Lösungsvorschlag zu:
Thema 12 Abschlussklausur

3. Juli 2012

Themenkomplex 1: Gewöhnliche DGLs

Aufgabe 1: Trennung der Variablen (6 Punkte)

allgemeine Lösung

$$
\begin{aligned}
x\frac{dy}{dx} &= (1-4x^2)\tan y \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{1-4x^2}{x}\tan y \\
\frac{1}{\tan y}\frac{dy}{dx} &= \frac{1-4x^2}{x} \\
\cot y\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{x}-4x \\
\int \cot y\frac{dy}{dx}dx &= \int (\frac{1}{x}-4x)dx \\
\int \cot y dx &= \int \frac{1}{x}dx - 4\int x dx \\
\ln|\sin y| &= \ln|x| - 2x^2 + c \\
\sin y &= Axe^{-2x^2} \mathit{(mit\ A = e^c)} \\
y &= \arcsin Axe^{-2x^2}
\end{aligned}
$$

Probe Die Lösung wird zunächt abgeleitet und dann werden sowohl die Ausdrücke für y als auch für $\frac{dy}{dx}$ in die DGL eingesetzt. Es soll eine wahre Aussage (nicht $0 = 0$!) erzeugt werden!

$$
\begin{aligned}
y &= \arcsin Axe^{-2x^2} \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{Ae^{-2x^2}(1-4x^2)}{\sqrt{1-(Axe^{-2x^2})^2}} \\
x\frac{Ae^{-2x^2}(1-4x^2)}{\sqrt{1-(Axe^{-2x^2})^2}} &= (1-4x^2)\tan(\arcsin Axe^{-2x^2}) \\
\frac{Axe^{-2x^2}}{\sqrt{1-(Axe^{-2x^2})^2}} &= \frac{Axe^{-2x^2}}{\cos(\arcsin Axe^{-2x^2})} \\
\frac{Axe^{-2x^2}}{\sqrt{1-(Axe^{-2x^2})^2}} &= \frac{Axe^{-2x^2}}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin Axe^{-2x^2})}} \\
\frac{Axe^{-2x^2}}{\sqrt{1-(Axe^{-2x^2})^2}} &= \frac{Axe^{-2x^2}}{\sqrt{1-(Axe^{-2x^2})^2}}
\end{aligned}
$$

Die Probe geht auf, das Ergebnis ist demnach richtig!

Aufgabe 2: Varation der Konstanten (9 Punkte)

a)

Aus der Substitution $z = \ln y$ folgt $y = e^z$. Dieser Ausdruck abgeleitet ergibt $\frac{dy}{dx} = e^z \frac{dz}{dx}$

Einsetzen in die DGL

$$e^z \frac{dz}{dx} + P(x)e^z = Q(x)e^z \ln e^z$$
$$\frac{dz}{dx} + P(x) = Q(x)z$$
$$\frac{dz}{dx} - Q(x)z = -P(x)$$

Diese Form DGL lässt sich mit Hilfe variierter Konstanten leicht lösen.

b)

$$x\frac{dy}{dx} = 2x^2y + y\ln y$$
$$\frac{dy}{dx} = 2xy + \frac{y}{x}\ln y$$
$$\frac{dy}{dx} + \underbrace{(-2x)}_{P(x)}y = \underbrace{\frac{1}{x}}_{Q(x)}y\ln y$$

Mit der Form aus a) lässt sich die DGL nun folgendermaßen vereinfachen und ohne Schwierigkeiten lösen

$$\frac{dz}{dx} - \frac{1}{x}z = 2x$$

homogene Lösung

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}z$$
$$\frac{1}{z}\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}$$
$$\ln|z| = \ln|x| + c \Rightarrow z = Ax$$

Variation der Konstante $A = u(x)$

$$z = u(x)x$$
$$\frac{dz}{dx} = \frac{du}{dx}x + u(x)$$

In die DGL einsetzen

$$\frac{du}{dx}x + u(x) - \frac{1}{x}u(x)x = 2x$$
$$\frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow u = 2x + \tilde{c}$$
$$z = 2x^2 + x\tilde{c}$$
$$y = e^{2x^2 + x\tilde{c}}$$

Probe

$$y = e^{2x^2 + x\tilde{c}}$$
$$\frac{dy}{dx} = e^{2x^2 + x\tilde{c}}(4x + \tilde{c})$$

In die DGL einsetzen

$$xe^{2x^2 + x\tilde{c}}(4x + \tilde{c}) = 2x^2 e^{2x^2 + x\tilde{c}} + e^{2x^2 + x\tilde{c}}(2x^2 + x\tilde{c})$$
$$4x^2 + x\tilde{c} = 2x^2 + 2x^2 + x\tilde{c}$$
$$4x^2 + x\tilde{c} = 4x^2 + x\tilde{c}$$

Die Probe geht auf, das Ergebnis ist demnach richtig!

Aufgabe 3: Der integrierende Faktor (10 Punkte)

a)

$$(x^2 + xy + 1)\frac{dy}{dx} = -(y^2 + xy + 1)$$
$$\underbrace{(y^2 + xy + 1)}_{A}dx + \underbrace{(x^2 + xy + 1)}_{B}dy = 0$$
$$\frac{\partial A}{\partial y} = 2y + x \neq 2x + y = \frac{\partial B}{\partial x}$$

Das Integrabilitätskriterium ist nicht erfüllt, somit ist die DGL nicht exakt!

b)

$$\frac{\partial U}{\partial x} = A\lambda \ \Rightarrow U(x,y) = \int A\lambda dx$$

$$U(x,y) = \int (y^2 + xy + 1)e^{xy}dx$$

$$U(x,y) = y^2 \int e^{xy}dx + y \int xe^{xy}dx + \int e^{xy}dx$$

$$U(x,y) = ye^{xy} + \frac{1}{y}e^{xy}(xy-1) + \frac{1}{y}e^{xy} + g(y)$$

$$U(x,y) = ye^{xy} + \frac{1}{y}e^{xy}(xy) + g(y)$$

$$U(x,y) = ye^{xy} + xe^{xy} + g(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = e^{xy} + xye^{xy} + x^2e^{xy} + \frac{dg}{dx} = e^{xy}(x^2 + xy + 1) + \frac{dg}{dx}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = B \Rightarrow \frac{dg}{dx} = 0 \Rightarrow g(y) = \tilde{c}$$

Mit $U(x,y) = 0$ ist die Lösung der DGL:

$$\hat{c} = (x+y)e^{xy}$$

Probe durch implizites Ableiten der Lösung

$$0 = (1 + \frac{dy}{dx})e^{xy} + (x+y)(x\frac{dy}{dx} + y)e^{xy}$$

$$0 = 1 + \frac{dy}{dx}(x^2 + xy + 1) + y^2 + xy$$

$$(x^2 + xy + 1)\frac{dy}{dx} = -(y^2 + xy + 1)$$

Wie es sein sollte, die Probe ist positiv!

Aufgabe 4:
Die Methode der unbestimmten Koeffizienten (7 Punkte)

$$y'' - y' - 6y = e^{-x}$$

homogene Lösung

$$y'' - y' - 6y = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \Rightarrow \lambda_1 = 3 \wedge \lambda_2 = -2$$

$$y_h = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}$$

inhomogene Lösung

$$F(x) = Ae^{\varrho x}$$

$F(x)$ ist die Inhomogenität

$$y_p = ae^{\varrho x}$$

$$y_p' = a\varrho e^{\varrho x}$$

$$y_p'' = a\varrho^2 e^{\varrho x}$$

in die DGL einsetzen

$$a\varrho^2 e^{\varrho x} - a\varrho e^{\varrho x} - 6ae^{\varrho x} = Ae^{\varrho x}$$

$$a = \frac{A}{\varrho^2 - \varrho - 6} = \frac{1}{(-1)^2 + 1 - 6}$$

$$\Rightarrow y_p = -\frac{1}{4}e^{-x}$$

Die allgemeine Lösung der DGL ist die Kombination von homogener und spezieller Lösung

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-x}$$

Themenkomplex 2: Vektoranalysis

Aufgabe 5: Linienintegral (8 Punkte)

a)

Linienintegral über Integrationsweg C$_1$ Viertelkreis gegen den Uhrzeigersinn

$$\text{Parametrisierung:}$$

$$\mathbf{r} = \underbrace{\cos t}_{x}\,\mathbf{i} + \underbrace{\sin t}_{y}\,\mathbf{j} \quad \text{mit } (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}$$

$$\mathbf{F} = \sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \cos t\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t$$

$$W_1 = \int_{P_1}^{P_{12}} \mathbf{F} d\mathbf{r} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{F}\mathbf{v}dt$$

$$W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t dt = \frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

Linienintegral über Integrationsweg C$_2$ Gerade

$$\text{Parametrisierung:}$$

$$\mathbf{r} = \underbrace{t}_{x}\,\mathbf{i} + \underbrace{(1-t)}_{z}\,\mathbf{k} \quad \text{mit } (1 \leq t \leq 0)$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i} - \mathbf{k}$$

$$\mathbf{F} = (1-t)\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = 1 - 2t$$

$$W_2 = \int_{P_{12}}^{P_{21}} \mathbf{F} d\mathbf{r} = \int_1^0 \mathbf{F}\mathbf{v}dt$$

$$W_2 = \int_1^0 (1-2t)dt = (t - t^2)\Big|_1^0 = 0$$

Linienintegral über Integrationsweg C_3 Gerade

$$\text{Parametrisierung:}$$
$$\mathbf{r} = \underbrace{t}_{x}\mathbf{i} + \underbrace{1}_{z}\mathbf{k} \quad \text{mit } (0 \leq t \leq 1)$$
$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i}$$
$$\mathbf{F} = \mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$
$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = 1$$
$$W_3 = \int_{P_{21}}^{P_2} \mathbf{F} d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}\mathbf{v} dt$$
$$W_3 = \int_0^1 dt = t\Big|_0^1 = 1$$

Linienintegral über Integrationsweg C

$$W = W_1 + W_2 + W_3 = 1$$

b)

Annahme: Das Vektorfeld ist konservativ!

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \underbrace{(y + z)}_{F_1}\mathbf{i} + \underbrace{x}_{F_2}\mathbf{j} + \underbrace{x}_{F_3}\mathbf{k}$$
$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 1 = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$
$$\frac{\partial F_1}{\partial z} = 1 = \frac{\partial F_3}{\partial x}$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial z} = 0 = \frac{\partial F_3}{\partial y}$$

Das Differenzial ist vollständig, das Feld ist also tatsächlich konservativ. Dies ermöglicht die in der Angabe beschriebene einfachere Berechnung des Linienintegrals. Verwendet man die Tatsache, dass die verrichtete Arbeit in konservativen Kraftfeldern wegunabhängig ist, muss die Arbeit auf einem geschlossenen Weg von P_1 über P_2 zurück nach P_1 gleich 0 sein. Es reicht also das Linienintegral auf dem direkten Integrationsweg C_4 zwischen beiden Punkten zu berechnen.

Linienintegral über Integrationsweg $\mathbf{C}_4$ Gerade

Parametrisierung:

$$\mathbf{r} = \underbrace{1}_{x}\,\mathbf{i} + \underbrace{t}_{z}\,\mathbf{k} \quad \text{mit } (1 \leq t \leq 0)$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{k}$$

$$\mathbf{F} = t\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = 1$$

$$W_4 = \int_{P_2}^{P_1} \mathbf{F} d\mathbf{r} = \int_1^0 \mathbf{F}\mathbf{v} dt$$

$$W_4 = \int_1^0 dt = t\Big|_1^0 = -1$$

$$W = 0 - W_4 = 0 - (-1) = 1$$

wie es sein sollte

Aufgabe 6: Potenzialberechnung (9 Punkte)

a)

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \underbrace{(\cos x \tan z)}_{F_1}\,\mathbf{i} + \underbrace{1}_{F_2}\,\mathbf{j} + \underbrace{\frac{\sin x}{\cos^2 z}}_{F_3}\,\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 0 = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\cos x}{\cos^2 z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial z} = 0 = \frac{\partial F_3}{\partial y}$$

Das Vektorfeld ist konservativ!

b)

$$U(x,y,z) = -\int_{x_0}^{x} F_1(\eta, y_0, z_0)d\eta - \int_{y_0}^{y} F_2(x,\xi,z_0)d\xi - \int_{z_0}^{z} F_3(x,y,\zeta)d\zeta$$

$$U(x,y,z) = -\tan z_0 \sin\eta\Big|_{x_0}^{x} - \xi\Big|_{y_0}^{y} - \sin x\tan\zeta\Big|_{z_0}^{z}$$

$$U(x,y,z) = -\tan z_0 \sin x + \tan z_0 \sin x_0 - y + y_0 - \sin x \tan z + \sin x \tan z_0$$

$$U(x,y,z) = -(\sin x \tan z + y) + \sin x_0 \tan z_0 + y_0$$

$$U(x,y,z) = -(\sin x \tan z + y) + U_0$$

Probe

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \cos x \tan z = F_1$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 1 = F_2$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\sin x}{\cos^2 z} = F_3$$

Die Gradientenbildung von U bestätigt die Richtigkeit des Ergebnisses!

c)

Das unbestimmte Integral wurde praktischerweise schon durch die Berechnung des Potenzials bestimmt. Es müssen also nur noch die Grenzen richtig eingesetzt werden!

$$\int_{0,0,0}^{\pi,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3}} (\cos x \tan z dx + 1dy + \frac{\sin x}{\cos^2 z}dz)$$

$$= -(\sin\pi\tan\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}) + \sin 0 \tan 0 = -\frac{\pi}{2}$$

Aufgabe 7: Feldlinien - Zusatzaufgabe (6 Punkte)

a)

Das Vektorfeld ist gegeben durch $\mathbf{F}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$, wobei die Kraft in x-Richtung $\mathbf{F}(x) = \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ und die Kraft in y-Richtung $\mathbf{F}(y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ist. Eine Kurve C heißt Feldlinie eines Vektorfelds **F**, wenn der Vektor **F** in jedem Kurvenpunkt P ein Tangentenvektor ist. Wir verwenden also den Ansatz:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}} = -\frac{x}{y}$$

Die Lösung dieser Differenzialgleichung ist schnell gefunden:

$$\begin{aligned} y\frac{dy}{dx} &= -x \\ \frac{1}{2}y^2 &= -\frac{1}{2}x^2 + c \\ x^2 + y^2 &= 2C = \tilde{c}^2 \end{aligned}$$

Dies ist die Kreisgleichung eines Kreises mit Radius $\tilde{c}$

b)

Der gegebene Weg $C_1 : y = ax, 1 \leq x \leq 2$ lässt sich auch durch die Parametrisierung $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + at\mathbf{j}$ mit $(1 \leq t \leq 2)$ beschreiben. Mit $\mathbf{v} = \mathbf{i} + a\mathbf{j}$ erhält man für das Produkt aus Kraft und Geschwindigkeit

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{ax}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

Somit ist das Kurvenintegral

$$\int_{C_1} \mathbf{F} d\mathbf{r} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt = 0$$

c)

Analog zu $b)$ wird der Weg $C_2 : y = 1, 0 \leq x \leq 4$ zunächst parametrisiert

$$\mathbf{r} = t\mathbf{i} + \mathbf{j} \quad \text{mit } (0 \leq t \leq 4)$$

und anschließend das Produkt aus Kraft und Geschwindigkeit berechnet:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Daraus folgt für das Kurvenintegral

$$\int_{C_1} \mathbf{F} d\mathbf{r} = \int_0^4 \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt = -\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt < 0$$

ein stets negativer Wert!