Prof. M. Zähle–Ziezold 30.03.2006, 9:00-12:00 Uhr

Wintersemester 2005/2006

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Nachklausur

Hinweise: Die Klausur besteht aus 7 Aufgaben. Insgesamt können Sie 45 Punkte erreichen. Die Klausur gilt als bestanden, wenn mindestens 19 Punkte (Lehramt 17 Punkte) erreicht werden.

Eine Lösung kann nur gewertet werden, wenn der Lösungsweg klar erkennbar ist. Fehlende Begründungen führen zu Punktabzug. Es sind keinerlei Hilfsmittel erlaubt.

Bitte verwenden Sie für **jede** Aufgabe ein **neues** Blatt und versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem **Namen**, Ihrer **Studienrichtung** und Ihrer **Matrikel-Nummer**.

(Name, Vorname)	(Studienrichtung)	(Matrikel-Nr.)	(Punkte)	(Note)	(Zähle)

Aufgabe 1 (1+3+2=6 Punkte)

(a) Was versteht man unter einem linearen Unterraum eines Vektorraumes V?

(b) Zeigen Sie, dass für zwei Unterräume U_1 und U_2 die Mengen $U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2$ wieder Unterräume von V sind.

(c) Es sei F der Vektorraum aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Addition und skalarer Multiplikation

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x), \quad f, g \in F$$
$$(\lambda f)(x) := \lambda f(x), \quad f \in F, \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

Bestimmen Sie, ob die Teilmengen

$$X_0 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } f(0) = 0\}$$
$$X_1 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } f(0) = 1\}$$

Unterräume von F sind.

Aufgabe 2 (1+2+1+4=8 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 4y + z \\ x + 2z \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie die Abbildungsmatrix zu f bzgl. der Standardbasen an.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}_1 = \{(1,1,1), (0,1,1), (1,1,0)\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bildet.

(c) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}_2 = \{(1,1), (1,-1)\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$ ist.

(d) Geben Sie die Abbildungsmatrix zu f bzgl. der Basen $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ an!

Aufgabe 3 (3+2=5 Punkte)

In einem Vektorraum V seien die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig und $v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}$ linear abhängig.

(a) Zeigen Sie, dass v_{n+1} dann als Linearkombination der $v_1, \ldots, v_n$ dargestellt werden kann.

(b) Wie groß ist die Dimension der linearen Hülle von $v_1, \ldots, v_{n+1}$?

Aufgabe 4 (4+4=8 Punkte)

(a) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist das lineare Gleichungssystem

$$x - ty = 1 \ , \quad tx - (2+t)y = 2$$

lösbar? Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist es eindeutig lösbar?

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$2x + y = 1 \ , \quad 3x - y + z = 0 \ , \quad 4x + y - z = 0 \ , \quad -y - z = -1$$

Aufgabe 5 (3+1+1=5 Punkte)

Die Abbildung $B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$B(a, b) := a_1 b_1 - a_1 b_2 - a_2 b_1 + 5 a_2 b_2 \, .$$

(a) Zeigen Sie, dass B ein Skalarprodukt in $\mathbb{R}^2$ ist.

(b) Berechnen Die die Länge des Vektors $\binom{1}{-2}$ bzgl. B.

(c) Bestimmen Sie den Winkel $\sphericalangle(u, v)$ zwischen den Vektoren $u = \binom{3}{-1}$ und $v = \binom{2}{1}$.

Aufgabe 6 (1+3+3=7 Punkte)

Sei M die Menge der reellen $n \times n$-Matrizen und M_1 die Teilmenge der Matrizen $A \in M$ mit $\det A = 1$.

(a) Geben Sie an, wie man bei bekannten Determinanten $\det A$ und $\det B$ die Determinante des Produktes der Matrizen $A, B \in M$ berechnen kann.

(b) Begründen Sie, warum jede Matrix $A \in M_1$ invertierbar ist, und bestimmen Sie mit Hilfe von (a) $\det(A^{-1})$.

(c) Zeigen Sie, dass M_1 – versehen mit der bekanntlich assoziativen Matrizenmultiplikation in M – eine Gruppe bildet.

Aufgabe 7 (4+2=6 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Inverse der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Geben Sie alle Eigenwerte der Matrix $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ an.