Wintersemester 2011/2012

Klausur zur Vorlesung
Analysis 1 (Bachelor-Physik)

20. 02. 2012

Bearbeitungszeit:	150 Minuten
Erlaubte Hilfsmittel:	Schreib- und Zeichenmaterial
Hinweis:	Alle angegebenen Lösungen sind zu begründen! Fehlende Begründungen mindern die Bewertung.

Teil A (45 Punkte): (Bitte für jede Aufgabe ein separates Blatt verwenden)

Aufgabe 1, 3 Punkte: Mit Hilfe vollständiger Induktion zeige man, dass

$$|\sin(\sum_{k=1}^{n} x_k)| \le \sum_{k=1}^{n} \sin x_k$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und x_k, $0 \le x_k \le \pi$ gilt. Hinweis: Es ist $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$.

√ **Aufgabe 2, 3+3+2=8 Punkte:**

a) Für welche $z \in \mathbb{C}$ gilt $\mathrm{Re}\frac{1}{z} < \frac{1}{2}$? (Skizze!)

b) Man bestimme alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z^9 + z^6 = 0$. (Skizze!)

c) Man bestimme Real- und Imaginärteil von $z = (\frac{1+i}{\sqrt{2}})^{29}$.

Aufgabe 3, 3+4=7 Punkte:

√ a) Ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\left[\frac{1}{3^k} + \frac{1}{(k-1)!}\right]$ absolut konvergent bzw. konvergent? Gegebenenfalls berechne man die Summe der Reihe.

√ b) Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k} z^k$?

Hinweis: Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt die Ungleichung $k! > (k/e)^k$.

Aufgabe 4, 2+2=4 Punkte:

Es sei $f(x) = x + \ln x$, $x > 0$.

a) Man zeige, dass $f : (0,\infty) \mapsto \mathbb{R}$ bijektiv ist.

b) Man berechne $(f^{-1})'(1)$.

√ **Aufgabe 5, 4+2=6 Punkte:**

Man berechne die Grenzwerte

$$\text{a)} \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2} \quad \text{und} \quad \text{b)} \quad \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2}{n}}\right) .$$

Aufgabe 6, 6 Punkte:

Man bestimme die lokalen und globalen Extrema sowie die Wendepunkte der Funktion f, gegeben durch

$$f(x) = \ln(2 + 2x + x^2) - 2\arctan(1 + x) \ .$$

Aufgabe 7, 5+6=11 Punkte:

a) Man berechne das Integral $\displaystyle\int_1^3 \arctan\sqrt{x}\,dx$.

Hinweis: Es ist $\tan\pi/3 = \sqrt{3}$.

b) Für welche reellen Zahlen x ist $f(x) = \dfrac{9x}{x^3 - 3x + 2}$ ~~dx~~ definiert?
Man bestimme alle Stammfunktionen von f .

Teil B (20 Punkte):

Aufgabe 8, 2+3+2=7 Punkte:

a) Wann heißt eine Funktion $f:\ \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in \mathbb{R}$? ($\varepsilon - \delta$ - Definition)
b) In welchen Punkten ist die Funtion f, gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \sin x\,, & x \text{ rational} \\ 0\,, & x \text{ irrational} \end{cases}$$

stetig?
c) Was besagt der Zwischenwertsatz?

Aufgabe 9, 2+2+2=6 Punkte:

a) Wann heißt eine Funktion $f:\ \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in \mathbb{R}$?.

b) Was besagt der Mittelwertsatz der Differentialrechnung?

c) Man zeige, dass für alle $x,\ y \in \mathbb{R}$ die Ungleichung

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$$

gilt.

Aufgabe 10, 1+3+3=7 Punkte:

a) Was versteht man unter einer Stammfunktion von $f:\ (a,\ b) \mapsto \mathbb{R}$?

b) Man gebe alle Funktionen $f:\ (-\pi,\ \pi) \mapsto \mathbb{R}$ an, so dass

$$f'(x) = |\sin x| \quad \text{auf} \quad (-\pi,\ \pi) \quad \text{und} \quad f(0) = 0$$

gilt.

c) Man zeige, dass für alle $x \in [-1,\ 1]$ die Gleichung $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$ gilt.

Klausurpunkte insgesamt: 65

Zu erreichende Mindestpunktzahl: 24