Friedrich-Schiller Universität Jena SoSe 10

2. Klausur zur Vorlesung Quantenmechanik I
09.07.2010

insgesamt: 30 Punkte

Aufgabe 1: Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? (3.5 Punkte)

a) Wenn die Komponente des Drehimpulses in z-Richtung bekannt und ungleich Null ist, dann ist die Komponente des Drehimpulses in x-Richtung unbestimmt. (1/2 Punkt)

b) Die Komponente L_z des Drehimpulses kommutiert mit dem Operator $L_x^2 + L_y^2$. (0.5 Punkte)

c) Die Ableitung einer Wellenfunktion ist eine Wellenfunktion. (0.5 Punkte)

d) Eigenzustände des Hamiltonoperators sind Eigenzustände des Drehimpulsquadrates L^2, wenn der Hamiltonoperator invariant unter Rotationen im Raum ist. (0.5 Punkte)

e) Der Impulsoperator kommutiert immer mit dem Hamiltonoperator. (0.5 Punkte)

f) Wenn zwei Operatoren A und B antihermitesch sind (also $A^\dagger = -A$), dann ist ihr Kommutator $[A, B]$ hermitesch. (0.5 Punkte)

g) Zwei Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen können Gesamtspin $\frac{1}{2}$ haben. (0.5 Punkte)

Aufgabe 2: Wasserstoffatom (8 Punkte)

Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist die Wellenfunktion eines Elektrons im Wasserstoffatom gegeben durch

$$\psi(\vec{r}, 0) = \frac{1}{\sqrt{12}} \left(2\psi_{100} - \psi_{210} + \sqrt{2}\psi_{211} + \sqrt{3}\psi_{21-1} + \sqrt{2}\psi_{321} \right), \tag{1}$$

wobei die verwendete Notation $\psi_{pqr} = \psi_{n=p,\, l=q,\, m=r}$ mit den bekannten Quantenzahlen n, l, m des Wasserstoffatoms ist.

a) Geben Sie den Erwartungswert der Energie (in Einheiten der Grundzustandsenergie E_0), des Drehimpulsquadrates $\vec{L}^2$ und der Drehimpulskomponente in z-Richtung L_z in diesem Zustand an. (3 Punkte)

b) Geben Sie die Form der Wellenfunktion zum Zeitpunkt $t > 0$ an. (3 Punkte)

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das Elektron zu einem Zeitpunkt $t > 0$ im Zustand $l = 1$, $m = +1$ zu finden? (2 Punkte)

Aufgabe 3: Kommutatorrelationen für Bahndrehimpulse (5 Punkte)
Es sei $\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P}$ der Bahndrehimpulsoperator, wobei $\vec{R}$ der Ortsoperator und $\vec{P}$ der Impulsoperator seien. Zeigen Sie die folgenden Kommutatorrelationen (jeweils 1 Punkt):

$$\begin{aligned}
[L_i, R_j] &= i\hbar\, \epsilon_{ijk} R_k \\
[L_i, P_j] &= i\hbar\, \epsilon_{ijk} P_k \\
[L_i, \vec{P}^2] &= 0 = [L_i, \vec{R} \cdot \vec{P}] \\
[L_i, L_j] &= i\hbar\, \epsilon_{ijk} L_k.
\end{aligned}$$

Hierbei könnte die folgende Relation nützlich sein: $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$

Aufgabe 4: Messung und Wahrscheinlichkeit (6.5 Punkte)
Die Wellenfunktion eines freien Teilchens in einer Dimension sei zum Zeitpunkt $t = 0$ gegeben durch

$$\psi(x, 0) = N \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{-\frac{|k|}{k_0}}\, e^{ikx}, \tag{2}$$

wobei N und k_0 Konstanten seien.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P(p_1, 0)$, das Teilchen bei einer Impulsmessung zum Zeitpunkt $t = 0$ mit einem Impuls zwischen $-p_1$ und p_1 zu finden? Diskutieren Sie die Funktion $P(p_1, 0)$. (2.5 Punkte)

b) Wie lautet die Wahrscheinlichkeit $P(p_1, t)$ für die gleiche Messung zu einem späteren Zeitpunkt $t > 0$? (2 Punkte)

c) Welche Form hat das Wellenpaket zur Zeit $t = 0$? Man berechne für diesen Zeitpunkt das Produkt $\Delta X \cdot \Delta P$. Was folgt aus dem Ergebnis? (2 Punkte)

Aufgabe 5: Störungstheorie (7 Punkte)
Betrachten Sie den Hamiltonoperator $H = H_0 + H_1$ mit

$$\begin{aligned}
H_0 &= \frac{\hbar\,\omega}{2} \left(a^\dagger\, a + a\, a^\dagger\right) , && (3) \\
H_1 &= \lambda \left[(a^\dagger)^3 + 3\,(a^\dagger)^2\, a + 3\, a^\dagger\, a^2 + a^3\right] , && (4)
\end{aligned}$$

wobei $a^\dagger$ und a Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren des harmonischen Oszillators sind, die der Kommutatorrelation

$$[a^\dagger, a] = 1 \tag{5}$$

genügen.

Nehmen Sie an, dass H_1 eine kleine Störung von H_0 darstellt und berechnen Sie die Energie des Grundzustandes zu H in erster und zweiter Ordnung in λ.

Viel Erfolg!