

INSTITUT FÜR FESTKÖRPERTHEORIE UND -OPTIK
FRIEDRICH-SCHILLER-UNIVERSITÄT JENA

Klausur Elektrodynamik WS 2012/13

Die Bearbeitungszeit beträgt 2 Stunden. Es sind insgesamt **80 Punkte** zu vergeben, **72 Punkte** entsprechen 100% für die Notenvergabe. Viel Erfolg!

Nützliche Gleichungen:

$$2. \text{ Greenscher Satz: } \int_V (\phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi) dV = \int_{(V)} \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right) \cdot d\mathbf{f},$$

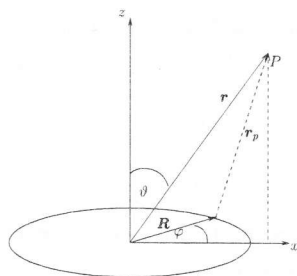
$$\operatorname{div} [\mathbf{A}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r})] = \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}) - \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}) .$$

Aufgabe 1:

12 Punkte

Es liege eine endliche, statische Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$ im Vakuum vor.

- a) Leiten Sie aus den Maxwell-Gleichungen eine Gleichung für das elektrostatische Potential ab, und geben Sie deren allgemeine Lösung an.
- b) Gegeben seien nun eine unendlich dünne, homogen geladene, kreisförmige Schleife mit Radius R und Linienladungsdichte ξ und eine unendlich dünne, kreisförmige, homogen geladene Scheibe mit gleichem Radius und Flächenladungsdichte η . Spezialisieren Sie die Lösung von a) auf diese beiden Fälle.
- c) Berechnen Sie das elektrostatische Potential für diese beiden Fälle auf der Symmetrieachse der Ladungsverteilungen (z -Achse).



Aufgabe 2:

10 Punkte

Eine endliche, statische Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$ befinde sich im Vakuum und in der Nachbarschaft von N endlichen Leitern, die alle durch eigene Spannungsquellen auf konstanten Potentialen φ_i gehalten werden ($i = 1 \dots N$).

- a) Geben Sie qualitativ an, wie sich das elektrostatische Potential und das elektrische Feld in Leitern und auf Leiteroberflächen verhalten.

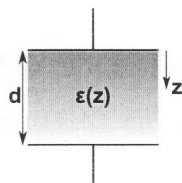
b) Geben Sie unter Verwendung der Greenschen Funktion das elektrostatische Potential $\varphi(\mathbf{r})$ im gesamten Raum an. Benutzen Sie die Freiheiten bei der Wahl der Greenschen Funktion, um die Berechnung unter Beachtung der vorgegebenen Randbedingungen zu vereinfachen. Wie sieht die Bestimmungsgleichung (inklusive Randbedingungen) für die Greensche Funktion aus?

Hinweis: Gehen Sie vom 2. Greenschen Satz aus, und benutzen Sie die Poisson-Gleichung und die Definitionsgleichung für die Greensche Funktion.

Aufgabe 3:

8 Punkte

Ein Plattenkondensator mit den Plattenflächen F und dem Plattenabstand d trage die statischen Ladungen Q und $-Q$ auf den Platten und sei ganz mit einem inhomogenen Dielektrikum der Dielektrizitätskonstanten $\varepsilon(z)$ gefüllt. Berechnen Sie seine Kapazität. Wie lautet die Kapazität, wenn das Dielektrikum aus zwei senkrecht zu z homogenen Schichten mit den Dicken d_1 und d_2 und den Dielektrizitätskonstanten ε_1 und ε_2 besteht? Vernachlässigen Sie Randeffekte.



Aufgabe 4:

10 Punkte

Gegeben sei ein Schwingkreis, bestehend aus der Parallelschaltung eines Widerstandes R , einer Kapazität C und einer Induktivität L und einer Spannungsquelle mit der Spannung $U(t) = U_0 \exp(i\omega t)$.

- Bestimmen Sie im eingeschwungenen Zustand (Strom $I(t) = I_0 \exp(i\omega t)$) unter Anwendung des Knoten- und Maschensatzes den komplexen Gesamtwiderstand $\tilde{R} = U/I$.
- Bestimmen Sie unter Zuhilfenahme des Ergebnisses von a) den Wirk- und Blindwiderstand des Schwingkreises. Bei welcher Frequenz sind Strom und Spannung in Phase?

Aufgabe 5:

14 Punkte

Man betrachte zeitlich langsam veränderliche Ladungen $\rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t)$ und Ströme $\mathbf{j}_{\text{makr}}(\mathbf{r}, t)$ und damit auch zeitlich langsam veränderliche Felder im Vakuum.

- Geben Sie die differentiellen Maxwell-Gleichungen an. Welcher Term in den vollständigen Gleichungen wird dabei vernachlässigt? Warum ist diese Näherung sinnvoll?
- Zeigen Sie, dass man Potentiale einführen kann. Welche Vorteile ergeben sich durch die Einführung der Potentiale?
- Warum kann man die Potentiale eichen? Leiten Sie die entsprechenden Eichtransformationen ab.
- Leiten Sie für die Coulomb-Eichung die Bestimmungsgleichungen für die Potentiale ab. Geben Sie die Lösungen für natürliche Randbedingungen an. Diskutieren Sie den Charakter der Zeitabhängigkeit der Lösungen.

Aufgabe 6:**9 Punkte**

Gegeben seien beliebige zeitabhängige Ladungs- ($\rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t)$) und Stromdichten ($\mathbf{j}_{\text{makr}}(\mathbf{r}, t)$) in Materie.

- a) Schreiben Sie die vollständigen Maxwell-Gleichungen in integraler Form auf. Geben Sie den Zusammenhang zwischen Vakuum- und Materiefeldern an.
- b) Leiten Sie aus den Maxwell-Gleichungen die Übergangsbedingungen für \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{H} und \mathbf{D} an einer Grenzfläche zwischen zwei Medien, die unterschiedliche dielektrische und magnetische Eigenschaften besitzen, her. Illustrieren Sie diese Herleitungen mit Skizzen.

Aufgabe 7:**7 Punkte**

Man betrachte beliebige zeitabhängige, endliche Ladungs- ($\rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t)$) und Stromdichten ($\mathbf{j}_{\text{makr}}(\mathbf{r}, t)$) im Vakuum.

- a) Leiten Sie den Poyntingschen Satz aus den Maxwell-Gleichungen her. Interpretieren Sie die einzelnen Terme.
- b) Warum ist die Einführung der elektromagnetischen Energiedichte in homogenen, dispersiven und absorptiven Medien wesentlich komplizierter und damit die Herleitung des Poyntingschen Satzes nicht so einfach möglich?
- c) Erklären Sie qualitativ, wann die mittlere Energiestromdichte bei monochromatischen Feldern Quellen oder Senken besitzt.

Aufgabe 8:**10 Punkte**

Gegeben sei ein homogenes, unmagnetisches und dispersives Medium mit einer dielektrischen Funktion $\varepsilon(\omega)$. Makroskopische Ströme und externe Ladungen liegen nicht vor.

- a) Leiten Sie die Wellengleichung im Frequenzraum (Helmholtzgleichung) für das elektrische Feld her.
- b) Unter welcher Bedingung sind ebene Wellen Lösungen dieser Gleichung? Wie nennt man diese Bedingung? Interpretieren Sie deren physikalischen Inhalt, und erklären Sie die auftretenden Größen.
- c) Zeigen Sie, dass diese Wellen transversal sind. Was können Sie über deren Polarisationsverhalten aussagen?