

Übungen zur Vorlesung Analysis 1 WS 06/07

7. Übungsserie

1.) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$ b*) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x-b} - \sqrt{a-b}}{a^2 - x^2} \quad a > b$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1} \quad m, n \in \mathbb{N}$ d) $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$

e*) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \right)$ f*) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-\sqrt{x}) \cdot (1-\sqrt[3]{x}) \cdot \dots \cdot (1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$

g) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n - na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}$ h) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x^3+1} - \sqrt{x^3-1})$

i*) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}$ j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2}$

2.) Zeigen Sie die Stetigkeit der Funktionen $f(x)$ in den angegebenen Punkten ($\varepsilon - \delta$ -Technik)

- a) $f(x) = x^2$ in $x_0 = 2$
 b) $f(x) = \frac{1}{x}$ in $x_0 : 0 < x_0 < \infty$
 c*) $\sqrt[3]{x}$ in $x_0 \in \mathbb{R}$

3.) Untersuchen Sie die angegebenen Funktionen auf Stetigkeit im Definitionsbereich D

a*) $f(x) = x \cdot \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \quad D = \{x : 0 < x < \infty\}$

Bem.: $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \cong$ ganzer Anteil von $\frac{1}{x}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & , \text{ falls } x = \frac{m}{n} \quad m, n \text{ ganz, } n > 0, m \neq 0, \text{ gekürzter Bruch} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
 $D = \mathbb{R}$

4.) Zeigen Sie, dass $\varphi(x) = \min(f(x), g(x))$ in x_0 stetig ist, wenn f und g diese Eigenschaft haben.

5.) Gilt in einer Umgebung des Punktes x_0

1. $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = A$,

so existiert auch $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ und es gilt $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

Es wird empfohlen, alle mit * gekennzeichneten Aufgaben schriftlich zu bearbeiten und in den Übungen in der Woche vom 04.12 bis 08.12.2006 abzugeben.