Friedrich-Schiller Universität Jena | SoSe 10

1. Klausur zur Vorlesung Quantenmechanik I
28.05.2010

insgesamt: 30 Punkte

Aufgabe 1: Observable, Eigenwerte und Wahrscheinlichkeiten (9 Punkte)

Der Operator A in einem zweidimensionalen Hilbertraum mit Orthonormalbasis $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ habe die Darstellung $A = a\,(|1\rangle\langle 1| - i|1\rangle\langle 2| + i|2\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|)$ mit $a \in \mathbb{R}$.

a) Wie sieht der Operator in Matrixdarstellung bezüglich der Orthonormalbasis $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ aus? (1 Punkt)

b) Handelt es sich um eine physikalische Observable? (Bitte begründen Sie Ihre Antwort.) (1 Punkt)

c) Bestimmen Sie Eigenwerte λ_i (i=1,2) und normierte Eigenzustände von A. (3 Punkte)

d) Betrachten Sie den Operator $B = b\,(|1\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1| - 2|2\rangle\langle 2|)$ mit $b \in \mathbb{R}$. Sind A und B gleichzeitig messbar? (1 Punkt)

e) Gegeben sei der Zustand $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + i|2\rangle)$. Bestimmen Sie den Erwartungswert von A im Zustand ψ. (1 Punkt)

f) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, im Zustand $|\psi\rangle$ für eine Messung von A den Wert λ_1 bzw. λ_2 zu bekommen? (2 Punkte)

Aufgabe 2: Orts- und Impulsdarstellung (4 Punkte)

Benutzen Sie die Orts- und Impulsdarstellung, um zu zeigen, dass für den Ortsoperator X in einer Dimension gilt:

a) $\langle p|X|\alpha\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\langle p|\alpha\rangle$ (3 Punkte)

b) $\langle\beta|X|\alpha\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dp\,\phi_\beta^*(p)\,i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\,\phi_\alpha(p)$,

wobei $\phi_\alpha(p) = \langle p|\alpha\rangle$. (1 Punkt)

Bitte beachten Sie die Rückseite!

Aufgabe 3: Projektionsoperatoren (5 Punkte)

a) Bestimmen Sie die notwendigen und hinreichenden Bedingungen an einen Operator A in einem Hilbertraum, damit der Operator $\mathcal{P} = \frac{1}{2}(1 - A)$ ein Projektionsoperator ist. (1 Punkt)

b) Sei $\mathcal{P}$ der so bestimmte Projektionsoperator. Welche Eigenwerte können $\mathcal{P}$ und A jeweils haben? (2 Punkte)

c) Betrachten Sie einen dreidimensionalen komplexen Hilbertraum mit Orthonormalbasis $|e_i\rangle$, $i = 1, 2, 3$. Geben Sie ein Beispiel für Operatoren A und $\mathcal{P}$, so dass bei jedem der beiden *alle* möglichen Eigenwerte auch mindestens einmal auftreten. Geben Sie dabei die Operatoren in Spektraldarstellung an (also als Summe von Ket-Bra-Ausdrücken). (2 Punkt)

Aufgabe 4: Kommutatoren (5 Punkte)

a) Welche der folgenden Formeln für Operatoren A, B, C und D in einem Hilbertraum sind korrekt und welche nicht? Bitte begründen Sie Ihre Antwort. (1.5 Punkte)

$$[AB, CD] = A[B, C]D + B[A, D]C \qquad (i)$$
$$[A, CD] = A[C, D] + [A, C]D \qquad (ii)$$
$$[A, CD] = [A, C]D + C[A, D] \qquad (iii)$$

b) Berechnen Sie $[\mathcal{P}^3, A^2]$ mit $\mathcal{P} = \frac{1}{2}(1 - A)$ für einen Operator A in einem Hilbertraum. (1 Punkt)

c) Gegeben den Hamiltonoperator $H = \frac{P^2}{2m} + V(X)$ mit dem Potenzial $V(X) = \alpha X^3 + \beta X^7$, berechnen Sie $[H^2, X]$. Hierbei sind P der Impulsoperator, X der Ortsoperator und α und β reelle Konstanten. Im Endergebnis sollen etwaige Impulsoperatoren stets rechts der Ortsoperatoren stehen; benützt man $V(X)$ und $V'(X)$ als Abkürzung, kann man das Ergebnis als Summe dreier Terme schreiben. (2.5 Punkte)

Aufgabe 5: Teilchen im Potenzial (7 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m bewege sich in einer Dimension zwischen $x = 0$ und $x = L$. An den Randpunkten erfülle die Wellenfunktion von-Neumannsche Randbedingungen, d.h. die Ableitung der Wellenfunktion verschwinde an den Rändern:

$$\psi'(x = 0) = 0 = \psi'(x = L).$$

Wie sehen die Wellenfunktionen $\psi_n(x)$ und die Energieeigenwerte E_n aus? (Die Normierung der Wellenfunktionen braucht nicht berechnet zu werden.)

Viel Erfolg!