1/n)^n}$ und b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

Aufgabe 4, 3+3=6 Punkte:

Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-k}$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+\cos k\pi}$.

Aufgabe 5, 3+3=6 Punkte:

Man berechne die Grenzwerte

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x \ln \frac{x-1}{x+1}$ und b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right]$.

Aufgabe 6, 3+3+3+2=11 Punkte:

Es sei $f(x) := x^2 e^{1/x}$, $x \ne 0$.

a) Man untersuche das Verhalten von f bei $-\infty$, bei 0 und bei $+\infty$.

b) Man berechne die lokalen Extrema und charakterisiere das Monotonieverhalten.

c) Man untersuche die Funktion auf Konvexität, Konkavität und Wendepunkte.

d) Was kann man über Supremum und Infimum von f aussagen?

Aufgabe 7, 3+5=8 Punkte:

Man berechne:

a) $\displaystyle\int x^2 \sin x^3 \, dx$. und b) $\displaystyle\int_0^{\pi} |x \sin 2x| \, dx$.

Teil B: (Bitte für jede Aufgabe ein separates Blatt verwenden)

Aufgabe 8, 2+3=5 Punkte:

a) Wann heißt die unendliche Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $a_k \in \mathbb{R}$, konvergent?

b) Es sei $|x| < 1$. Man zeige, dass dann $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ gilt.

Aufgabe 9, 2+3+3=8 Punkte:

a) Wann heißt eine Funktion $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in (a,b)$?

b) In welchen Punkten ist die Funktion f, gegeben durch $f(x) := \begin{cases} x \, , & x \text{ rational} \\ 1-x \, , & x \text{ irrational} \end{cases}$, stetig?

c) Ist die Funktion f aus b) auf dem Intervall $[0,1]$ Riemann-integrierbar?

Aufgabe 10, 4+3=7 Punkte:

a) Es sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar, und die Ableitung f' sei beschränkt. Man zeige, dass dann f auf (a,b) gleichmäßig stetig ist.

b) Man berechne die Ableitung der Funktion $F(x) = \displaystyle\int_0^{\sqrt{\sin x}} e^{-t^2} \, dt$ auf dem Intervall $(0,\pi)$.

Klausurpunkte insgesamt: 70
Zu erreichende Mindestpunktzahl: 22