Klausur zur Vorlesung
„Lineare Algebra und Analytische Geometrie I“
Wintersemester 2011/2012, Prof. Vladimir S. Matveev

Aufgabe 1 *(11 Punkte)*

(a) Wann sind zwei Matrizen ähnlich?

(b) Was ist das charakteristische Polynom einer Matrix und welchen Grad hat es?

(c) Beweisen Sie, dass ähnliche Matrizen das gleiche charakteristische Polynom besitzen. (Satz 28)

(d) Geben Sie ein Beispiel dafür an, dass die Umkehrung nicht gilt. (Mit Nachweis!)

Aufgabe 2 *(7 Punkte)*

Es sei v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ. Zeigen Sie:

(a) v ist auch ein Eigenvektor von A^k zum Eigenwert λ^k.

(b) Ist A invertierbar, so ist $\lambda \neq 0$.

(c) Ist A invertierbar, so ist v auch ein Eigenvektor von A^{-1} zum Eigenwert λ^{-1}.

Aufgabe 3 *(9 Punkte)*

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch (ohne Begründung)?

(a) Nicht jede Matrix lässt sich als Produkt von Elementarmatrizen schreiben.

(b) Alle endlichdimensionalen Vektorräume sind isomorph.

(c) Die Verkettung zweier linearer Abbildungen ist nicht immer linear.

(d) Keine Abbildung kann eine Rechts- und eine Linksinverse besitzen, die beide verschieden sind.

(e) Die Vereinigung von Kern und Bild einer linearen Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ enthält einen Nullvektor.

(f) $\det(-A) = -\det A$.

(g) Die Determinante einer Matrix mit ganzzahligen Einträgen ist ganzzahlig.

(h) Jeder Körper ist auch eine Gruppe bezüglich der Multiplikation.

(i) Die komplexen Zahlen bilden einen zweidimensionalen reellen Vektorraum.

Bewertung:

- richtige / keine / falsche Antwort = +1 / 0 / -1 Punkt(e)
- Gesamtpunktzahl = Summe bzw. 0, falls die Summe negativ

Aufgabe 4 *(6 Punkte)*

Entscheiden Sie, ob die durch die folgende Matrix gegebene Bilinearform ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ definiert:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5 ✓ (*7 Punkte*)

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden drei Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden:

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(b) Finden Sie die Koordinaten des folgenden Vektors bezüglich dieser Basis:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -9 \end{pmatrix}$$

(c) Ist diese Basis orthogonal bezüglich des Standardskalarproduktes?