Wintersemester 2012/2013

Klausur zur Vorlesung
Analysis 3 (Bachelor-Physik, Mathematik, Wirtschaftsmathematik)

01. 03. 2013

Bearbeitungszeit:	150 Minuten
Erlaubte Hilfsmittel:	Schreib- und Zeichenmaterial
Hinweis:	Alle angegebenen Lösungen sind zu begründen! Fehlende Begründungen mindern die Bewertung.

Teil A (36 Punkte): (Bitte für jede Aufgabe ein separates Blatt verwenden)

Aufgabe 1, 4 Punkte:

Es sei S die Oberfläche der Kugel im $\mathbb{R}^3$ mit dem Radius R um den Nullpunkt, und es sei $\vec{n}$, $\|\vec{n}\| = 1$, der äußere Normalenvektor an S. Man berechne das Oberflächenintegral

$$\int\limits_S \vec{v} \cdot \vec{n}\, d\omega$$

für das Vektorfeld $\vec{v} = (xz^2,\, x^2y - z^3,\, 2xy + y^2z)$ mit Hilfe des Gauß'schen Satzes.

Aufgabe 2, 3 + 4 = 7 Punkte:

Es sei $F = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 \leq r^2\} \subset \mathbb{R}^3$ eine Kreisfläche und $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein durch $\vec{v} = (x,\, x,\, y^3)$ gegebenes Vektorfeld. Man berechne das Kurvenintegral $\int\limits_{\partial F} \vec{v} \cdot \vec{dx}$ entlang des mathematisch positiv orientierten Randes von F

a) direkt

b) mit Hilfes des Satzes von Stokes.

Aufgabe 3, 4 Punkte:

Man löse das Cauchyproblem

$$u_{tt} - 4\,u_{xx} = 0 \quad (x \in \mathbb{R},\ t > 0)$$

$$u(x, 0) = \sin x, \quad u_t(x, 0) = x + \cos x\,, \quad (x \in \mathbb{R})$$

für die eindimensionale Wellengleichung.

Aufgabe 4, 8 Punkte:

Mit Hilfe der Fourier'schen Methode löse man die Rand-Anfangswert-Aufgabe

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad (x \in (0, \pi),\ t > 0)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0$$

$$u(x, 0) = \pi/2 - |x - \pi/2| \quad (x \in [0, \pi])$$

Aufgabe 5, 4 Punkte:

Gegeben sei die Funktion $u(x, y) = 2x^2 + 4xy - 2y^2 + x + 3y$ auf $\mathbb{R}^2$. Man bestimme eine Funktion $v(x, y)$, so dass die Funktion $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ auf $\mathbb{C}$ holomorph ist.

Aufgabe 6, 2 + 2 = 4 Punkte:

a) Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist die Funktion $f(z) = \overline{z}^2$ holomorph?

b) Entwickeln Sie die Funktion $f(z) = e^z$ in eine Potenzreihe in $z_0 = 2\pi i$.

Aufgabe 7, 2 + 3 = 5 Punkte:

a) Man berechne $\displaystyle\int_\Gamma \left(3iz^2 + 1 - \frac{i}{z^2}\right) dz$, wobei Γ die Gerade von $z_0 = 1$ nach $z_1 = i$ ist.

b) Man berechne $\displaystyle\int_\Gamma \frac{z}{z^2+9}\, dz$, wobei Γ durch die Parameterdarstellung $\varphi(t) = 2i + 2e^{it}, \quad 0 \le t \le 2\pi$ gegeben ist.

Teil B (19 Punkte):

Aufgabe 8, 4 + 3 = 7 Punkte:

a) Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Bei Rotation um die z-Achse erzeugt der Graph von f eine Rotationsfläche $S \subset \mathbb{R}^3$.
Man gebe eine Parameterdarstellung der Fläche S, die Gauß'schen Fundamentalgrößen von S und eine Formel für den Flächeninhalt von S an.

b) Man berechne den Flächeninhalt des Paraboloids $S = \{(x, y, z) : 0 \le x^2 + y^2 \le 2, \; z = 2 - x^2 - y^2\}$ an.

Aufgabe 9, 1 + 2 + 3 = 6 Punkte:

a) Wann heißt eine Funktion $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ harmonisch?

b) Formulieren Sie die Mittelwerteigenschaften harmonischer Funktionen im Fall $n = 3$.

c) Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Man zeige, dass das Dirichlet-Problem

$$\begin{aligned} \Delta u &= f \quad \text{auf } G \\ u &= g \quad \text{auf } \partial G \end{aligned}$$

höchstens eine Lösung $u \in C^2(\overline{G})$ besitzt.

Aufgabe 10, Punkte: 2+2+2

a) Wann heißt eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar in z_0 und wann heißt sie holomorph in z_0?

b) Es sei $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ eine auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ holomorphe Funktion. Welche Eigenschaften haben dann die reellen Funktionen u und v?

c) Wie lautet die Cauchy'sche Integralformel für holomorphe Funktionen?

Klausurpunkte insgesamt: 55

Zu erreichende Mindestpunktzahl: 18