

Analysis II - Vorlesungsscript

FSU Jena - SS 2007

Stilianos Louca

9. November 2007

Inhaltsverzeichnis

1	Vorwort	4
1.1	Was dies ist	4
1.2	Verbesserungen	4
2	Analysis I - Fortsetzung	5
2.1	Uneigentliche Integrale, Γ -Funktion	5
2.1.1	Definition: Uneigentliche Integrale	5
2.1.2	Integralkriterium für Reihen	5
2.1.3	Definition: Γ -Funktion	5
2.1.4	Höldersche Ungleichung	6
3	Analysis II - Metrische und normierte Räume	7
3.1	Metrische Räume	7
3.1.1	Definition: Metrik, metrische Räume	7
3.1.2	Cauchy-Schwarzsche Ungleichung	7
3.1.3	Minkowski Ungleichung	7
3.1.4	Definition: Kugel	7
3.1.5	Definition: Häufungspunkt	7
3.1.6	Definition: Innerer Punkt	8
3.1.7	Definition: Äußerer Punkt	8
3.1.8	Definition: Randpunkt	8
3.1.9	Definition: Konvergente Folgen	8
3.1.10	Definition: Beschränkte Folgen	8
3.1.11	Definition: Cauchyfolgen	8
3.1.12	Definition: Vollständiger metrischer Raum	9
3.1.13	Definition: Grenzwerte von Funktionen	9
3.1.14	Definition: Stetigkeit	9
3.1.15	Definition: $\varepsilon - \delta$ -Definition von Stetigkeit	9
3.1.16	Rechenregeln	9
3.1.17	Definition: gleichmäßige Stetigkeit	9
3.1.18	Definition: Offene und abgeschlossene Mengen	9
3.1.19	Definition: Kompakte Menge	10
3.1.20	Der Banachsche Fixpunktsatz in vollständigen metrischen Räumen	10
3.2	Normierte Räume	11
3.2.1	Normierter Raum	11
3.2.2	Definition: Banachraum	11
3.2.3	Beispiele: Funktionenräume	11
3.2.4	Gleichmäßige Konvergenz und Integration	12
3.2.5	Definition: Endlich dimensionale normierte Räume	12
3.2.6	Definition: Äquivalenz von Normen	13
3.3	Stetige, lineare Abbildungen (Operatoren) zwischen normierten Räumen	13
3.3.1	Definition: Lineare Abbildungen	13

3.3.2	Definition: Beschränkte, lineare Abbildungen	13
4	Differentiation	15
4.1	Definition, Beispiele, Rechenregeln	15
4.1.1	Definition: Differenzierbarkeit	15
4.1.2	Definition: Ableitung, Differentiation	15
4.1.3	Rechenregeln	15
4.1.4	Definition: Richtungsableitung	16
4.2	Differentiation von $\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^m$ Funktionen	16
4.2.1	Definition: Partielle Ableitung	16
4.2.2	Darstellung der Ableitung von $\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^m$ Funktionen.	17
4.2.3	Definition: Gradient	17
4.2.4	Kettenregel	18
5	Mittelwertsätze, Höhere Ableitungen, Taylorsche Satz, lokale Extrema	19
5.0.5	Vektorwertiges \mathcal{R} -Integral	19
5.0.6	Definition: Polygonzug	20
5.1	Multilineare Abbildungen & Höhere Ableitungen	20
5.1.1	Höhere partielle Ableitungen von $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$	20
5.1.2	Höhere (totale oder Fréchet) Ableitungen	21
5.1.3	Definition: 2. Ableitung	21
5.1.4	Bilineare Abbildung	21
5.1.5	Multilineare Abbildungen	22
5.2	Taylor Formel	23
5.2.1	Multiindexschreibweisen der Taylorformel	23
5.2.2	Taylorpolynom & Taylorreihe	24
5.2.3	Eindeutigkeit von Taylorpolynom	25
5.2.4	Taylorreihe	25
5.3	Lokale Extrema	25
5.3.1	Definition: Lokale Extrema	25
5.3.2	Definition: Hesse Matrix	25
5.3.3	Kriterien für positiv definite Matrixen	26
5.4	Implizite Funktionen	26
5.4.1	Definition: Implizite Funktion	26
5.4.2	Hauptsatz über Implizite Funktionen	27
5.5	Extrema mit Nebenbedingungen	27
5.5.1	Definition: Extremum mit Nebenbedingungen	27
5.5.2	Praktische Lösung der Extremwertaufgaben	28
5.5.3	Eine hinreichende Bedingung für das Vorliegen von lokales Extrema unter Nebenbedingungen	29
6	Geometrische Begriffe	30
6.1	Kurven	30
6.1.1	Definition: Kurve	30
6.1.2	Definition: Tangentenvektor	30
6.2	Flächen und Tangentialebenen	30
6.2.1	Definition: Fläche	30
6.2.2	Definition: Tangentialebene	30
6.2.3	Definition: Niveaufläche	30
6.2.4	Niveaufläche und Gradient	31
7	Wegintegrale	32
7.1	Rektifizierbare Wege	32
7.1.1	Definition: Weg-Kurve	32
7.1.2	Definition: Rektifizierbarer Weg	32
7.1.3	Definition: Rektifizierbarkeit	32
7.1.4	Äquivalenzrelation zu Wegen	32
7.1.5	Äquivalenzrelation über glatte Wege	34
7.1.6	Definition: Bogenlänge	34

7.2	Wegintegrale von Skalar- & Vektorfeldern	34
7.2.1	Definition: Wegintegrale	34
8	Mehrdimensionale Integrale	35
8.1	Riemansches Integral	35
8.1.1	Definitionen: Zerlegungen	35
8.1.2	Definition: Obersumme, Untersumme	35
8.2	Riemansches Integral auf einem n -dimensionalen Intervall $I \subset \mathbb{R}^n$	36
8.2.1	Definition: Darboux'sches Integral	36
8.3	Iterierte Intervalle, Satz von Fubini	36
8.3.1	Satz von Fubini	36
8.4	Rieman Intervalle und beschränkte Mengen im \mathbb{R}^n	37
8.4.1	Definition: \mathcal{R} -Integrierbar	37
8.4.2	Definition: Nullmenge	37
8.4.3	Definition: J -messbare Menge	38
8.4.4	Definition: Normalbereich	38
8.4.5	Integration über Normalbereiche	38
8.4.6	Substitutionsregel (oder Transformationsformel) für Integrale über \mathbb{R}^n	38
8.4.7	Prinzip von Cavalieri	39
8.5	Uneigentliche Riemansche Integrale	39
8.5.1	Definition: Ausschöpfungsfolge	39
8.5.2	Definition: Uneigentliches Riemansches Integral	40
9	Einige Anwendungen in der Physik	41
9.1	Koordinatentransformationen	41
9.1.1	Kugelkoordinaten	41
9.1.2	Elliptische Koordinaten	41
9.1.3	Zylinderkoordinaten	42
9.1.4	Elliptische Zylinderkoordinaten	42
9.2	Körper mit Massendichte $\rho = 1$	43
9.2.1	Definition: Schwerpunkt	43
9.2.2	Definition: Trägheitsmoment	43

1 Vorwort

1.1 Was dies ist

Hierbei handelt es sich um grobe Aufzeichnungen des Stoffes der im SS 2007 an der FSU Jena von Prof. Bernd Carl im Fach Analysis II gelehrt wurde. Dabei sind Beispiele und Beweise im allgemeinen nicht vorhanden da ich selber nur endlich viel Zeit habe.

1.2 Verbesserungen

Ich werde immer mal dieses Skript verbessern bzw. erweitern. Im Falle von Fehlern, ist mir Bescheid zu sagen das beste was du machen kannst da so alle davon profitieren können. Wissen ist das einzige auf dieser Welt das vom Teilen mehr wird!

Ich bin zu erreichen unter *stilianos.louca@apfel.uni-jena.de*, ohne das *Obst*.

2 Analysis I - Fortsetzung

2.1 Uneigentliche Integrale, Γ -Funktion

2.1.1 Definition: Uneigentliche Integrale

- **Integrationsgrenze ist unendlich**

Sei $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R} : \forall R > a : f \in \mathcal{R}[a, R]$ und $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f dx$ existiert.

Dann heißt das Integral $\int_a^\infty f dx$ konvergent und man setzt

$$\int_a^\infty f dx := \lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f dx$$

Analog definiert man $\int_{-\infty}^a f dx$ für $f : (-\infty, a] \rightarrow \mathbb{R}$.

- **Der Integrand ist an einer Integrationsgrenze nicht definiert**

Sei $f : (a, b] : \forall 0 < \varepsilon < b - a : f \in \mathcal{R}[a + \varepsilon, b]$ und $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f dx$ existiert.

Dann heißt das Integral $\int_a^b f dx$ konvergent und man setzt

$$\int_a^b f dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f dx$$

- **Beide Integrationsgrenzen sind kritisch**

Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} : \forall [\alpha, \beta] \subset (a, b) : f \in \mathcal{R}[\alpha, \beta]$ und sei $\alpha < c < \beta$ beliebig.
Falls:

$$\int_a^c f dx = \lim_{\alpha \rightarrow a} \int_\alpha^c f dx \wedge \int_c^b f dx = \lim_{\beta \rightarrow b} \int_c^\beta f dx$$

konvergent sind, heißt das Integral $\int_a^b f dx$ konvergent und man setzt

$$\int_a^b f dx := \int_a^c f dx + \int_c^b f dx$$

2.1.2 Integralkriterium für Reihen

Satz 4.1 Sei $f : [1, \infty) \rightarrow [0, \infty]$ monoton fallend. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ ist konvergent $\Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x) dx$ konvergent.

2.1.3 Definition: Γ -Funktion

Für $x > 0$ setzt man

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

$\Gamma : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ ist wohldefiniert.

Satz 4.2 Für $\Gamma : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ gelten folgende Eigenschaften:

- $\Gamma(1) = 1$
- $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$
- Γ ist logarithmisch konvex, d.h.

$$\Gamma(\vartheta x + (1-\vartheta)y) \leq [\Gamma(x)]^\vartheta \cdot [\Gamma(y)]^{1-\vartheta}$$

- Insbesondere gilt: $\Gamma(n+1) = n!$

Bemerkung: Erfüllt eine Funktion $F : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ die Eigenschaften (i), (ii) und (iii) vom Satz 4.2, dann ist $F = \Gamma$.

2.1.4 Höldersche Ungleichung

Sind $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt:

$$\int_a^b |f(x)| \cdot |g(x)| \cdot dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p \cdot dx \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |g(x)|^q \cdot dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

3 Analysis II - Metrische und normierte Räume

3.1 Metrische Räume

3.1.1 Definition: Metrik, metrische Räume

Sei $\emptyset \neq X$ eine Menge. Eine Abbildung $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ heißt *Metrik* auf X \Leftrightarrow

- Definitheit: $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- Symmetrie: $\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x)$
- Dreiecksungleichung: $\forall x, y, z \in X : d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Das Paar (X, d) heißt *metrischer Raum*.

Beispiele

- (\mathbb{R}, d) , $d(x, y) := |x - y|$
- (\mathbb{R}^n, d) , $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$
 - Euklidische Metrik : $d(x, y) := \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$
 - Maximum Metrik : $d(x, y) := \max \{|x_i - y_i|, i = 1, \dots, n\}$
 - Summen Metrik oder Manhattan Metrik : $d(x, y) := \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$

3.1.2 Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

$$\forall n \in \mathbb{N} : \forall a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R} : \left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Bemerkung: Für $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt sogar:

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

3.1.3 Minkowski Ungleichung

Für beliebiges $p \in [1, \infty)$ gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \forall a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R} : \left(\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

3.1.4 Definition: Kugel

Sei (X, d) ein metrischer Raum, $a \in X, r \geq 0$. Dann heißt $B_r(a) := \{x \in X : d(x, a) \leq r\}$ *abgeschlossene Kugel* mit Mittelpunkt a und Radius r . Analog heißt $\overset{\circ}{B}_r := \{x \in X : d(x, a) < r\}$ *offene Kugel* mit Mittelpunkt a und Radius r .

3.1.5 Definition: Häufungspunkt

Sei X ein metrischer Raum und $M \subset X$. Ein Punkt $x_0 \in X$ heißt *Häufungspunkt* der Menge M \Leftrightarrow

$$\forall \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x_0) \cap (M \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$$

3.1.6 Definition: Innerer Punkt

Sei X ein metrischer Raum und $M \subset X$. Ein Punkt $x_0 \in M$ heisst *innerer Punkt* der Menge M $:\Leftrightarrow$

$$\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x_0) \subset M$$

Das *Innere* $\text{int}(M)$ einer Menge M ist die Menge der inneren Punkte von M .

3.1.7 Definition: Äußerer Punkt

Sei X ein metrischer Raum und $M \subset X$. Ein Punkt $x_0 \in X \setminus M$ heisst *äußerer Punkt* von M $:\Leftrightarrow$ x_0 ist ein innerer Punkt von $X \setminus M$. Das *Äußere* $\text{ext}(M)$ einer Menge M ist die Menge der äußeren Punkte von M .

3.1.8 Definition: Randpunkt

Sei X ein metrischer Raum und $M \subset X$. Ein Punkt $x_0 \in X$ heisst *Randpunkt* von M $:\Leftrightarrow$ x_0 ist weder innerer noch äußerer Punkt von M , d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 : (M \cap B_\varepsilon(x_0) \neq \emptyset) \wedge (B_\varepsilon(x_0) \cap X \setminus M \neq \emptyset)$$

Der *Rand* ∂M einer Menge M ist die Menge der Randpunkte von M . Aufgrund der Symmetrie der Definition gilt $\partial M = \partial(X \setminus M)$.

3.1.9 Definition: Konvergente Folgen

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_n) \subset X$ heißt *Konvergent* $:\Leftrightarrow$

$$\exists a \in X : \forall \varepsilon > 0 : \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow d(x_n, a) \leq \varepsilon$$

Man sagt die Folge ist konvergent gegen a .

Satz 0.1 : Grenzwert einer Folge

Sei $(x_n) \subset X$ konvergent gegen $a \in X$. Dann ist a eindeutig bestimmt und heißt *Grenzwert* oder *Limes* der Folge (x_n) . Schreibweisen: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $x_n \rightarrow a$.

Satz 0.2 : Teilfolgen

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_n) \subset X$ konvergiert gegen $a \in X$ genau dann wenn: jede Teilfolge $(x_{n_k}) \subset (x_n)$ gegen a konvergiert.

3.1.10 Definition: Beschränkte Folgen

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_n) \subset X$ heißt *beschränkt* $:\Leftrightarrow$

$$\exists a \in X : \exists M \geq 0 : \forall n \in \mathbb{N} : d(x_n, a) \leq M$$

Alle Glieder der Folge (x_n) liegen in einer Kugel $B_M(a)$ mit Radius M .

Satz 0.3: Jede konvergente Folge (x_n) ist beschränkt.

3.1.11 Definition: Cauchyfolgen

Eine Folge $(x_n) \subset X$ heißt *Cauchyfolge* $:\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n, m \in \mathbb{N} : n, m > n_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$$

Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge.

3.1.12 Definition: Vollständiger metrischer Raum

Ein metrischer Raum (X, d) heißt vollständig $:\Leftrightarrow$ Jede Cauchyfolge in X ist konvergent.

3.1.13 Definition: Grenzwerte von Funktionen

Seien $(X, d), (Y, \hat{d})$ metrische Räume und $f : D \subset X \rightarrow Y$ eine Funktion. Dann sei $a \in X$ ein Punkt mit folgender Eigenschaft

$$\exists (x_n) \subset D : \lim x_n = a$$

Eine Funktion $f : D \rightarrow Y$ hat in a den Grenzwert c $:\Leftrightarrow$

$$\forall (x_n) \subset D : \lim x_n = a \Rightarrow \lim f(x_n) = c$$

Schreibweisen: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$

3.1.14 Definition: Stetigkeit

Seien $(X, d), (Y, \hat{d})$ metrische Räume, $f : D \subset X \rightarrow Y$ und $a \in D$. Die Funktion f heißt stetig in a $:\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

f heißt stetig in D $:\Leftrightarrow f$ ist in jedem Punkt von D stetig.

3.1.15 Definition: $\varepsilon - \delta$ -Definition von Stetigkeit

Seien $(X, d), (Y, \hat{d})$ metrische Räume und $f : D \subset X \rightarrow Y$ eine Funktion. f ist stetig in $a \in D$ $:\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta_\varepsilon(a) > 0 : \forall x \in D : d(x, a) \leq \delta_\varepsilon(a) \Rightarrow \hat{d}(f(x), f(a)) \leq \varepsilon$$

bzw.

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta_\varepsilon(a) > 0 : f(B_{\delta_\varepsilon(a)}(a) \cap D) \subset B_\varepsilon(f(a))$$

Beide Definitionen sind äquivalent!

3.1.16 Rechenregeln

- a) Sei (X, d) ein metrischer Raum, $D \subset X$. Sind $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in $a \in X \Rightarrow f + g, f \cdot g, \lambda \cdot f$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) sind auch stetig in a .

Ist $g(a) \neq 0$ so ist auch $\frac{f}{g} : D' := \{x \in D : g(x) \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}$ auch stetig in a

- b) Seien X, Y, Z metrische Räume, $D \subset X, E \subset Y, f : D \rightarrow Y, g : E \rightarrow Z, f(D) \subset E$. Dann gilt: Ist f in $a \in D$ stetig und g in $f(a)$ stetig $\Rightarrow g \circ f \equiv g(f)$ ist in a stetig.

3.1.17 Definition: gleichmäßige Stetigkeit

Eine Funktion $f : D \subset X \rightarrow Y$ heißt gleichmäßig stetig auf D $:\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x, y \in D : d(x, y) \leq \delta_\varepsilon \Rightarrow \hat{d}(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$$

Ist $f : D \subset X \rightarrow Y$ gleichmäßig stetig $\Rightarrow f$ ist auf D stetig. Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht!

3.1.18 Definition: Offene und abgeschlossene Mengen

- Die Menge $O \subset X$ heißt offen $:\Leftrightarrow \forall x \in O : \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset O$
- Die Menge $A \subset X$ heißt abgeschlossen $:\Leftrightarrow X \setminus A$ ist offen.

Satz 0.4 Eine Teilmenge $A \subset X$ ist abgeschlossen $\Leftrightarrow \forall (x_n) \subset A : (x_n)$ konvergent in $X \Rightarrow a := \lim x_n \in A$.

Satz 0.5 Seien X, Y metrische Räume. Dann sind äquivalent

- a) $f : X \rightarrow Y$ ist stetig
- b) $\forall O \subset Y$ offen : $f^{-1}(O)$ ist offen in X
- c) $\forall A \subset Y$ abgeschlossen : $f^{-1}(A)$ ist abgeschlossen in X .

3.1.19 Definition: Kompakte Menge

Sei X ein metrischer Raum. Eine Menge $K \subset X$ heißt kompakt $:\Leftrightarrow$ Jede Folge aus K enthält eine in K konvergente Teilfolge, d.h

$$\forall (x_n) \subset K : \exists (x_{n_k}) \subset (x_n) : \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \in K$$

Satz 0.6 Sei $K \subset X$ kompakt. Dann ist K beschränkt und abgeschlossen.

Bemerkung: Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht! In $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ gilt jedoch auch die Umkehrung.

Satz 0.7 Sind X, Y metrische Räume, $K \subset X$ kompakt und $f : K \rightarrow Y$ stetig, dann gilt

- a) f ist gleichmäßig stetig
- b) $f(K)$ ist kompakt

Satz 0.8 : Maximum und Minimum von reellwertigen Funktionen auf kompakten Mengen

Sei X ein metrischer Raum, $K \subset X$ kompakt und $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:

$$\exists p, q \in K : f(p) = \sup \{f(x) : x \in K\}, \quad f(q) = \inf \{f(x) : x \in K\}$$

Mit anderen Worten, f nimmt auf K ihr Maximum und Minimum an.

3.1.20 Der Banachsche Fixpunktsatz in vollständigen metrischen Räumen

Bemerkung: Eine abgeschlossene Teilmenge A eines vollständigen metrischen Raumes ist ebenfalls ein vollständiger metrischer Raum.

Der Banachsche Fixpunktsatz - Prinzip der kontrahierenden Abbildung: Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $f : X \rightarrow X$ eine *kontrahierende Abbildung*, d.h $\exists 0 \leq \alpha < 1 : \forall x, y \in X : d(f(x), f(y)) \leq \alpha \cdot d(x, y)$. Dann gilt:

- a) $\exists! a \in X : f(a) = a$
- b) Sei $x_0 \in X$ beliebig und $(x_n) \subset X$ eine Folge definiert als $x_{n+1} = f(x_n)$. Dann gilt: $\lim x_n = a, f(a) = a$.
- c) Fehlerabschätzung:

$$d(a, x_n) \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \cdot d(x_1, x_0)$$

3.2 Normierte Räume

3.2.1 Normierter Raum

Sei E ein linearer Raum (Vektorraum) über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} . Eine Funktion $\|\cdot\| : E \rightarrow [0, \infty)$ heißt *Norm* auf E , wenn für beliebige $x, y \in E$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ die folgenden Eigenschaften gelten:

- $\|x\| \geq 0$ und $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- Homogenität: $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
- Dreiecksungleichung: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Das Paar $(E, \|\cdot\|)$ heißt *normierter Raum*.

Bemerkung Durch den Ansatz $d(x, y) := \|x - y\|$ wird auf E eine Metrik erklärt. Damit ist E insbesondere ein metrischer Raum.

Begriffe wie *konvergente Folge*, *Cauchyfolge*, *konvergente Reihe*, *offene-abgeschlossene-kompakte Mengen*, *vollständig normierte Räume* etc. werden mit Hilfe dieser Metrik erklärt.

Beispiele

- $\mathbb{R} := [\mathbb{R}, |\cdot|]$
-

$$[\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p], \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$\|x\|_p := \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} & : 1 \leq p < \infty \\ \max \{ |x_i|, 1 \leq i \leq n \} & : p = \infty \end{cases}$$

3.2.2 Definition: Banachraum

Ein vollständiger, normierter (Vektor)Raum heißt *Banachraum*

3.2.3 Beispiele: Funktionenräume

- Der normierte Raum der beschränkten Funktionen auf eine Menge $\Omega : [B(\Omega), \|\cdot\|_\infty]$

$$B(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ beschränkt}\}, \quad \|f\|_\infty := \sup \{|f(x)| : x \in \Omega\}$$

$B(\Omega)$ ist ein normierter, linearer Raum.

- Der normierte Raum der beschränkten und stetigen Funktionen auf einem metrischen Raum $[X, d] : [C_\beta(X), \|\cdot\|_\infty]$

$$C_\beta(X) := \{f : X \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ beschränkt und stetig}\}, \quad \|f\|_\infty := \sup \{|f(x)| : x \in X\}$$

* Ist X ein kompakter metrischer Raum so gilt $[C(X), \|\cdot\|_\infty] \equiv [C_\beta(X), \|\cdot\|_\infty]$

- Der normierte Raum der \mathcal{R} -Integrierbarer Funktionen : $[\mathcal{R}[a, b], \|\cdot\|_\infty]$

$$\mathcal{R}[a, b] := \{f \in B[a, b] : f \text{ } \mathcal{R}\text{-Integrierbar}\}$$

- $[C[a, b], \|\cdot\|_p], \quad \|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$

- $[C^1, \|\cdot\|_\infty], \quad C^1[a, b] := \{f \in C[a, b] : f \text{ stetig differenzierbar in } (a, b)\}$

Bemerkung: Falls $\Omega = \{1, \dots, n\} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ dann gilt:

- $B(\Omega) \cong \mathbb{R}^n$, $f \leftrightarrow (f(1), \dots, f(n))$, $\|f\|_\infty = \sup \{|f(i)|, i \in \Omega\} = \max \{|f(i)|, i \in \Omega\}$
- Analog: $C(\Omega) \cong \mathbb{R}^n$

Satz 1.1 $[B(\Omega), \|\cdot\|_\infty]$, $[C_\beta(X), \|\cdot\|_\infty]$, $[\mathcal{R}[a, b], \|\cdot\|_\infty]$ sind Banachräume.

Folgerung: $[\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty]$ ist ein Banachraum denn $B(\{1, \dots, n\}) \cong \mathbb{R}^n$.

Bemerkung: $[C[a, b], \|\cdot\|_p]$, $[C^1[a, b], \|\cdot\|_p]$ sind keine Banachräume.

Bemerkung: Die Konvergenz bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ heißt gleichmäßige Konvergenz von Funktionen in $B(\Omega)$, $C_\beta(X)$, $\mathcal{R}[a, b]$:
 $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ bzw. $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon : \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall x \in X \forall n \geq n_\varepsilon : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Beachte den Unterschied zur *Punktweise Konvergenz* von Funktionen: $f_n \xrightarrow{\text{punktweise}} f \Leftrightarrow$

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0 : \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

bzw.

$$\forall x \in X : f_n(x) \rightarrow f(x)$$

Aus gleichmäßiger Konvergenz folgt punktweise Konvergenz. Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht!

3.2.4 Gleichmäßige Konvergenz und Integration

Satz 1.2 Sei $(f_n) \subset \mathcal{R}[a, b]$ gleichmäßig konvergent gegen f , $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$. Dann ist $f \in \mathcal{R}[a, b]$ und es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$$

Bemerkung: Obere Aussage gilt im allgemeinen nicht im Fall von punktweise Konvergenz von Funktionen!

3.2.5 Definition: Endlich dimensionale normierte Räume

Ein Vektorraum E über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} heißt *endlich-dimensional* $:\Leftrightarrow$

$$\exists m \in \mathbb{N} : \exists x_1, \dots, x_m \in E : \forall x \in E : \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K} : x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$$

Man setzt

$$\dim E := \min \left\{ m \in \mathbb{N} \mid \exists x_1, \dots, x_m \in E : \forall x \in E : \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K} : x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right\}$$

Beispiele: \mathbb{R}^n und \mathbb{C}^n sind n -dimensionale Vektorräume.

Satz 1.3 : Satz von Bolzano Weierstras

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt: K ist kompakt in $[\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty] \Leftrightarrow K$ ist abgeschlossen und beschränkt in $[\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty]$.

3.2.6 Definition: Äquivalenz von Normen

Sei E ein Vektorraum und $\|\cdot\|_o$, $\|\cdot\|$ zwei Normen auf E . $\|\cdot\|_o$ und $\|\cdot\|$ heißen äquivalent $:\Leftrightarrow$

$$\exists C_0, C > 0 : \forall x \in E : \|x\|_o \leq C_0 \cdot \|x\| \wedge \|x\| \leq C \cdot \|x\|_o$$

Bemerkung: Äquivalenz von Normen ist eine Äquivalenzrelation! Das heißt es gilt insbesondere Symmetrie, Reflexivität und Transitivität.

Satz 1.4 : Auf einem endlich dimensionalen Vektorraum über \mathbb{R} bzw. \mathbb{C} sind alle Normen äquivalent. Das heißt, ist E ein endlich-dimensionaler Vektorraum über \mathbb{R} bzw. \mathbb{C} und sind $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ Normen auf E , dann

$$\exists c, C > 0 : c \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C \|x\|_1 \quad \forall x \in E$$

Satz 1.5 :

a) Ein endlich dimensionaler normierter Raum über \mathbb{R} oder \mathbb{C} ist ein Banachraum, d.h ein vollständiger, normierter Vektorraum.

b) **Bolzano Weierstrass Eigenschaft**

Sei K eine Menge eines n -dimensionalen normierten Raumes. Dann gilt: K ist kompakt $\Leftrightarrow K$ ist abgeschlossen und beschränkt.

Bemerkung: Es gilt sogar: Sind in einem Banachraum E die beschränkten und abgeschlossenen Mengen kompakt \Rightarrow So ist E endlich dimensional.

3.3 Stetige, lineare Abbildungen (Operatoren) zwischen normierten Räumen

3.3.1 Definition: Lineare Abbildungen

Seien E, F Vektorräume über \mathbb{K} ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C}). Eine Abbildung $A : E \rightarrow F$ heißt *linear* $:\Leftrightarrow$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad \forall x, y \in E : A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$$

3.3.2 Definition: Beschränkte, lineare Abbildungen

Seien E, F normierte Räume. Eine lineare Abbildung $A : E \rightarrow F$ heißt *beschränkt* $:\Leftrightarrow$

$$\exists M \geq 0 : \forall x \in E : \|Ax\|_F \leq M \cdot \|x\|_E$$

Es gilt: Die Menge $\mathcal{L}(E, F) := \{A : E \rightarrow F \mid A \text{ linear und beschränkt}\}$ ist ein Vektorraum.

Durch $\|A\| := \sup \{\|Ax\|_F : \|x\|_E \leq 1\}$ wird auf $\mathcal{L}(E, F)$ eine Norm (*Operatornorm*) erklärt, d.h $[\mathcal{L}(E, F), \|\cdot\|]$ ist ein normierter Raum.

Es gilt außerdem: $\|Ax\|_F \leq \|A\| \cdot \|x\|_E \quad \forall x \in E$ denn $\|Ax\|_F = \left\| A \left(\frac{x}{\|x\|_E} \right) \right\|_F \cdot \|x\|_E \leq \|A\| \cdot \|x\|_E$ da $\left\| \frac{x}{\|x\|_E} \right\|_E = 1$

Komposition von linearen, beschränkten, Operatoren Sind E, F, G normierte Räume und $A \in \mathcal{L}(E, F)$, $B \in \mathcal{L}(F, G)$ lineare Operatoren, dann gilt $BA \equiv B \circ A \in \mathcal{L}(E, G)$ und $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

Satz 1.6: Seien E und F normierte Räume. Dann gilt:

$A : E \rightarrow F$ ist linear und stetig $\Leftrightarrow A$ ist linear und beschränkt, d.h $A \in \mathcal{L}(E, F)$.

Bemerkung: Ist eine lineare Abbildung $A : E \rightarrow F$ stetig in 0, so ist sie stetig $\forall x_0 \in E$ denn:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} Ax = \lim_{x \rightarrow x_0} [A(x - x_0) + Ax_0] = \lim_{x \rightarrow 0} Ax + Ax_0 = \underbrace{A0}_0 + Ax_0 = Ax_0$$

Satz 1.7: Seien E, F normierte Räume, und $\dim E < \infty$. Dann ist jede lineare Abbildung $A : E \rightarrow F$ beschränkt und somit auch stetig.

Satz 1.8: Sei E ein normierter Raum, und F ein Banachraum. Dann ist $[\mathcal{L}(E, F), \|\cdot\|]$ ein Banachraum.

4 Differentiation

4.1 Definition, Beispiele, Rechenregeln

4.1.1 Definition: Differenzierbarkeit

Seien E und F Banachräume und $D^\circ \subset E$ eine offene Menge.

Eine Abbildung $f : D^\circ \rightarrow F$ heißt in $x \in D^\circ$ differenzierbar $:\Leftrightarrow$

$$\exists A \in \mathcal{L}(E, F), \exists r(h), \exists \delta > 0 : \forall h \in E, \|h\| \leq \delta : x+h \in D \wedge f(x+h) = f(x) + A(h) + r(h) \wedge \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$$

Bemerkung: Differentiation von f in $x \in D^\circ$ bedeutet eine Approximation durch eine affine lineare Abbildung $f(x) + A(h)$ mit der Eigenschaft dass

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - A(h)}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$$

Setzt man

$$\hat{r}(h) := \begin{cases} \frac{r(h)}{\|h\|} & : h \neq 0 \\ 0 & : h = 0 \end{cases}$$

so ist \hat{r} in $h = 0$ stetig.

Bemerkung: äquivalent zur Definition der Differentiation von f in $x \in D^\circ$ ist die folgende:

$$\exists A \in \mathcal{L}(E, F) \exists \hat{r} \exists \delta > 0 : \forall \|h\| \leq \delta : x+h \in D^\circ \wedge f(x+h) = f(x) + A(h) + \|h\| \cdot \hat{r}(h) \wedge \lim_{h \rightarrow 0} \hat{r}(h) = 0$$

Satz: Es gilt: $A \in \mathcal{L}(E, F)$ ist eindeutig bestimmt.

4.1.2 Definition: Ableitung, Differentiation

Seien E, F Banachräume und $f : D^\circ \subset E \rightarrow F$, $D^\circ : \text{offen}$, in $x \in D^\circ$ differenzierbar. Dann heißt der eindeutig bestimmte Operator $A \in \mathcal{L}(E, F)$ mit

$$f(x+h) = f(x) + Ah + r(x, h), \quad \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{r(x, h)}{\|h\|}$$

Ableitung (oder Fréchet Ableitung) und Ah Differential der Funktion f im Punkt x .

Schreibweisen: $f'(x) := (Df)(x) := A$, $f'(x)h := (Df)(x)h := Ah$

Bemerkung: Sind E, F Banachräume, $f : D^\circ \subset E \rightarrow F$ in D° differenzierbar, dann ist die Ableitung eine Abbildung $f' : D^\circ \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$. Ferner ist für $E = F = \mathbb{R} : \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$

Satz 1.2: Seien E, F Banachräume und $f : D^\circ \subset E \rightarrow F$, $D^\circ : \text{offen}$, in $x \in D^\circ$ differenzierbar, so ist f in x stetig.

4.1.3 Rechenregeln

- a) Seien E, F Banachräume, $f, g : D^\circ \subset E \rightarrow F$, $D^\circ : \text{offen}$, in x differenzierbar. Dann sind $f+g$ und $\alpha \cdot f$, $\alpha \in \mathbb{R}$ in $x \in D^\circ$ differenzierbar, und es gilt

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x), \quad (\alpha \cdot f)'(x) = \alpha \cdot f'(x)$$

- b) Sei E ein Banachraum und $f, g : D^\circ \subset E \rightarrow \mathbb{R}$, $D^\circ : \text{offen}$, in $x \in D^\circ$ differenzierbar. Dann sind $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ für $g(x) \neq 0$ in x differenzierbar, und es gilt

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x), \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

- c) **Kettenregel:** Seien E, F Banachräume, $f : D^\circ \subset E \rightarrow F$, in $x \in D$ differenzierbar und $g : \hat{D}^\circ \subset F \rightarrow G$, $f(D) \subset \hat{D}^\circ$ in $f(x)$ differenzierbar. Dann ist $g \circ f$ in $x \in D^\circ$ differenzierbar, und es gilt

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \circ f'(x)$$

bzw.

$$(g \circ f)'(x)h = g'(f(x))f'(x)h$$

Bemerkung:

$$f'(x) \in \mathcal{L}(E, F), \quad g'(f(x)) \in \mathcal{L}(F, G), \quad g'(f(x)) \circ f'(x) \in \mathcal{L}(E, G)$$

4.1.4 Definition: Richtungsableitung

Seien E, F Banachräume und $0 \neq h \in E$. Existiert für eine Funktion $f : D^\circ \subset E \rightarrow F$ im Punkt $x \in D^\circ$ der Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow 0, t \in \mathbb{R}} \frac{f(x + th) - f(x)}{t}$$

so heißt

$$\frac{\partial f}{\partial h}(x) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t}$$

Richtungsableitung von f im Punkt x in Richtung h .

Bemerkung: In der Literatur wird oft gefordert dass $\|h\| = 1$.

Satz 1.3: Seien E, F Banachräume und $f : D^\circ \subset E \rightarrow F$ in $x \in D^\circ$ differenzierbar. Dann existiert die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial h}(x)$ für jede Richtung $h \neq 0$ und es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial h}(x) = f'(x)h$$

denn

$$\frac{\partial f}{\partial h}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f'(x)th + r(th)}{t} = f'(x)h + \underbrace{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{r(th)}{\|th\|} \cdot \|h\|}_0 = f'(x)h$$

Bemerkung: Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht!

Die Richtungsableitung ist also das Differential in Richtung h und liegt somit in F .

Schreibweisen:

$$\frac{\partial f}{\partial h}(x), \quad \left. \frac{\partial f(x + th)}{\partial t} \right|_{t=0}, \quad (D_h f)(x)$$

4.2 Differentiation von \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^m Funktionen

4.2.1 Definition: Partielle Ableitung

Sei $f : D^\circ \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine reellwertige Funktion. Existiert im Punkt $x = (x_1, \dots, x_n) \in D^\circ$ die Richtungsableitung

$$\frac{\partial f}{\partial e_i}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + te_i) - f(x)}{t}, \quad e_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 0)$$

so heißt

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) := \frac{\partial f}{\partial e_i}(x)$$

partielle Ableitung von f nach der i -ten Koordinate im Punkt x . Anders:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i + t, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{t}$$

Bemerkung: Die partiellen Ableitungen einer Funktion $f : D^\circ \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ kann man als gewöhnliche Ableitungen von Funktionen eine Variablen interpretieren, indem man nach der i -ten Koordinaten differenziert und die übrigen als konstant betrachtet.

4.2.2 Darstellung der Ableitung von $\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^m$ Funktionen.

Satz 2.1: Sei $f := \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_m \end{pmatrix} : D^\circ \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f_i : D^\circ \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt $x \in D^\circ$ differenzierbar.

Dann gilt für die Ableitung von f die Matrixdarstellung:

$$f'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

Bemerkung: Die Existenz der partiellen Ableitungen von $f : D^\circ \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ reicht im allgemeinen nicht für die differenzierbarkeit von f aus.

Satz 2.2: Sei $f := \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_m \end{pmatrix} : D^\circ \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f_i : D^\circ \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass die partiellen Ableitungen

$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ in D° existieren und im Punkt $x \in D^\circ$ stetig sind. Dann ist f in x differenzierbar und es gilt die Formel von Satz 2.1:

$$f'(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right)_{i=1\dots m, j=1\dots n}$$

Bemerkung: f_i sind alle jeweils differenzierbar $\Leftrightarrow f$ ist differenzierbar.

4.2.3 Definition: Gradient

Sei $f : D^\circ \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ so dass die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$, $i = 1, \dots, n$ in $x \in D^\circ$ existieren. Dann heißt

$$\text{grad } f(x) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$$

Gradient von f an Stelle $x \in D^\circ$.

Bemerkung:

- f muss nicht notwendigerweise in $x \in D^\circ$ differenzierbar sein.
- Ist f in x differenzierbar, so gilt $f'(x) = \text{grad } f(x)$. Für die Richtungsableitung in Richtung $h = (h_1, \dots, h_n)$ gilt dann

$$\frac{\partial f}{\partial h}(x) = f'(x)h = (\text{grad } f(x))h = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot h_i$$

Die Richtungsableitung ist also das Standardskalarprodukt zwischen Ableitung und Richtungsvektor.

Satz 2.3: Sei $f : D^\circ \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ in $x \in D^\circ$ differenzierbar. Ist $\text{grad } f(x) = 0$ so verschwinden alle Richtungsableitungen $\frac{\partial f}{\partial h}(x)$ in x . Ist $\text{grad } f(x) \neq 0$ so gibt es unter allen Richtungsableitungen mit $\|h\| = 1$ eine größte, nämlich die Richtung des Gradienten mit

$$\frac{\partial f}{\partial h}(x) = \|\text{grad } f(x)\|_2$$

4.2.4 Kettenregel

Seien $u = (u_1, \dots, u_m) : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g : M \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $u(D) \subset M$, $f = g \circ u$ in $x \in D$ bzw. $u(x) \in M$ differenzierbar. Also:

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) \equiv g(u_1(x), \dots, u_m(x)) = g(u_1(x_1, \dots, x_n), \dots, u_m(x_1, \dots, x_n))$$

Dann gilt die **Kettenregel**

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial u_i}(u_i(x)) \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_k}(x)$$

Spezialfall: $u = u(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m \rightarrow f = f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\dot{f} = \frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial u_i} \cdot \frac{du_i}{dt} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial u_i} \cdot \dot{u}$$

5 Mittelwertsätze, Höhere Ableitungen, Taylorsche Satz, lokale Extrema

Satz 3.1 (Mittelwertsätze für reellwertige Funktionen) Sei $f : D^\circ \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und auf D° differenzierbar. $x, x+h$ seien zwei Punkte aus D° und $x+th \in D^\circ \forall 0 \leq t \leq 1$. Dann existiert ein $\vartheta \in (0,1)$ mit

$$f(x+h) - f(x) = f'(x+\vartheta h)h$$

Bemerkung: In der Version gilt der MWS für vektorwertige Funktionen nicht mehr! Beispiel:

$$f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, f(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \rightarrow \neg \exists 0 < \vartheta < 1 : f(2\pi) - f(0) = f'(\vartheta 2\pi)2\pi$$

5.0.5 Vektorwertiges \mathcal{R} -Integral

Sei $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \dots \\ f_m \end{pmatrix} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$, wobei $f_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$ \mathcal{R} -Integrierbar sind. Dann heißt

$$\int_a^b f(t)dt := \begin{pmatrix} \int_a^b f_1(t)dt \\ \dots \\ \int_a^b f_m(t)dt \end{pmatrix}$$

das \mathcal{R} -Integral von f über $[a, b]$.

Bemerkung: f ist z.B \mathcal{R} -Integrierbar wenn f stetig ist. Analog definiert man für $A : [a, b] \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ das \mathcal{R} -Integral als

$$\int_a^b A(t)dt := \left(\int_a^b a_{ij}(t)dt \right)_{i=1, \dots, m, j=1, \dots, n}$$

Ferner:

$$\int_a^b A(t)h dt = \left[\int_a^b A(t)dt \right] h$$

Hilfssatz (Δ -Ungleichung) Für jede stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ gilt

$$\left\| \int_a^b f(t)dt \right\|_2 \leq \int_a^b \|f(t)\|_2 dt$$

Bemerkung: Diese Ungleichung gilt auch für beliebige Normen $\|\cdot\|$ auf \mathbb{R}^n .

Veranschaulichung des Hilfssatzes: Stellt man sich unter $f(t)$ die Geschwindigkeit eines Massenpunkts vor, so ist

$$s = \int_a^b \|f(t)\|_2 dt$$

der gesamte zurückgelegte Weg, und

$$\|\Delta \vec{r}\|_2 = \left\| \int_a^b f(t)dt \right\|_2$$

einfach der Abstand zwischen End- und Anfangspunkt. Letzterer ist offensichtlich kleiner als der erste.

Satz 3.2 - MWS für vektorwertige Funktionen Sei $f : D^\circ \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar, und $x, x+h \in D^\circ$ und $\forall 0 \leq t \leq 1 : x+th \in D^\circ$. Dann gilt:

$$f(x+th) - f(x) = \int_0^1 f'(x+th)h dt$$

Veranschaulichung: Durch die Substitution $\vec{u} := x + th$ ergibt sich

$$f(x+h) - f(x) = \int_x^{x+h} f'(\vec{u}) d\vec{u} \cong \int_{f(x)}^{f(x+h)} df$$

Ferner gilt:

$$\|f(x+th) - f(x)\|_2 \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \underbrace{\|f'(x+th)\|}_{\text{Operatornorm}} \cdot \|h\|_2$$

5.0.6 Definition: Polygonzug

a) Sei E ein normierter Raum und $x_0, x_1, \dots, x_n \in E$. Dann heißt

$$P := \bigcup_{i=1}^n \{(1-\vartheta)x_{i-1} + \vartheta x_i : 0 \leq \vartheta \leq 1\}$$

Polygonzug durch die Punkte x_0, x_1, \dots, x_n .

b) $D \in E$ heißt *Polygonzugzusammenhängend* $:\Leftrightarrow \forall x, y \in D : \exists$ ein Polygonzug $P \subset D$ durch x_0, x_1, \dots, x_n mit $x_0 = x$ und $x_n = y$.

Satz 3.3: Sei $f : D^\circ \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar, D° polygonzugzusammenhängend, und $f' = 0$ auf D° . Dann ist $f = \text{const}$ auf D° .

Bemerkung: Man nennt eine Menge D Gebiet $:\Leftrightarrow D$ ist offen und polygonzugzusammenhängend.

5.1 Multilineare Abbildungen & Höhere Ableitungen

5.1.1 Höhere partielle Ableitungen von $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Notationen: Sei $f : D^\circ \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine partiell differenzierbare Funktion. Sind die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n : D^\circ \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ selbst wieder differenzierbar, so heißt f zweimal partiell differenzierbar. Man kann die partiellen Ableitungen 2er Ordnung bilden:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) (a)$$

für $a \in D^\circ$.

Weitere Schreibweisen:

$$(\partial_i (\partial_j f))(a) = (\partial_i \partial_j f)(a)$$

Für $i = j$ schreibt man

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(a)$$

Allgemeiner definiert man durch Induktion: $f : D^\circ \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt $(k+1)$ -mal partiell differenzierbar wenn sie k -mal differenzierbar ist und alle Ableitungen k -ter Ordnung $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}} : D^\circ \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar sind. Eine Funktion $f : D^\circ \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt k -mal stetig partiell differenzierbar wenn sie k -mal partiell differenzierbar ist und alle partiellen Ableitungen der Ordnung $\leq k$ stetig sind.

5.1.2 Höhere (totale oder Fréchet) Ableitungen

5.1.3 Definition: 2. Ableitung

Seien E, F Banachräume und $f : D^\circ \subset E \rightarrow F$ in D° differenzierbar, d.h. $f'(x) \in \mathcal{L}(E, F)$ existiert für jedes $x \in D^\circ$. Ist $f' : D^\circ \subset E \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$ in $a \in D^\circ$ differenzierbar, so heißt f in a *zweimal differenzierbar*. Es ist $(f')'(a) \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F))$ und definieren die zweite Ableitung von f in a durch:

$$f''(a)(k, h) := ((f')'(a)k)h \quad \text{für } k, h \in E$$

Somit ist

$$f'' : D^\circ \subset E \rightarrow \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F))$$

Beispiele:

a)

$$f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m, f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}, f_i : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \begin{pmatrix} f'_1(x) \\ f'_2(x) \\ \vdots \\ f'_m(x) \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m), f'(x)h \in \mathbb{R}^m, f' : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) \cong \mathbb{R}^m$$

$$f'' : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m, f'' = \begin{pmatrix} f''_1(x) \\ \vdots \\ f''_m(x) \end{pmatrix}, f''(x)(k, h) = \begin{pmatrix} f''_1(x)kh \\ \vdots \\ f''_m(x)kh \end{pmatrix}$$

b)

$$f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = f(x_1, \dots, x_n), f'(x) = \text{grad } f(x) = (\partial_1(x), \dots, \partial_n(x)) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

$$f'(x)h = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)h_i \in \mathbb{R}$$

$$(f'(a+k) - f'(a))h = \sum_{i=1}^n [\partial_i f(a+k) - \partial_i f(a)]h_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)k_j + r(k) \right) h_i$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)k_j h_i \right) + \sum_{i=1}^n r(k)h_i$$

$$\Rightarrow f''(k, h) = ((f')'(a)k)h = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)k_j h_i$$

$$(f')'(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})), (f')' : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})) \cong \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$$

5.1.4 Bilineare Abbildung

Seien E, F, G Banachräume und $A \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(F, G))$. Durch $B(x, y) := (Ax)y \in G$ für $x \in E, y \in F$ wird eine stetige bilineare Abbildung $B : E \times F \rightarrow G$ erklärt, wobei eine Norm auf $E \times F$ durch $\|(x, y)\| := \max\{\|x\|, \|y\|\}$ gegeben ist und $E \times F$ zum Banachraum wird.

Bemerkung: B heißt bilinear, wenn B in jeder Komponente eine lineare Abbildung ist, d.h. $B(\cdot, b) : E \rightarrow G$ und $B(a, \cdot) : F \rightarrow G$ sind lineare Abbildungen $\forall a \in E, b \in F$.

Ferner gilt:

$$\|B\| := \sup\{\|B(x, y)\| : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\} = \sup_{\|x\| \leq 1} \sup_{\|y\| \leq 1} \|(Ax)y\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|_{\mathcal{L}(F, G)} = \|A\|_{\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(F, G))}$$

Beschränktheit: Eine bilineare Abbildung $B : E \times F \rightarrow G$ heißt beschränkt, falls $\|B\| < \infty$. Dann wird die Menge $\mathcal{L}(E \times F, G) := \{B : E \times F \rightarrow G : B \text{ beschränkt und bilinear}\}$ und $\|B\|$ zu einem Banachraum. Es gilt B ist beschränkt $\Leftrightarrow B$ ist stetig $\Leftrightarrow \exists M \geq 0 \forall (x, y) \in E \times F : \|B(x, y)\| \leq M \cdot \|x\| \cdot \|y\|$

Isometrie: Durch $\varphi(A)(k, h) := (Ak)h$ wird eine lineare Isometrie von $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(F, G))$ auf $\mathcal{L}(E \times F, G)$ definiert, d.h. φ ist linear und es gilt

$$\|\varphi(A)\| = \|A\|$$

Damit ist die 2e Ableitung eine stetige bilineare Abbildung, mit

$$f''(a) \in \mathcal{L}(E \times E, F) \cong \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F)), \quad f''(a)(k, h) = (f')'(a)kh$$

5.1.5 Multilineare Abbildungen

Analog wird eine k -Lineare Abbildung $T : E_1 \times \dots \times E_k \rightarrow F$ als eine in jede Komponente lineare Abbildung definiert. Sie ist stetig falls $\|T\| := \sup\{\|T(x_1, \dots, x_k)\| : \|x_1\|, \dots, \|x_k\| \leq 1\} < \infty$.

$$\mathcal{L}(E_1 \times \dots \times E_k, F) := \{T : E_1 \times \dots \times E_k \rightarrow F : T \text{ stetig } k\text{-linear}\}$$

Seien E, F Banachräume und $D^\circ \subset E$. Für $k \in \mathbb{N}$ wird rekursiv $C^k(D^\circ, F) := \{f \in C^1(D^\circ, F) : f' \in C^{k-1}(D^\circ, F)\}$ wobei $C^1(D^\circ, F) := \{f : D^\circ \rightarrow F, f \text{ stetig differenzierbar in } D^\circ\}$. Ähnlich wie im Fall $k = 2$ wird für $C^k(D^\circ, F)$ die k -te Ableitung $f^{(k)}(a) \in \mathcal{L}(E^k, F), E^k := E \times \dots \times E$ als stetige k -lineare Abbildung $f^{(k)}(a) : E^k \rightarrow F$ erklärt, die durch $f^{(k)}(a)(h_1, \dots, h_k) := (f^{(k-1)})'(a)(h_1)(h_2, \dots, h_k)$ definiert ist, wobei $(f^{(k-1)})'(a) \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E^{k-1}, F))$.

Satz 3.2 : Schwarz : Seien $E = \mathbb{R}^n, F = \mathbb{R}^m, D^\circ \subset E$ und $f \in C^1(D^\circ, \mathbb{R}^m)$ so dass f' in $a \in D^\circ$ differenzierbar ist. Dann gilt:

$$f''(a)(k, h) = f''(a)(h, k) \quad \forall k, h \in \mathbb{R}^n$$

Sei $f : D^\circ \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar und existieren sämtliche partielle Ableitungen 2er Ordnung und sind diese Ableitungen stetig in $a \in D^\circ$, so gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a), \quad i, j = 1, \dots, n$$

Bemerkung: Der Satz von Schwarz ist ohne die stetige Bedingung von $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ in $a \in D^\circ$ i.a. nicht richtig.

Folgerung: Ist $f \in C^k(D^\circ \subset \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, so gilt

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_{\pi(1)}} \dots \partial x_{i_{\pi(k)}}}$$

für jede Permutation π .

5.2 Taylor Formel

Die Taylor-Formel für reelle Funktionen $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit Lagrange-Restglied lautet:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k + \frac{f^{(k+1)}(a+\vartheta h)}{(k+1)!}h^{k+1}$$

für ein $0 \leq \vartheta \leq 1$, oder Integralrestglied

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k + \underbrace{\frac{1}{k!} \cdot \int_0^1 (1-t)^k f^{(k+1)}(a+th)h^{k+1} dt}_{(\mathcal{R}_k^a f)(h)}$$

Motiviert durch die Taylorformel für reelle Funktionen entwickeln wir eine Taylor-Formel für $\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^m$ Funktionen.

Sei $f \in C^k(D^\circ \subset E, F)$ wobei E, F Banachräume sind. Dann ist die k -te Ableitung $f^{(k)}(a) \in \mathcal{L}(E^k, F)$ eine k -lineare Abbildung und aus dem Satz von Schwarz ergibt sich induktiv auch die Symmetrie von $f^{(k)}(a)$, d.h die k -lineare Abbildung ist gegen Permutationen π ihrer Argumente invariant, d.h

$$f^{(k)}(a)(h_1, \dots, h_k) = f^{(k)}(a)(h_{\pi(1)} \dots h_{\pi(k)})$$

Für $T \in \mathcal{L}(E^k, F)$ wird die folgende Notation benutzt:

$$T(h^k) := T(h, \dots, h), \quad h \in E$$

Satz 3.5: Satz von Taylor: Sei $D^\circ \subset \mathbb{R}^n$ und $[a, a+h] := \{a+th : 0 \leq t \leq 1\} \subset D^\circ$. Für $f \in C^{k+1}(D^\circ, \mathbb{R}^m)$ gilt dann die Taylor-Formel

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}(h^2) + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(h^k) + \frac{1}{k!} \cdot \int_0^1 (1-t)^k f^{(k+1)}(a+th)(h^{k+1})dt$$

Zur Ordnung von Funktionen: Seien E, F Banachräume, $r : D \subset E \rightarrow F$ eine Funktion mit der Eigenschaft

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|r(h)\|_F}{\|h\|_E^K} = 0 \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|_E^K} = 0 \quad (K \in \mathbb{N})$$

so sagt man $r(h)$ geht von höherer Ordnung als $\|h\|^K$ gegen 0.

Schreibweise: $r(h) = o(\|h\|^K)$ Klein o von $\|h\|^K$.

Folgerung 3.5a: Sei $D^\circ \subset \mathbb{R}^n$ und $f \in C^K(D^\circ, \mathbb{R}^m)$. Dann gilt für ein $a \in D^\circ$ mit $[a, a+h] \subset D^\circ$ die qualitative Version der Taylorformel.

$$f(a+h) = \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} f^{(j)}(a)(h^j) + o(\|h\|^k)$$

5.2.1 Multiindexschreibweisen der Taylorformel

Unter einem *Multiindex* versteht man einen Vektor $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$. Seine *Ordnung* wird definiert als $|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i$. Ferner setzt man $\alpha! := \prod_{i=1}^n \alpha_i!$ und $\binom{|\alpha|}{\alpha} := \frac{|\alpha|!}{\alpha!}$ als den so genannten *Polynomialkoeffizienten*. Für $x =$

$(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ sei $x^\alpha := \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$.

Sei $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ein Multiindex und A eine Menge von $|\alpha|$ Elementen: $\text{card } A = |\alpha|$. Dann existieren $\binom{|\alpha|}{\alpha}$ verschiedene Abbildungen die genau α_j Elemente von A auf j Abbilden, $j = 1, 2, \dots, n$. Für $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und $p \in \mathbb{N}$ gilt die so genannte Polynomialformel

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^p = \sum_{|\alpha|=p} \binom{p}{\alpha} \cdot x^\alpha$$

Bemerkung: Für $n = 2$ ist dies die Binomialformel.

Diese Formel ist eine Motivation für eine weitere Schreibweise der Taylorformel. Für $f \in C^\alpha(D \subset \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ schreiben wir die partiellen Ableitungen in der Form

$$\partial^\alpha f = \partial^{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} f := \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \dots \partial_n^{\alpha_n} f = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

Nach dem Satz von Schwarz kommt es dabei auf die Reihenfolge der Differentiation nicht an!

Sei $f \in C^k(D^\circ \subset \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Die Koordinaten der k -ten Ableitung bzgl. der kanonischen Basis des Raumes $\mathcal{L}((\mathbb{R}^n)^k, \mathbb{R}^m)$ der k -linearen Abbildungen sind die k -ten partiellen Ableitungen, d.h für Vektoren $h^{(j)} = (h_1^{(j)}, \dots, h_n^{(j)}) \in \mathbb{R}^n$:

$$f^{(k)}(a)(h^1, h^2, \dots, h^k) = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_k=1}^n \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(a) h_{i_1}^{(1)} \dots h_{i_k}^{(k)}$$

Insbesondere gilt:

$$f^{(k)}(a)(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}, \quad e_{i_j} \in \mathbb{R}^n$$

Sind alle Argumente gleich, d.h $h^{(1)} = h^{(2)} \dots = h^{(k)} = h = (h_1, \dots, h_n)$, so kann man wegen der Symmetrie der k -linearen Abbildung $f^{(k)}(a)$ einige dieser n^k Summanden zusammenfassen:

$$\partial^\alpha f(a) h^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n} f(a) h^\alpha$$

Damit ergibt sich

$$f^{(k)}(a)(h^k) = \sum_{|\alpha|=k} \binom{k}{\alpha} \partial^\alpha f(a) h^\alpha, \quad \binom{k}{\alpha} = \frac{k!}{\alpha!}$$

bzw.

$$\frac{1}{k!} f^{(k)}(h^k) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(a) h^\alpha = \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} \cdot \frac{\partial^k}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} f(a) h_1^{\alpha_1} \dots h_n^{\alpha_n}$$

Die Taylor-Formel von Satz 3.5 kann dann wie folgt geschrieben werden:

$$f(a+h) = \sum_{|\alpha|=0}^k \frac{1}{\alpha!} \cdot \partial^\alpha f(a) h^\alpha + (k+1) \cdot \int_0^1 (1-t)^k \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{1}{\alpha!} \cdot \partial^\alpha f(a+th) h^\alpha dt$$

5.2.2 Taylorpolynom & Taylorreihe

Für $f \in C^k(D^\circ \subset \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ heißt

$$(T_k^a f)(h) = \sum_{j=1}^k \frac{1}{j!} f^{(j)}(a)(h^j) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\alpha!} \cdot \partial^\alpha f(a) h^\alpha \cong \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} \left(\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^j f(a)$$

das *Taylorpolynom* (in h) zu f vom Grad k in $a \in D$. Damit lautet die qualitative Version der Taylorformel:

$$f(a+h) = (T_k^a f)(h) + o(\|h\|^k)$$

Die Differenz $(\mathcal{R}_k^a f)(h) := f(a+h) - (T_k^a f)(h)$ heißt das k -te *Restglied*. Das Taylorpolynom ist dasjenige, eindeutig bestimmte Polynom vom Grad k das an der Stelle a mit $f(a)$ und allen Ableitungen $f^{(j)}(a)$, $j = 1, \dots, k$ übereinstimmt! Es gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - (T_k^a f)(h)}{\|h\|^k} = 0$$

Für $m = 1$ ergibt sich das Lagrange Restglied als

$$(\mathcal{R}_k^a f)(h) = \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(a + \vartheta h)(h^{k+1}) = \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(a + \vartheta h) h^\alpha, \quad \vartheta \in [0, 1]$$

5.2.3 Eindeutigkeit von Taylorpolynom

Ist $f \in C^k(D^\circ \subset \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und P ein Polynom von Grad k mit der Eigenschaft $f(a+h) = P(h) + o(\|h\|^k)$, dann ist $P(h) = (T_k^a f)(h)$.

5.2.4 Taylorreihe

Sei $f \in C^\infty(D^\circ \subset \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) := \bigcap_{k=1}^\infty C^k(D, \mathbb{R}^m)$. Dann heißt

$$(T_k^a f)(h) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (h^k) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \frac{\partial^\alpha f}{\alpha!}(a) h^\alpha$$

die *Taylorreihe* von f in $a \in D$. Es gilt

$$f(a+h) = \lim_{k \rightarrow \infty} (T_k^a f)(h) \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} (\mathcal{R}_k^a f)(h) = 0$$

5.3 Lokale Extrema

5.3.1 Definition: Lokale Extrema

- Sei $D^\circ \subset X$ eine offene Menge eines metrischen Raumes X . Eine reelwertige Funktion $f : D^\circ \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt in $a \in D^\circ$ ein *lokales Maximum* bzw. *Minimum*, falls es eine ε -Kugel $B_\varepsilon(a) \subset D^\circ$, $\varepsilon > 0$ gibt und $\forall x \in B_\varepsilon(a) : f(x) \leq f(a)$ bzw. $f(x) \geq f(a)$. Es liegt ein *isoliertes* lokales Maximum bzw. Minimum vor falls $f(x) \neq f(a)$ für $x \neq a$ gilt.
- Eine reelwertige Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ auf eine Menge X besitzt in $a \in X$ ein *globales* (absolutes) Maximum bzw. Minimum falls $\forall x \in X : f(x) \leq f(a)$ bzw. $f(x) \geq f(a)$. Es liegt in $a \in D^\circ$ ein isoliertes globales Maximum bzw. Minimum vor falls $f(x) \neq f(a) \forall x \neq a$ gilt.
- Ein *Extremum* ist ein (lokales) Maximum bzw. Minimum.

Satz 3.7: Notwendige Bedingung für ein lokales Extremum. Sei $f : D^\circ \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine partiell differenzierbare Funktion. Dann gilt: Besitzt f in $a \in D^\circ$ ein lokales Extremum, dann ist $\nabla f(a) = 0$, d.h

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

5.3.2 Definition: Hesse Matrix

Sei $D^\circ \subset \mathbb{R}^n$ und $f \in C^2(D^\circ, \mathbb{R})$. Die *Hesse Matrix* von f im Punkt $a \in D^\circ$ ist durch

$$H_f(a) := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1}^n$$

definiert. Nach dem Satz von Schwarz ist $H_f(a)$ eine symmetrische Matrix.

Satz 3.8: Definitheit der Hesse-Matrix Sei $f \in C^2(D^\circ \subset \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ mit $\nabla f(a) = 0$. Dann gilt:

- Ist $f''(a) = H_f(a)$ positiv (negativ) definit, so hat f in $a \in D^\circ$ ein isoliertes lokales Minimum bzw. Maximum.
- Ist $f''(a) = H_f(a)$ indefinit, so besitzt f in $a \in D^\circ$ **kein** lokales Extremum.
- Ist $f''(a)$ semidefinit, so kann im allgemeinen keine Aussage gemacht werden.

Bemerkung: Eine symmetrische Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ heißt *positiv definit*

$$:\Leftrightarrow \forall h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \langle Ah, h \rangle > 0$$

und *negativ definit* $:\Leftrightarrow -A$ ist positiv definit. Dabei ist $\langle \rangle$ das *Standardskalarprodukt*.
 A heißt *positiv semidefinit* falls

$$\forall h \in \mathbb{R}^n : \langle Ah, h \rangle \geq 0$$

und *negativ semidefinit* falls $-A$ positiv semidefinit ist.

A heißt *indefinit*

$$:\Leftrightarrow \exists h, k \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \langle Ah, h \rangle > 0 \wedge \langle Ak, k \rangle < 0$$

Ferner: Aufgrund der Definition der Hesse-Matrix $H_f(a) = f''(a)$ kann die Taylorformel wie folgt geschrieben werden:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2} \langle H_f(a)h, h \rangle + o(\|h\|^2)$$

5.3.3 Kriterien für positiv definite Matrizen

Eine symmetrische Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ ist positiv definit $\Leftrightarrow \exists a > 0 : \forall h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \langle Ah, h \rangle > a \|h\|_2^2 \Leftrightarrow$ alle Eigenwerte sind positiv \Leftrightarrow

$$\forall k = 1, \dots, n : \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix} > 0$$

Satz 3.8 Sei $f \in C^2(D^\circ \subset \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und $\nabla f(a) = 0$. Dann gilt:

- Ist $f''(a) = H_f(a)$ positiv bzw. negativ definit, so hat f in $a \in D^\circ$ ein isoliertes lokales Minimum bzw. Maximum.
- Ist $f''(a)$ indefinit, so besitzt f in $a \in D^\circ$ kein lokales Extremum.

5.4 Implizite Funktionen

5.4.1 Definition: Implizite Funktion

Eine Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ wird implizit genannt wenn sie durch eine Gleichung der Form

$$F(x, y) = 0$$

gegeben ist, d.h

$$F(x, f(x)) = 0 \quad \forall x \in D$$

Problem: Unter welchen Bedingungen an F wird durch $F(x, y) = 0$ eine Funktion $y = f(x)$ definiert?
 Oder: Unter welchen Bedingungen an F ist die Gleichung $F(x, y) = 0$ eindeutig nach y auflösbar? In Komponenten zerlegt bedeutet dies, das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) &= 0 \\ \dots \\ F_m(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) &= 0 \end{aligned}$$

wobei $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix}$, $\vec{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ \dots \\ F_m \end{pmatrix}$

auf D nach \vec{y} aufzulösen, also reelwertige Funktionen $f_1, \dots, f_m : D \rightarrow \mathbb{R}$ zu bestimmen so dass gilt

$$F_j(x_1, \dots, x_n, f_1(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x})) = 0, \quad j = 1, \dots, m$$

Notationen:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m, \vec{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ \dots \\ F_m \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \\ y_1 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix}, F : K \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, F_i : K \rightarrow \mathbb{R}$$

$$F(x, y) = F(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = \begin{pmatrix} F_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \\ \dots \\ F_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \end{pmatrix}$$

5.4.2 Hauptsatz über Implizite Funktionen

Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ und $G \subset \mathbb{R}^m$ nicht-leere offene Mengen und die Funktion $F : D \times G \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ sei stetig differenzierbar. Ferner seien $\xi \in D$ und $\eta \in G$ Punkte für die $F(\xi, \eta) = 0$ und die Ableitung $\frac{\partial F}{\partial y}(\xi, \eta)$ invertierbar ist. Dann gilt:

- Es existiert eine offene δ -Kugel $B_\delta^\circ(\xi) \subset D$ und eine offene ε -Kugel $B_\varepsilon^\circ(\eta) \subset G$ und genau eine stetige Funktion $f : B_\delta^\circ(\xi) \rightarrow B_\varepsilon^\circ(\eta)$ mit $f(\xi) = \eta$ und $F(x, f(x)) = 0 \forall x \in B_\delta^\circ(\xi)$. Für alle $x \in B_\delta^\circ(\xi)$ ist $y = f(x)$ die einzige in $B_\varepsilon^\circ(\eta)$ liegende Lösung der Gleichung $F(x, y) = 0$.
- Es existiert eine weitere offene δ -Kugel $B_{\delta_1}^\circ(\xi)$, $\delta_1 \leq \delta$ und die Funktion $f : B_{\delta_1}^\circ(\xi) \rightarrow B_\varepsilon^\circ(\eta)$ ist stetig differenzierbar, und es gilt die Formel

$$f'(x) = - \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \right) \cdot \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))$$

Bemerkung: Ist F k -mal stetig differenzierbar dann ist f in $B_{\delta_1}^\circ(\xi)$ auch k -mal stetig differenzierbar.

Satz 4.2: Umkehrsatz Sei $f : D^\circ \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und in $\xi \in D^\circ$ sei $f'(\xi)$ invertierbar. Dann existiert eine offene Umgebung $U \subset D^\circ$ um $\xi \in D^\circ$ und eine ε -Kugel $B_\varepsilon^\circ(\eta)$ von $\eta := f(\xi)$ so dass $f|_U : U \rightarrow B_\varepsilon^\circ(\eta)$ bijektiv die Umgebung U auf $B_\varepsilon^\circ(\eta)$ abbildet. Die Umkehrung $f^{-1}|_U$ von $f|_U$ ist stetig differenzierbar und für die Ableitung gilt

$$(f^{-1}|_U)'(y) = f'(x)^{-1} \text{ mit } y = f(x), x \in U$$

Bemerkungen:

- Sei $f : U \rightarrow V$ eine bijektive Abbildung der offenen Mengen U und $V \subset \mathbb{R}$. Sind f und f^{-1} stetig differenzierbar, so heißt f ein *Diffeomorphismus*. In dieser Terminologie besagt der Umkehrsatz dass $f|_U$ bei hinreichend kleinem U ein Diffeomorphismus ist.
- Der Umkehrsatz ist eine *lokale* Aussage, d.h existiert für eine stetig differenzierbare Funktion $f : D^\circ \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f'(x)^{-1} \forall x \in D$ so existiert nicht unbedingt die *globale* Inverse f^{-1} auf ganz D .

5.5 Extrema mit Nebenbedingungen

5.5.1 Definition: Extremum mit Nebenbedingungen

Seien $f : X^\circ \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, g : X^\circ \rightarrow \mathbb{R}^m, m < n$. f besitzt in $\xi \in X$ ein lokales Maximum bzw. Minimum unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$ (Nebenbedingungsmenge : $N := \{x \in X : g(x) = 0\}$) $:\Leftrightarrow$

$$\xi \in N \wedge \exists B_\delta(\xi) \subset X : \forall x \in B_\delta(\xi) \cap N : f(x) \leq f(\xi) \text{ bzw. } f(x) \geq f(\xi)$$

Problem: Gesucht sind also diese Stellen lokaler Extrema von f unter der angegebenen Nebenbedingung und die Werte die f in ihnen annimmt. Setzen:

$$x := \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, y := \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m, z := \begin{pmatrix} x_{m+1} \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-m}$$

und $g(x) = g(y, z)$. Falls $g(y, z) = 0$ nach y auflösbar ist, d.h. $y = h(z)$ und $g(h(z), z) = 0$, dann läuft das Problem der Extremwertbestimmung darauf hinaus, die *freien* lokalen Extrema (d.h. Extrema ohne Nebenbedingungen) der Funktion $\varphi(z) = f(h(z), z)$ zu bestimmen.

Ist eine solche *explizite* Auflösung von $g(y, z) = 0$ nach y nicht möglich, so hilft uns die Multiplikatormethode.

Satz 5.1 (Lagrange Multiplikatormethode): Seien

$$f : X^\circ \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \dots \\ g_m \end{pmatrix} : X^\circ \rightarrow \mathbb{R}^m, m < n$$

stetig differenzierbar, und f besitzt in $\xi \in X^\circ$ ein lokales Extremum unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$. Ferner existiert in

$$g'(\xi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\xi) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(\xi) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(\xi) & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(\xi) \end{pmatrix}$$

eine m -Reihige unter-Determinante die nicht verschwindet. Dann gibt es m Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ (*Lagrange Multiplikatoren*), so dass die Gleichungen

$$f'(\xi) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g'_i(\xi) = 0$$

bestehen.

5.5.2 Praktische Lösung der Extremwertaufgaben

Suchen Extremwerte von $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$, $g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \dots \\ g_m \end{pmatrix}, m < n$.

Merkregel: Man bildet die Funktion

$$F(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x)$$

und fordert $F'(x, \lambda) = 0$ also

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0 \Leftrightarrow f'(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g'_i(x) = 0$$

und

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \Leftrightarrow g_i(x) = 0, i = 1, \dots, m$$

In Komponenten geschrieben:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_k} = 0, k = 1, \dots, n \wedge g_1(x) = \dots = g_m(x) = 0$$

Obere stellen $(m + n)$ Gleichungen mit $m + n$ Unbekannten dar!

Bemerkung: Ob in $x = \xi$, die das obige Gleichungssystem erfüllen, lokale Extrema vorliegen, muss tatsächlich noch überprüft werden. Hinreichende Bedingungen lassen sich schwer angeben. In diesem Zusammenhang sind folgende Bemerkungen nützlich.

$$N := \{x \in X : g(x) = 0\}$$

Ist N kompakt, so besitzt $f|_N$ ein Maximum und ein Minimum, d.h. f hat sogar ein globales Maximum und Minimum.

5.5.3 Eine hinreichende Bedingung für das Vorliegen von lokales Extrema unter Nebenbedingungen

Sei $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung. Dann heißt

$$N(T) := \{h \in \mathbb{R}^n : Th = 0\}$$

Nullraum oder *Kern* der Abbildung T . $N(T)$ ist ein linearer Unterraum von \mathbb{R}^n .

Satz 5.2 (Hinreichende Bedingungen für lokale Extrema unter Nebenbedingungen) Seien $f : X^\circ \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g : X \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m < n$ 2 mal stetig differenzierbar. Für

$$F(x, \lambda) := f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x)$$

sei $(\xi, \lambda) \in X \times \mathbb{R}^m$ ein Punkt mit $F'(x, \lambda) = 0$. Ferner sei $\text{Rang}(g'(\xi)) = m$ d.h. $g'(\xi)(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^m$, d.h. mindestens eine m -Reihige Unterdeterminante verschwindet nicht. Die *Hesse-Matrix* bzgl. $x \in X$ im Punkt (ξ, λ) ist definiert durch

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} := \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}(\xi, \lambda) \right)_{i,j=1}^n$$

Dann gilt:

- Ist $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\xi, \lambda)$ auf dem Nullraum $N(g'(\xi))$ von $g'(\xi) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ positiv definit, so hat f in ξ ein isoliertes lokales Minimum unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$.
- Ist $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\xi, \lambda)$ auf dem Nullraum $N(g'(\xi))$ negativ definit, so hat f in ξ ein isoliertes lokales Maximum unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$.
- Ist $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\xi, \lambda)$ auf dem Nullraum $N(g'(\xi))$ indefinit, so hat f in ξ kein lokales Extremum unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$.

6 Geometrische Begriffe

6.1 Kurven

6.1.1 Definition: Kurve

Unter einer *Kurve* im \mathbb{R}^n versteht man eine stetige Abbildung $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist. Die Kurve $\text{graph}(f)$ heißt [stetig] differenzierbar falls f [stetig] differenzierbar ist.

6.1.2 Definition: Tangentenvektor

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Funktion. Für $t \in I$ heißt $f'(t)$ *Tangentenvektor* der Kurve f zum Parameter t . Falls $f'(t) \neq 0$ heißt $\frac{f'(t)}{\|f'(t)\|_2}$ *Tangenteinheitsvektor* der Kurve f im Punkt t .

Geometrische Interpretation: Der Tangentenvektor $f'(t)$ läßt sich als Limes von Sekanten (im \mathbb{R}^n) auffassen, denn

$$f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{\|h\|}$$

Bemerkung: Eine Kurve $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ braucht nicht unbedingt eine injektive Abbildung darzustellen. Gilt $f(t_1) = f(t_2) = x \in \mathbb{R}^n$ für $t_1 \neq t_2$, so heißt x Doppelpunkt der Kurve f . Im Punkt x hat dann f im allgemeinen zwei verschiedene Tangentenvektoren.

6.2 Flächen und Tangentialebenen

6.2.1 Definition: Fläche

Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine (stetige) Funktion. Die Menge

$$\text{graph}(f) := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} : x \in D \right\}$$

heißt *Fläche* im \mathbb{R}^{n+1} .

6.2.2 Definition: Tangentialebene

Sei $f : D^\circ \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $\xi \in D$. Die Menge

$$T := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R}^n, y = f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi) \right\}$$

heißt *Tangentialebene* von f im Punkt $\begin{pmatrix} \xi \\ f(\xi) \end{pmatrix}$.

Bemerkung: Im Fall $n = 1$ benutzt man den Begriff Kurve statt Fläche und Tangente statt Tangentialebene.

6.2.3 Definition: Niveaufläche

Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Dann heißt

$$\{x \in D : f(x) = C = \text{const}\}$$

Niveaufläche der Funktion f zum Niveau C . In der Physik: *Äquipotentialfläche*.

Bemerkung: Man kommt von einer Niveaufläche ($f(x) = C_1$) zu einer unmittelbar *benachbarten* Niveaufläche ($f(x) = C_2$), d.h. $C_1 - C_2 \approx 0$, am schnellsten in Richtung der Gradienten

$$C_1 - C_2 = f(x+h) - f(x) = f'(x)h + r(h) \approx f'(x)h$$

$$\max \{|f'(x)h| : \|h\|_2 \leq 1\} = \|f'(x)\|_2, \quad h = \frac{f'(x)}{\|f'(x)\|_2}$$

6.2.4 Niveauläche und Gradient

Sei $f : D^\circ \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $f'(\xi) \neq 0$ im $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix} \in D^\circ$. Dann gilt: Die Tangentialebene an der Niveauläche $f(x) = C$ mit $f(\xi) = C$ im Punkt ξ ist charakterisiert durch die Gleichung

$$\langle f'(\xi), x - \xi \rangle = 0 \Leftrightarrow (x - \xi) \perp f'(\xi) \Leftrightarrow f'(\xi)(x - \xi) = 0$$

In Komponenten:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi_1, \dots, \xi_n) = 0$$

7 Wegintegrale

7.1 Rektifizierbare Wege

7.1.1 Definition: Weg-Kurve

Unter einem *Weg* im \mathbb{R}^n versteht man eine stetige Abbildung $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist.

7.1.2 Definition: Rektifizierbarer Weg

Ein Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *rektifizierbar* mit der Länge $L :=$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall k \in \mathbb{N} \forall a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b : \max_{0 \leq i \leq k} |t_i - t_{i-1}| \leq \delta \Rightarrow \left| \sum_{i=1}^k \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|_2 - L \right| \leq \varepsilon$$

Äquivalente Formulierung Wir geben jetzt eine äquivalente Formulierung der Rektifizierbarkeit an. Sei ζ eine Zerlegung von $[a, b]$, d.h.

$$\zeta = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = b\}$$

und

$$Z[a, b] := \{\zeta : \zeta \text{ Zerlegung von } [a, b]\}$$

Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Weg. Für $\zeta \in Z[a, b]$ betrachtet man die Länge

$$L_\zeta(\gamma) := \sum_{i=1}^k \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|_2$$

des γ -beschriebenen Polygonzuges. Offenbar wird $L_\zeta(\gamma)$ bei Verfeinerung der Zerlegung ζ vergrößert (Δ -Ungleichung).

7.1.3 Definition: Rektifizierbarkeit

Ein Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *Rektifizierbar*, wenn die Menge

$$\{L_\zeta(\gamma) : \zeta \in Z[a, b]\}$$

beschränkt ist. In diesem Fall heisst

$$L(\gamma) := L_a^b(\gamma) := \sup_{\zeta \in Z[a, b]} \sum_{i=1}^k \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|_2$$

die Länge des Weges γ . Beide Definitionen sind äquivalent.

Nebensatz zur Transformation der Wege: Sei $\tau : [a, b] \rightarrow [c, d]$ eine bijektive stetige und streng monoton wachsende Abbildung von $[a, b]$ auf $[c, d]$ und $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, \gamma_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ zwei rektifizierbare Wege mit der Eigenschaft $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \tau$. Dann gilt: $L(\gamma_1) = L(\gamma_2)$.

7.1.4 Äquivalenzrelation zu Wegen

Der obige Satz gibt zu folgenden Begriffen Anlass:

$$\mathcal{W}(\mathbb{R}^n) := \{\gamma : \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ Weg, } I \text{ beliebiges Intervall}\}$$

und

$$\mathcal{T} := \{\tau \mid \tau \text{ stetige, bijektive, streng monoton wachsende Funktion zwischen kompakten Intervallen}\}$$

Man erklärt eine *Äquivalenzrelation* auf $\mathcal{W}(\mathbb{R}^n)$: γ_1, γ_2 heißen äquivalent $:\Leftrightarrow$

$$\exists \tau \in \mathcal{T} : \gamma_1 = \gamma_2 \circ \tau$$

Schreibweise: $\gamma_1 \sim \gamma_2$. Es gilt:

- \sim ist *Symmetrisch*, d.h. $(\gamma_1 \sim \gamma_2) \Leftrightarrow (\gamma_2 \sim \gamma_1)$
- \sim ist *Reflexiv*, d.h. $\forall \gamma \in \mathcal{W}(\mathbb{R}^n) : \gamma \sim \gamma$
- \sim ist *Transitiv*, d.h. $\gamma_1 \sim \gamma_2 \wedge \gamma_2 \sim \gamma_3 \Rightarrow \gamma_1 \sim \gamma_3$

Damit kann $\mathcal{W}(\mathbb{R}^n)$ in Äquivalenzklassen eingeteilt werden

$$[\gamma] := \{\sigma \in \mathcal{W}(\mathbb{R}^n) : \sigma \sim \gamma\}$$

Es gilt:

$$[\gamma_1] = [\gamma_2] \Leftrightarrow \gamma_1 \sim \gamma_2$$

Notationen:

- a) Sei $\gamma \in \mathcal{W}(\mathbb{R}^n)$. Dann heißt das Bild

$$R(\gamma) := \gamma([a, b]) = \Gamma \subset \mathbb{R}^n$$

Bogen, Spur oder Bahn.

- b) • Eine Menge $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Kurve* falls es einen Weg $\gamma \in \mathcal{W}(\mathbb{R}^n)$ gibt mit $R(\gamma) = \Gamma$.
 • Des öfteren wird eine Kurve Γ auch als Äquivalenzklasse $\Gamma := [\gamma]$ eines Weges $\gamma \in \mathcal{W}(\mathbb{R}^n)$ betrachtet.

Ein zur Kurve Γ gehörender Weg γ heißt *Parameterdarstellung* oder auch *Parametrisierung* von Γ .

- c) • Ein injektiver Weg $\gamma \in \mathcal{W}(\mathbb{R}^n)$ heißt *Jordan-Weg*.
 • Eine Kurve $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Jordan-Kurve*, falls Γ das Bild eines Jordanweges ist. γ heißt dann *Jordan-Parameterdarstellung* von Γ .
 • Ein geschlossener Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\gamma(a) = \gamma(b)$ heißt *geschlossener Jordanweg* und dann *Jordan-Parameterdarstellung* von $\Gamma = R(\gamma)$ wenn $\gamma|_{[a, b]}$ injektiv ist.
- d) • Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Weg. Dann heißt

$$(-\gamma) := \gamma_- : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

definiert durch

$$\gamma_-(t) := \gamma(a + b - t)$$

der *Umgekehrter Weg* von γ . Ist γ rektifizierbar so ist auch γ_- rektifizierbar, und es gilt $L(\gamma) = L(\gamma_-)$

- Es gibt zwei *Orientierungen* für eine Kurve Γ die durch die Äquivalenzklassen $[\gamma]$ und $[\gamma_-]$ bestimmt werden.

- e) **Zusammengesetzter Weg:** Seien $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\gamma_2 : [b, c] \rightarrow \mathbb{R}^n$ Wege mit $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$. Dann wird durch

$$\gamma(t) := \begin{cases} \gamma_1(t) & : a \leq t \leq b \\ \gamma_2(t) & : b \leq t \leq c \end{cases}$$

ein Weg definiert und heißt der *zusammengesetzter Weg* $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ von γ_1 und γ_2 . Er beschreibt die Kurve $\Gamma_1 + \Gamma_2 = R(\gamma_1 + \gamma_2)$.

- f) • Ein Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *glatt*, wenn er stetig differenzierbar ist mit $\dot{\gamma}(t) \neq 0 \forall t \in [a, b]$.
 • γ heißt *stückweise glatt* wenn es eine Zerlegung $\zeta = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b\}$ des Intervalls $[a, b]$ gibt, so dass die Einschränkungen $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$, $i = 1, \dots, n$ glatt sind.
 • Eine Kurve Γ heißt *glatt bzw. stückweise glatt*, falls es eine glatte bzw. stückweise glatte Parametrisierung gibt.

7.1.5 Äquivalenzrelation über glatte Wege

Definieren:

$$\mathcal{W}^1(\mathbb{R}^n) := \{\gamma \in \mathcal{W}(\mathbb{R}^n) : \gamma \text{ glatt}\}$$

$$\mathcal{W}_{st}^1(\mathbb{R}^n) := \{\gamma \in \mathcal{W}(\mathbb{R}^n) : \gamma \text{ stückweise glatt}\}$$

$$\mathcal{T}^1 := \{\tau \in \mathcal{T} : \tau \text{ stetig differenzierbar und } \dot{\tau} > 0\}$$

Zwei glatte Wege $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{W}^1(\mathbb{R}^n)$ heißen bzgl. \mathcal{T}^1 äquivalent $:\Leftrightarrow$

$$\exists \tau \in \mathcal{T}^1 : \gamma_1 = \gamma_2 \circ \tau$$

Durch

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 :\Leftrightarrow \exists \tau \in \mathcal{T}^1 : \gamma_1 = \gamma_2 \circ \tau$$

wird eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{W}^1(\mathbb{R}^n)$ eingeführt. Definieren ferner Äquivalenzklassen:

$$[\gamma] := \{\sigma \in \mathcal{W}^1(\mathbb{R}^n) : \sigma \sim \gamma\}$$

Satz 2: Sei $\gamma \in \mathcal{W}^1(\mathbb{R}^n)$, $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$.

- Dann ist γ rektifizierbar, und es gilt

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|_2 dt$$

- Für $\gamma_1 \in [\gamma]$ gilt $L(\gamma_1) = L(\gamma)$

7.1.6 Definition: Bogenlänge

Für eine Jordan-Kurve $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ mit der Jordan-Darstellung γ , heißt $L(\Gamma) := L(\gamma)$ die Bogen- oder Kurvenlänge von Γ .

7.2 Wegintegrale von Skalar- & Vektorfeldern

7.2.1 Definition: Wegintegrale

Sei $\gamma \in \mathcal{W}^1(\mathbb{R}^n)$, $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Gamma = R(\gamma)$.

- a) Ist $f : \Gamma \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine auf Γ stetige, reellwertige (skalare) Funktion, so heißt

$$\int f \cdot ds := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\dot{\gamma}(t)\|_2 dt$$

das *Wegintegral* oder *Kurvenintegral* von f längst des Weges γ bzgl. der Bogenlänge. $ds = \|\dot{\gamma}(t)\|_2 dt$ heißt das skalare *Weg-* oder *Streckenelement* von γ .

- b) Ist $f : \Gamma \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine auf Γ stetige Vektorfunktion, so heißt

$$\int_{\gamma} f \cdot ds := \int_{\gamma} \vec{f} \cdot d\vec{s} := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt := \int_a^b \langle f(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle dt$$

das *Wegintegral* oder *Kurvenintegral* längst Γ . $d\vec{s} = \dot{\gamma}(t) dt$ ist das vektorielle Wegelement (Bogenelement) von γ :

$$\|d\vec{s}\|_2 = \|\dot{\gamma}(t)\|_2 dt = ds$$

8 Mehrdimensionale Integrale

Wir erweitern das Riemansche Integral im Eindimensionalen auf Funktionen von mehreren Variablen. Mit Hilfe des Satzes von Fubini werden mehrdimensionale Integrale auf Eindimensionale zurückgeführt. Die Substitutionsregel vereinfacht Rechnungen durch bequeme Integrationsbereiche und Integranden.

8.1 Riemansches Integral

8.1.1 Definitionen: Zerlegungen

- a) Seien $-\infty < a_i < b_i < \infty$, $i = 1, \dots, n$. Die Menge

$$I = [a, b] := \{x = (x_1, \dots, x_n) : a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, \dots, n\} \subset \mathbb{R}^n$$

heißt *abgeschlossenes n -dimensionales Intervall*.

- b) Die Zahl

$$\mu(I) = \mu([a, b]) := \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

heißt *n -dimensionales Maß* oder *n -dimensionaler Inhalt von I* .

- c) Die Menge

$$\zeta = \{I_1, \dots, I_m\}$$

von abgeschlossenen Intervallen heißt *Zerlegung* von $I \subset \mathbb{R}^n$: \Leftrightarrow

$$I = \bigcup_{k=1}^m I_k \wedge \text{offen } I_k^o \cap I_l^o = \emptyset, k \neq l$$

Ferner:

$$Z(I) = \{\zeta : \zeta \text{ Zerlegung von } I\}$$

- d) Der Wert

$$d(\zeta) := \max_{i \leq k \leq m} \sup_{x, y \in I_k} \|x - y\|_2$$

heißt *Durchmesser* der Zerlegung

$$\zeta = \{I_1, \dots, I_m\}$$

- e) Eine Zerlegung

$$\zeta' = \{I'_1, \dots, I'_{m'}\} \in Z(I)$$

heißt eine *Verfeinerung* der Zerlegung $\zeta \in Z(I)$: \Leftrightarrow

$$\forall I'_{k'} \in \zeta' : \exists I_k \in \zeta : I'_{k'} \subset I_k$$

Schreibweise: $\zeta \prec \zeta'$. Es gilt: $d(\zeta') \leq d(\zeta)$.

8.1.2 Definition: Obersumme, Untersumme

Bezeichnen:

$$B(I) := \{f : I \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}\}$$

Sei $f \in B(I)$ und $\zeta \in Z(I)$. Für $M \subset I$ ist

$$\underline{f}(M) := \inf_{x \in M} f(x), \quad \overline{f}(M) := \sup_{x \in M} f(x)$$

Ferner:

$$\underline{S}(f; \zeta) := \sum_{I_k \in \zeta} \underline{f}(I_k) \cdot \mu(I_k) \quad \text{Untersumme}$$

$$\overline{S}(f; \zeta) := \sum_{I_k \in \zeta} \overline{f}(I_k) \cdot \mu(I_k) \quad \text{Obersumme}$$

Es gilt stets:

$$\underline{S}(f; \zeta) \leq \overline{S}(f; \zeta)$$

Satz über Unter- & Obersummen Sei $f \in B(I)$. Dann gilt:

-
-
-

$$\forall \zeta, \zeta' \in Z(I) : \underline{S}(f; \zeta) \leq \overline{S}(f; \zeta')$$

$$\forall \zeta, \zeta' \in Z(I) : \zeta \prec \zeta' \Rightarrow \underline{S}(f; \zeta) \leq \underline{S}(f; \zeta') \wedge \overline{S}(f; \zeta) \geq \overline{S}(f; \zeta')$$

$$\underline{f}(I) \cdot \mu(I) \leq \underline{S}(f; \zeta) \leq \overline{S}(f; \zeta) \leq \overline{f}(I) \cdot \mu(I)$$

8.2 Riemansches Integral auf einem n -dimensionalen Intervall $I \subset \mathbb{R}^n$

8.2.1 Definition: Darboux'sches Integral

Sei $f \in B(I)$. Dann heißen die Größen

$$\int_{\underline{I}} f \, dx := \sup_{\zeta \in Z(I)} \underline{S}(f; \zeta)$$

$$\int_{\overline{I}} f \, dx := \inf_{\zeta \in Z(I)} \overline{S}(f; \zeta)$$

unteres bzw. oberes Darboux'sches Integral. f heißt *Rieman Integrierbar* (\mathcal{R} -Integrierbar) $:\Leftrightarrow$

$$\int_{\underline{I}} f \, dx = \int_{\overline{I}} f \, dx$$

Schreibweise:

$$\int_I f \, dx := \int_{\underline{I}} f \, dx = \int_{\overline{I}} f \, dx$$

Lemma 2.1 : Integrierbarkeitskriterium $f \in B(I)$ ist \mathcal{R} -Integrierbar $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \zeta \in Z(I) : \overline{S}(f; \zeta) - \underline{S}(f; \zeta) \leq \varepsilon$

Satz 2.2: Sei $f \in B(I)$ stetig. Dann ist f \mathcal{R} -Integrierbar.

8.3 Iterierte Intervalle, Satz von Fubini

8.3.1 Satz von Fubini

Seien $I_x \subset \mathbb{R}^k$, $I_y \subset \mathbb{R}^l$ Intervalle, und ist $I := I_x \times I_y \subset \mathbb{R}^{k+l}$. Dann gilt:

a) Ist $f \in B(I)$ \mathcal{R} -Integrierbar und $\exists g(y) := \int_{I_x} f(x, y) \, dx \forall y \in I_y$ so ist g auf I_y \mathcal{R} -Integrierbar und es gilt:

$$\int_I f \, d(x, y) = \int_{I_y} \left(\int_{I_x} f(x, y) \, dx \right) dy$$

b) Ist $f \in B(I)$ \mathcal{R} -Integrierbar und $\exists h(x) := \int_{I_y} f(x, y) \, dy \forall x \in I_x$ so ist h \mathcal{R} -Integrierbar auf I_x und es gilt

$$\int_I f \, d(x, y) = \int_{I_x} \left(\int_{I_y} f(x, y) \, dy \right) dx$$

c) Die Aussagen (a) und (b) sind z.B. erfüllt, wenn $f \in B(I)$ stetig ist. Dann gilt für $I = [a, b] \subset \mathbb{R}^n$:

$$\int_{[a, b]} f \, dx = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\dots \left(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \right) \dots \right) dx_2 \right) dx_1$$

Bemerkung: Aus der Existenz der Iterierten Integrale folgt allgemein nicht die Existenz von $\int_I f d(x, y)$. Umgekehrt braucht aus der Existenz von $\int_I f d(x, y)$ nicht die Existenz der iterierten Integrale zu folgen.

8.4 Riemann Intervalle und beschränkte Mengen im \mathbb{R}^n

Für $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sei f_B durch

$$f_B(x) := \begin{cases} f(x) & : x \in B \\ 0 & : x \in \mathbb{R}^n \setminus B \end{cases}$$

definiert.

8.4.1 Definition: \mathcal{R} -Integrierbar

Sei $\emptyset \neq B \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, $I \subset \mathbb{R}^n$ ein kompaktes Intervall mit $B \subset I$. Eine beschränkte Funktion $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ heißt \mathcal{R} -Integrierbar $:\Leftrightarrow f_B : I \rightarrow \mathbb{R}$ ist \mathcal{R} -Integrierbar. In diesem Fall heißt $\int_B f dx := \int_I f_B dx$ das Riemann Integral von f über B . B heißt *Integrationsbereich*, und man definiert als die Menge der \mathcal{R} -Integrierbaren Funktionen

$$\mathcal{R}(B) := \{f : B \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ } \mathcal{R}\text{-Integrierbar}\}$$

Bemerkungen

- Die obige Definition ist unabhängig von $I \supset B$.
- Für $n = 1$ ergibt sich auch eine Verallgemeinerung des 1-dimensionalen \mathcal{R} -Integrals.
- Ist die charakteristische Funktion

$$\chi_B := \begin{cases} 1 & x \in B \\ 0 & x \in \mathbb{R}^n \setminus B \end{cases}$$

\mathcal{R} -Integrierbar, so heißt

$$\mu(B) := \int_I \chi_B dx = \int_B dx$$

n -dimensionaler *Jordan Inhalt* bzw. *Jordan Volumen* von B . Für $n = 2$ bzw. $n = 3$ wird $\mu(B)$ auch Flächeninhalt bzw. Volumen von B bezeichnet. Definitionsgemäß ist $\mu(\emptyset) = 0$. Für $I = [a, b] \subset \mathbb{R}^n$ als Spezialfall ergibt sich wieder das normale n -dimensionale Maß von I :

$$\mu(I) = \int_I dx = \int_{a_1}^{b_1} \left(\dots \left(\int_{a_n}^{b_n} dx_n \right) \dots \right) dx_1 = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

8.4.2 Definition: Nullmenge

Eine Menge $B \subset \mathbb{R}^n$ heißt n -dimensionale *Nullmenge* $:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists$ höchstens abzählbar viele abgeschlossene (oder offene) Intervalle $I_1, I_2, \dots \subset \mathbb{R}^n$ mit

$$B \subset \bigcup_j I_j \wedge \sum_{j=1} \mu(I_j) \leq \varepsilon$$

Eine Menge $B \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Jordan Nullmenge* $:\Leftrightarrow B$ ist beschränkt und $\mu(B) = 0$.

Kriterium für eine J-Nullmenge: Eine Menge $B \subset \mathbb{R}^n$ ist J-Nullmenge $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists$ endlich viele kompakte Intervalle I_1, \dots, I_m mit

$$B \subset \bigcup_{j=1}^m I_j \wedge \sum_{j=1}^m \mu(I_j) \leq \varepsilon$$

Ist eine Menge $B \subset \mathbb{R}^n$ eine J-Nullmenge so ist sie auch eine Nullmenge. Die Umkehrung gilt allgemein nicht (Beispiel \emptyset).

8.4.3 Definition: J-messbare Menge

Eine beschränkte Menge $B \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Jordan-messbar* $:\Leftrightarrow \mathcal{X}_B \in \mathcal{R}(B)$. Man sagt: Eine Eigenschaft (Aussage) $p = p(x)$, $x \in B$ gilt "fast überall" auf $B \subset \mathbb{R}^n$ $:\Leftrightarrow$

$$N := \{x \in B : p(x) \text{ Falsch}\}$$

ist eine Nullmenge.

Lebesguesches Integrabilitätskriterium Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ J-messbar. Dann gilt:
 $f \in \mathcal{R}(B) \Leftrightarrow f$ ist beschränkt und fast überall stetig auf B .

Beispiele für Nullmengen

- Endliche Mengen $\subset \mathbb{R}^n$
- Bilder stetig differenzierbarer Funktionen aus $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $m < n$
- Ränder von Normalbereichen die durch endlich viele stückweise stetige Funktionen beschrieben werden. Der Rand einer Menge $A \subset X$ eines metrischen Raumes X ist definiert als

$$\partial A := \{a \in X : \forall \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset \wedge B_\varepsilon(a) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset\}$$

Das n -dimensionale Integral über eine Nullmenge ist stets Null. Damit ist es egal ob man nur über das Innere eines J-messbaren Bereichs B integriert oder ob man den Rand ∂B mit hinzunimmt.

8.4.4 Definition: Normalbereich

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und J-messbar, $\varphi_1, \varphi_2 \in C(A)$ stetig mit $\varphi_1 \leq \varphi_2$. Dann heißt

$$\mathcal{N} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in A, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

Normalbereich bzgl. der $x = (x_1, \dots, x_n)$ Ebene.

Bemerkung: Analog definiert man

$$\mathcal{N}_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : y \in A, \varphi_1(y) \leq x \leq \varphi_2(y)\}$$

als Normalbereich bzgl. der $(x_2, \dots, x_n, x_{n+1})$ Ebene usw.

8.4.5 Integration über Normalbereiche

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und J-messbar, $\varphi_1, \varphi_2 \in C(A)$ mit $\varphi_1 \leq \varphi_2$. Für $f \in C(B)$, wobei

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in A, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

gilt:

$$\int_B f(x, y) d(x, y) = \int_A \left(\int_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

8.4.6 Substitutionsregel (oder Transformationsformel) für Integrale über \mathbb{R}^n

Satz 5.1: Transformationsformel: Sei $\varphi : G^o \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ injektiv und stetig differenzierbar, und sei $\det(\varphi'(t))$ ständig positiv oder ständig negativ auf G . Ferner sei $B \subset G^o$ eine kompakte & J-messbare Menge und $f \in C(\varphi(B))$. Dann ist $\varphi(B)$ J-messbar und es gilt die Transformationsformel (Substitutionsregel)

$$\int_{\varphi(B)} f(x) dx = \int_B f(\varphi(t)) \cdot |\det(\varphi'(t))| dt$$

Diese Formel ist auch noch gültig, wenn

$$\mu(\{t \in B : \det(\varphi'(t)) = 0\}) = 0 \quad (\text{Nullmenge})$$

oder

$$\mu(\{t \in B : \varphi \text{ ist nicht Injektiv}\}) = 0$$

ist.

8.4.7 Prinzip von Cavalieri

Sei $B \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $t \in \mathbb{R}$ fixiert. Dann heißt

$$B_t := \{u = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : (u, t) \in B\}$$

n -dimensionale Schnittmenge.

Cavalierisches Prinzip: Sei $B \subset \mathbb{R}^{n+1}$ J-messbar. Ist B_t für jedes $t \in \mathbb{R}$ J-messbar, so gilt

$$\mu_{n+1}(B) = \int_{\mathbb{R}} \mu_n(B_t) dt = \int_{h_0}^{h_1} \mu_n(B_t) dt$$

Insbesondere hat man: Ist $\mu_n(B_t)$ höchstens ein Polynom 3-ten Grades, so erhält man die Keplersche Fußregel:

$$\mu_{n+1}(B) = \frac{h_1 - h_0}{6} \cdot \mu_n(B_{h_0}) + 4\mu_n\left(B_{\frac{h_1+h_0}{2}}\right) + \mu_n(B_{h_1})$$

Beweis: Seien $I \subset \mathbb{R}$, $J \subset \mathbb{R}$ kompakte Intervalle mit $B \subset I \times J$. Dann folgt

$$\mu_{n+1}(B) := \int_{J \times I} \chi_B(u, t) \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_I \underbrace{\left(\int_J \chi_B(u, t) du \right)}_{\mu_n(B)} dt \quad \square$$

8.5 Uneigentliche Riemansche Integrale

Uneigentliche Integrale sind nur in der Riemanschen Theorie von Interesse. Lebesgue-Integrale werden in der Maßtheorie von vornherein auch für unbeschränkte Bereiche und Funktionen definiert.

Uneigentliche Integrale werden oft als Grenzwert von eigentlichen Integralen über Gebiete B_k , die die Gesamtheit $B \subset \mathbb{R}^n$ ausschöpfen, erklärt. Insbesondere verlangt man, dass dieser Grenzwert für jede Ausschöpfungsmenge der selbe ist.

Im Mehrdimensionalen ($n > 1$) folgt aus der Integrierbarkeit sofort auch die absolute Integrierbarkeit. Dies hat zur Folge dass für $n > 1$ alle uneigentlichen Riemann-integrierbaren Funktionen auch Lebesgue-integrierbar sind.

Beachte: Diese Aussage trifft für $n = 1$ im Allgemeinen nicht zu!

Beispiel: Die Funktion $\frac{\sin x}{x}$ ist auf $[0, \infty)$ uneigentlich \mathcal{R} -integrierbar, doch nicht Lebesgue-integrierbar.

Wir definieren uneigentliche Integrale für offene Bereiche.

8.5.1 Definition: Ausschöpfungsfolge

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ offen und derart, dass für beliebigen Radius $R > 0$, die Mengen

$$A_R := \{x \in A : \|x\| < R\}$$

Jordan-messbar sind.

Bemerkung: A_R ist offen da der Schnitt zweier offener Mengen auch offen ist.

Sei $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge offener J-messbarer Teilmengen von A mit folgenden Eigenschaften:

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k, \quad \forall k \in \mathbb{N} : Cl(B_k) \subset B_{k+1}$$

Dann heißt $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Ausschöpfungsfolge von A .

Beispiele:

- Die Kugeln

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < k\}$$

bilden eine Ausschöpfungsfolge des \mathbb{R}^n .

- Die Kugelschichten

$$\mathcal{K}_k := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{k} < \|x\| < k \right\}$$

bilden eine Ausschöpfungsfolge des $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, d.h

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{K}_k = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

Bemerkungen: Jede offene Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ besitzt eine Ausschöpfungsfolge, z.B.

$$B_k := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < k\} \cap A$$

Ist (B_k) eine Ausschöpfungsfolge von A und $K \subset A$ eine beliebige kompakte Teilmenge von A , so folgt

$$\exists k_0 \in \mathbb{N} : \forall k > k_0 : K \subset B_k$$

8.5.2 Definition: Uneigentliches Riemansches Integral

Sei $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ auf jeder kompakten Teilmenge $K \subset A$ \mathcal{R} -integrierbar. Dann heißt f auf A *uneigentlich Riemann-integrierbar*, wenn für alle Ausschöpfungsfolgen (B_k) von A der Grenzwert

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{B_k} f \, dx$$

existiert. In diesem Fall ist der Grenzwert $\forall (B_k)$ der selbe. Dieser gemeinsame Grenzwert

$$\int_A f \, dx := \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{B_k} f \, dx$$

heißt *uneigentliches Riemansches Integral* von f über A .

Satz 6.1: Sei A offen und $f(x) \geq 0$ auf A . Dann ist f genau dann über A integrierbar, wenn die Folge der Integrale

$$\int_{B_k} f \, dx$$

für eine spezielle Ausschöpfungsfolge $(B_k) \subset A$ beschränkt ist.

9 Einige Anwendungen in der Physik

9.1 Koordinatentransformationen

9.1.1 Kugelkoordinaten

Die Transformation zwischen Kartesischen und *Kugelkoordinaten* heißt die folgende Abbildung

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \vec{r} = \Phi(\rho, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} \rho \sin \vartheta \cos \varphi \\ \rho \sin \vartheta \sin \varphi \\ \rho \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

Umgekehrt ergibt sich

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \vartheta = \arccos\left(\frac{z}{\rho}\right), \tan \varphi = \frac{y}{x}$$

mit der üblichen Vorsicht bei den Formeln für ϑ, φ . Man nennt ϑ die *Poldistanz*, $\psi = \frac{\pi}{2} - \vartheta$ die geographische Breite und φ die geographische Länge.

Φ ist stetig differenzierbar und surjektiv. Sie ist lokal umkehrbar überall dort, wo ihre Funktionaldeterminante

$$\det(\Phi') = \det \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & \rho \cos \vartheta \cos \varphi & -\rho \sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi & \rho \cos \vartheta \sin \varphi & \rho \sin \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta & -\rho \sin \vartheta & 0 \end{pmatrix} = \rho^2 \sin \vartheta$$

nicht verschwindet, also in allen Punkten des \mathbb{R}^3 Raumes außer der z -Achse.

Beachte: Die Transformation Φ ist im $\mathbb{R}^3 \setminus \{z \text{ Achse}\}$ nicht global invertierbar. Sie bildet aber die Menge $(0, \infty) \times (0, \pi) \times (-\pi, \pi)$ bijektiv auf den $\mathbb{R}^3 \setminus \{z \text{ Achse}\}$ ab.

Quader: Ist

$$Q := \{(\rho, \vartheta, \varphi) \mid \rho \in [0, R], \vartheta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi]\}$$

und

$$\mathcal{K}(R) := \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$$

dann gilt dass $\Phi(Q) = \mathcal{K}(R)$.

Das Volumenelement in Kugelkoordinaten ergibt sich als

$$dV := d(x, y, z) = \rho^2 \sin \vartheta \, d\rho \, d\vartheta \, d\varphi$$

9.1.2 Elliptische Koordinaten

Die Abbildung

$$\vec{r} = \Psi(\rho, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} a\rho \sin \vartheta \cos \varphi \\ b\rho \sin \vartheta \sin \varphi \\ c\rho \cos \vartheta \end{pmatrix},$$

nennt man Koordinatentransformation in *Elliptische Koordinaten*.

Quader: Ist Q der Quader

$$Q = \{(\rho, \vartheta, \varphi) \mid \rho \in [0, 1], \vartheta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi]\}$$

und \mathcal{E} das Ellipsoid

$$\mathcal{E} = \left\{ (x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$$

Dann gilt $\Psi(Q) = \mathcal{E}$. Ist

$$D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

die Diagonalmatrix mit den Halbachsen a, b und c , so gilt $\mathcal{E} = D(\mathcal{K}(1))$, denn für $\vec{r} \in \mathcal{K}(1)$ gilt

$$D\vec{r} = \begin{pmatrix} ax \\ by \\ cz \end{pmatrix}, \quad \frac{(ax)^2}{a^2} + \frac{(by)^2}{b^2} + \frac{(cz)^2}{c^2} = x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$$

Umgekehrt: Ist $\vec{r} \in \mathcal{E}$ d.h.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$$

dann ist

$$\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right) \in \mathcal{K}(1)$$

also $D^{-1}(\mathcal{E}) = \mathcal{K}(1)$. Wegen

$$\Psi(\rho, \vartheta, \varphi) = D\Phi(\rho, \vartheta, \varphi)$$

folgt

$$\det \Psi' = \det(D\Phi)' = \det(D \cdot \Phi') = \det(D) \cdot \det(\Phi') = abc\rho^2 \sin \vartheta$$

Demnach ist das Volumenelement in Elliptischen Koordinaten $dV = abc\rho^2 \sin \vartheta \, d\rho \, d\vartheta \, d\varphi$.

9.1.3 Zylinderkoordinaten

Die Abbildung

$$\Theta : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{r} = \Theta(\rho, \varphi, z) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z)$$

nennt man die Transformation in *Zylinderkoordinaten*. Θ bildet den Quader

$$Q = \{(\rho, \varphi, z) \mid \rho \in [0, R], \varphi \in [0, 2\pi], z \in [0, h]\}$$

auf den Zylinder

$$\mathcal{Z} = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq h\}$$

ab: $\Theta(Q) = \mathcal{Z}$. Die Funktionaldeterminante ist gegeben durch

$$\det(\Theta') = \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \rho$$

und demnach das Volumenelement durch $dV = \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz$.

9.1.4 Elliptische Zylinderkoordinaten

Die Transformation in *Elliptische Zylinderkoordinaten* ist gegeben durch

$$\mathcal{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{r} = \mathcal{F}(\rho, \varphi, z) = (a\rho \cos \varphi, b\rho \sin \varphi, z), \quad \rho \in [0, \infty], \varphi \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}$$

Sie bildet den Quader

$$Q = \{(\rho, \varphi, z) \mid \rho \in [0, 1], \varphi \in [0, 2\pi], z \in [0, h]\}$$

auf den Elliptischen Zylinder

$$\mathcal{Z} = \left\{ (x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, 0 \leq z \leq h \right\}$$

ab: $\mathcal{F}(Q) = \mathcal{Z}$. Das Volumenelement ist in Elliptischen Koordinaten gegeben durch $dV = ab\rho \, d\rho \, d\varphi \, dz$. Es gilt die Verkettung

$$\mathcal{F}(\rho, \varphi, z) = D\Theta(\rho, \varphi, z), \quad D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9.2 Körper mit Massendichte $\rho = 1$

9.2.1 Definition: Schwerpunkt

Sei $K \subset \mathbb{R}^3$ ein Körper mit Massendichte $\rho = 1$ und V_K sein Volumen. Dann ist der *Schwerpunkt* $\vec{r}_s \in \mathbb{R}^3$ dieses Körpers definiert als

$$\vec{r}_s := \frac{1}{V_K} \cdot \int_K \vec{r} \, dV$$

9.2.2 Definition: Trägheitsmoment

Sei $K \subset \mathbb{R}^3$ ein Körper mit Massendichte $\rho = 1$. Dann nennt man die Größen J_x, J_y, J_z bzgl. der Achsen x, y und z

$$J_x := \int_K (y^2 + z^2) \, dV, \quad J_y := \int_K (x^2 + z^2) \, dV, \quad J_z := \int_K (x^2 + y^2) \, dV$$

die *Trägheitsmomente* des Körpers.