Prof. Trübl
WiSe 99/00

Klausur Analysis 1

(zu schreiben am 22. Januar von 9.00 bis 11.30 Uhr)

Alle angegebenen Lösungswege müssen durchschaubar sein, fehlende Begründungen mindern die Bewertung.

	Aufgaben	Punkte
1	Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die $$\lvert x-2\rvert + \lvert x+1\rvert < 5$$ gilt.	3
2	Ermitteln Sie eine Summenformel für $$\sum_{k=1}^{n} k\,, \quad n \in \mathbb{N},$$ und weisen Sie diese dann mittels vollständiger Induktion nach.	3
3	Geben Sie die Menge aller komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C},\ z \neq -1$, an, für die $$\Re\mathrm{e}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) \leq 0$$ gilt, und stellen Sie diese in der *Gaußschen Zahlenebene* dar.	3
4	Untersuchen Sie die angegebenen Zahlenfolgen $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ auf Konvergenz, und berechnen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert für $n \longrightarrow \infty$.	6
	(a) $x_n = (-1)^n\, n\left(\dfrac{n+1}{n-1} - \dfrac{n-1}{n+1}\right)$	(2)
	(b) $x_n = \sqrt[n]{1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}}$	(2)
	(c) $x_n = \sqrt{(n-1)(n+4)} - n$	(2)
5	Berechnen Sie die Summe der Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{3^n}$.	2

BITTE WENDEN !

	Aufgaben	Punkte
6	Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf (absolute) Konvergenz / Divergenz.	7
	(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$	(3)
	(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^2+1}$	(4)
7	Beweisen Sie, dass die Funktion $$f(x) = \sqrt{x}$$ auf $[1, \infty)$ gleichmäßig stetig ist.	3
8	Zeigen Sie, dass die Funktion $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2\,x\,y}{x^2+y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$ an der Stelle $(x_0, y_0) = (0,0)$ nicht stetig ist.	2
9	Untersuchen Sie, ob die durch $$f_n(x) = \frac{x^n - n}{x^n + n}, \quad 0 \leq x \leq 2,$$ definierte Funktionenfolge $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ im Raum $C[0,2]$ eine *Cauchy-Folge* ist.	4
10	Untersuchen Sie die Funktion $$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} \, , & x \neq 0 \\ 0 & , \; x = 0 \end{cases}$$ auf Differenzierbarkeit, und bestimmen Sie gegebenenfalls ihre Ableitung.	2
11	Berechnen Sie die folgenden beiden Grenzwerte.	5
	(a) $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$ **(b)** $\lim_{x \downarrow 0} x^{2x}$	(2+3)
	Für den Übungsschein benötigen Sie mindestens 16 Punkte.	**Σ : 40**