Prof. Dr. Carl 1/2

# Klausur zur Analysis I WS 98/99

Termin: Samstag, 23.01.99, 9:00 - 11:30 Uhr, im Abbeanum

Hilfsmittel: k e i n e

Hinweis: Jedes Lösungsblatt ist mit Namen, Vornamen, Fachrichtung und Matrikelnummer zu versehen. Eine Lösung wird nur gewertet, wenn der Lösungsweg nachvollziehbar ist.

Mit **17 Punkten** ist die Klausur bestanden.

**1.** (3) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ .

**2.** (3) Bestimmen Sie alle Zahlen aus $\mathbb{R}\setminus\{1,-1\}$, die der Ungleichung

$$\frac{1}{x-1} < \frac{1}{x^2-1}$$

genügen.

**3.** (4) Bestimmen Sie die Grenzwerte der Folgen

a) $a_n = \frac{2^{n+1}+3^{n-1}}{2^n+3^n}$

b) $a_n = \frac{1^3+2^3+\ldots+n^3}{n^4}$ .

**4.** (4) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x+\cos x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ .

b. w.

**5.** (6) Bestimmen Sie das Konvergenzverhalten der unendlichen Reihen

a) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3^n - 2^n}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{10}}$

c) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n}$ .

**6.** (2) Berechnen Sie die Ableitung $f'(x)$ der Funktion

$$f(x) = (\cos x)^{\sin x}, \quad |x| < \frac{\pi}{2} .$$

**7.** (3) Für welche reellen Zahlen $a$ ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \sin^2 x |\sin \frac{1}{x}| & \text{für} \quad x > 0 \\ (|a| - a)x & \text{für} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

an der Stelle $x = 0$ differenzierbar?
Berechnen Sie $f'(0)$ für solche $a$.

**8.** (4) Berechnen Sie Supremum und Infimum der Menge

$$\left\{ \frac{\log x}{x} \ : \ 1 \leq x \leq 10 \right\} .$$

**9.** (2) Beweisen Sie die Ungleichung

$$\arctan x > \frac{x}{1 + x^2} \quad \text{für} \quad x > 0 .$$

**10.** (3) Es sei $E$ eine Menge, ausgestattet mit der diskreten Metrik

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x = y \\ 1 & \text{für} \quad x \neq y \end{cases}$$

und $F$ ein beliebiger (anderer) metrischer Raum (Metrik $\rho$).
Zeigen Sie, dass jede Abbildung von $E$ nach $F$ stetig ist.