Prof. Dr. H-J. Schmeisser/Dr. H. Kempka

Klausur Analysis 2 für Physiker

20. 07. 2010

Hinweise:

- Es sind **keine** Hilfsmittel erlaubt.
- Jedes Blatt ist mit Name, Vorname und Matrikelnummer zu versehen.
- Für jede Aufgabe ist ein neues Blatt anzufangen.
- Schreiben Sie **nicht** mit Bleistift.
- Die Lösung wird nur bewertet, wenn der Lösungsweg nachzuvollziehen ist.

Aufgabe 1: (2 + 1 + 2 + 2 = 7 Punkte)
Gegeben seien $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$.

(a) Durch welchen Grenzwert ist die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial \nu}(x^0)$ für $\nu \in \mathbb{R}^n$, $\|\nu\| = 1$, definiert?
(b) Was ist der Gradient von f?
(c) Wann heißt die Funktion f im Punkt x^0 total differenzierbar?
(d) Beweisen Sie für zwei partiell differenzierbare Funktionen $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Produktregel

$$\operatorname{grad}(fg)(x) = g(x) \operatorname{grad} f(x) + f(x) \operatorname{grad} g(x) \ .$$

Aufgabe 2: (3 + 3 = 6 Punkte)

(a) Durch welche Abbildung werden Kugelkoordinaten im $\mathbb{R}^3$ definiert? Geben Sie eine Charakterisierung der einzelnen Kordinaten an!
(b) Beschreiben Sie den Punkt $(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\,, \frac{3}{2}\,, -1) \in \mathbb{R}^3$ in Kugelkoordinaten.

Aufgabe 3: (2 + 1 + 3 = 6 Punkte)

(a) Was versteht man unter einem konservativen Vektorfeld im $\mathbb{R}^3$?
(b) Wann heißt ein Vektorfeld im $\mathbb{R}^3$ wirbelfrei?
(c) Zeigen Sie dass ein konservatives C^2-Vektorfeld wirbelfrei ist?

Aufgabe 4: (4 Punkte)
Es sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ für $(x, y) \neq (0, 0)$ gegeben durch

$$f(x, y) = \frac{e^{x^2+y^2} - 1}{x^2 + y^2} \ .$$

Bestimen Sie den Wert $f(0, 0) = c$ so, dass f auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig ist.

Aufgabe 5: (2 + 2 + 2 = 6 Punkte)
Gegeben seien die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = 2x^2 + 2xy + y^3 - x + 1$ und der Punkt $P = (0, 1)$.

(a) Bestimmen Sie die Tangentialebene zur Fläche $z = f(x, y)$ im Punkt P.
(b) Bestimmen Sie die Richtungsableitung von f in Richtung $\vec{a} = (1, 1)$ im Punkt P.
(c) Bestimmen Sie $\Delta f(x, y)$.

AUFGABE 6: (6 + 4 = 10 Punkte)

(a) Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g(x,y) = x^2 - 2y^2 + y^4$. Bestimmen Sie alle Extremstellen der Funktion g.

(b) Gegeben sei die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x + 2y + 3 \text{ und } D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{2} + y^2 = 3\} \ .$$

Finden Sie die globalen Extrema der Funktion auf D.

AUFGABE 7: (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass

$$F(x,y) = x^3 + y^3 - 2xy = 0$$

in der Nähe von $(1,1)$ eine stetig differenzierbare Lösung $y = \varphi(x)$ hat und berechnen Sie deren Ableitung in $x = 1$.

AUFGABE 8: (5 Punkte)

Berechnen Sie die Länge der Kurve γ, parametrisiert durch $\varphi : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$

$$\varphi(t) = (a\cos^3 t, a\sin^3 t) \ .$$

AUFGABE 9: (5 Punkte)

Weisen Sie für das folgende Kurvenintegral die Wegunabhängigkeit nach und berechnen Sie anschließend seinen Wert

$$\int_\gamma 2xydx + (x^2 + 3y^2)dy \ ,$$

dabei soll γ in $(0,0)$ beginnen und in $(2,1)$ enden.

AUFGABE 10: (3 + 5 = 8 Punkte)

(a) Berechnen Sie das Flächenintegral $\int\limits_D \frac{\sin x}{x}\, d(x,y)$, wobei D das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0),\ (2,0),\ (2,2)$ ist.

(b) Berechnen Sie das Flächenintegral $\int\limits_B \frac{y}{x^2+y^2}\, d(x,y)$, wobei $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \le 1,\ y \ge |x|\}$ ist.

AUFGABE 11: (5 Punkte)

Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{V} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\vec{V}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -xy^2 \\ x^2 \sin z + y \\ zy^2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie das Volumenintegral $\int\limits_Z \operatorname{div} \vec{V}(x,y,z) d(x,y,z)$, wobei

$$Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 4, |z| \le 2\} \ .$$

Maximale Punktzahl: 65

Mindestpunktzahl zum Bestehen: 24

Viel Erfolg!