Aufgabe 1 (2+2 Punkte)

Für welche Werte von $a, b, c \in \mathbb{R}$ hat das folgende lineare Gleichungssystem keine bzw. genau eine bzw. unendliche viele Lösung(en)? Bestimmen Sie im Fall der Lösbarkeit die Lösungsmenge:

$$\begin{aligned} x+y+2z &= a \\ x \quad + z &= b \\ 2x+y+3z &= c \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (2+2+2 Punkte)

Gegeben seien die folgenden reellen Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & f & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 & h & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Berechnen Sie A^{-1}.

(ii) Schreiben Sie B als Produkt elementarer Matrizen.

(iii) Zeigen Sie, dass C für keine Wahl von $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{R}$ invertierbar ist.

Aufgabe 3 (2+2 Punkte)

(i) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $A^\top A = A$. Zeigen Sie: $A^2 = A$.

(ii) Sei

$$J := \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Beweisen Sie, dass $1_n - J$ invertierbar mit $(1_n - J)^{-1} = 1_n - \frac{1}{n-1}J$ ist.

Aufgabe 4 (2+2+2+2 Punkte)

(i) Bestimmen Sie Basen für die Untervektorräume

$$U := \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : d = a + b, \; c = a - b\}$$

und $U^\perp$ von $\mathbb{R}^4$.

(ii) Berechnen Sie auch Orthonormalbasen von U und $U^\perp$.

Aufgabe 5 (2+2 Punkte)

Gegeben sei die folgende Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie Basen von Kern und Bild der linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^{n\times 1} \to \mathbb{R}^{n\times 1},\ x \mapsto Ax$.

Aufgabe 6 (2 Punkte)

In einem euklidischen Vektorraum V seien Vektoren u, v mit $||u + v|| = 2$ und $||u - v|| = 3$ gegeben. Berechnen Sie $(u \mid v)$.

Aufgabe 7 (2+2+2 Punkte)

Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ werde bzgl. der Standardbasis durch die folgende Matrix beschrieben:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{8}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

(i) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenräume von f.

(ii) Konstruieren Sie eine Orthonormalbasis von V, bzgl. der die Matrix von f die folgende Form hat:

$$B = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -y \\ 0 & y & x \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 8 (2+2 Punkte)

(i) Überprüfen Sie, ob die Matrix A aus Aufgabe 7 in $\mathbb{C}^{3\times 3}$ diagonalisierbar ist.

(ii) Konstruieren Sie gegebenenfalls eine Matrix $S \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{C})$ derart, dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.