Mathematische Methoden der Physik

(Erstes Semester, Winter 2011/2012)

Thema 12: Abschlußklausur

Themenkomplex 1: Gewöhnliche Differentialgleichungen

Aufgabe 1: *Trennung der Variablen (6 Punkte)* 4

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$xy' = \left(1 - 4x^2\right) \tan y$$

durch Trennung der Variablen, und machen Sie anschließend die Probe.

Hinweis: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arcsin x = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

Aufgabe 2: *Variation der Konstanten (9 Punkte)* 9

a) Zeigen Sie, daß die Substitution $z = \ln y$ eine Differentialgleichung der Form

$$y' + P(x)y = Q(x)y \ln y$$

in eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung für die Funktion $z = z(x)$ überführt, die man mit der Methode der Variation der Konstanten lösen kann..

b) Lösen Sie auf diesem Wege die Differentialgleichung

$$xy' = 2x^2 y + y \ln y$$

und machen Sie anschließend die Probe.

Aufgabe 3: *Der integrierende Faktor (10 Punkte)*

a) Weisen Sie nach, daß die Differentialgleichung

$$\left(x^2 + xy + 1\right) y' = -\left(y^2 + xy + 1\right)$$

nicht exakt ist.

b) Lösen Sie die Differentialgleichung mit dem integrierenden Faktor $\lambda(x, y) = \mathrm{e}^{xy}$ in impliziter Form und machen Sie anschließend die Probe.

Hinweis: $\int x\mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = (x - 1)\mathrm{e}^x$

bitte wenden

Aufgabe 4: *Die Methode der unbestimmten Koeffizienten (7 Punkte)*

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' - y' - 6y = e^{-x}.$$

Themenkomplex 2: Vektoranalysis

Aufgabe 5: *Linienintegral (8 Punkte)*

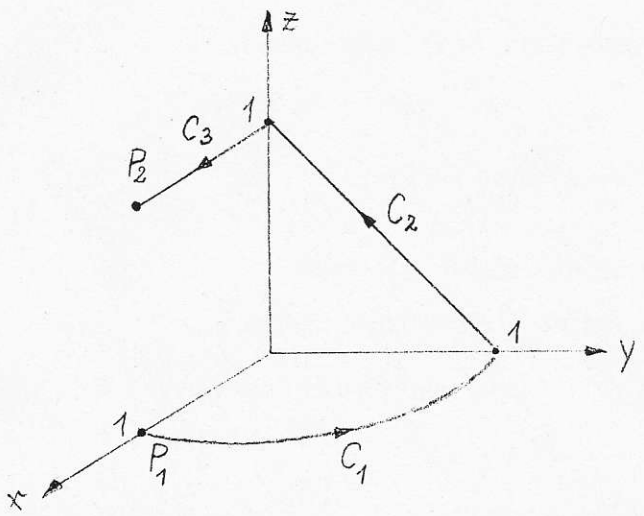
a) Gegeben sei das Vektorfeld

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (y + z)\mathbf{i} + x\mathbf{j} + x\mathbf{k}.$$

Berechnen Sie das Linienintegral

$$\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F}\, d\mathbf{r},$$

wobei der Integrationsweg C, der die Punkte $P_1(1, 0, 0)$ und $P_2(1, 0, 1)$ verbindet, aus dem Viertelkreis C_1 und den beiden Strecken C_2 und C_3 besteht (siehe Abbildung).



Hinweis: $\cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \cos 2\varphi$

b) Begründen Sie, daß man dieses Integral auch einfacher berechnen könnte und geben Sie diesen Lösungsweg an.

Aufgabe 6: *Potentialberechnung (9 Punkte)*

Berechnen Sie das Integral

$$\int_{(0,0,0)}^{(\pi,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3})} \left(\cos x \tan z \, \mathrm{d}x + \mathrm{d}y + \frac{\sin x}{\cos^2 z} \, \mathrm{d}z\right) ,$$

indem Sie in folgenden Schritten vorgehen:

a) Weisen Sie anhand der Integrabilitätsbedingungen nach, daß das Vektorfeld

$$\mathbf{F} = \cos x \tan z \, \mathbf{i} + \mathbf{j} + \frac{\sin x}{\cos^2 z} \mathbf{k}$$

konservativ ist.

b) Berechnen Sie das Potential $U(x, y, z)$ aus einem Kurvenintegral, dessen Integrationsweg parallel zu den Koordinatenachsen verläuft, und machen Sie die Probe durch Gradientenbildung.

c) Berechnen Sie mit Hilfe dieses Potentials das eingangs verlangte Integral.

Aufgabe 7: *Feldlinien* – ***Zusatzaufgabe*** *(6 Punkte)*

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}) .$$

a) Begründen Sie, daß die Feldlinien dieses Vektorfeldes Kreise sind.

b) Geben Sie *ohne Rechnung* den Wert des Integrals

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \, \mathrm{d}\mathbf{r}$$

an, wenn C_1 der durch $y = ax$, $1 \leq x \leq 2$, $a = \text{const}$ gegebene Weg ist.

c) Geben Sie wiederum *ohne Rechnung* das Vorzeichen dieses Integrals an, wenn anstelle des Weges C_1 der durch $y = 1$, $0 \leq x \leq 4$ beschriebene Weg C_2 gewählt wird.