Vorlesungsskript zu Analysis von Prof. Dr. Bernd Carl *

Jens Kubieziel

Wintersemester 2003/04

* $LastChangedRevision$: 7 vom $LastChangedDate$: $2005 - 08 - 2722 : 39 : 21 + 0200(Sa, 27Aug2005)$

Inhaltsverzeichnis

1 Elemente der Logik und Mengenlehre

Details hierzu sind in den Vorlesungsunterlagen für Lineare Algebra und analytische Geometrie zu finden.

1.1 Aussagen

Unter einer Aussage P versteht man einen Satz, der die Eigenschaft hat, wahr oder falsch zu sein.

Aussageverbindungen Sind p und q Aussagen, so lassen sich durch folgende Verbindungen neue Aussagen gewinnen:

Negation $\overline{p}$: nicht p
$\overline{p} \equiv w : p \equiv f \qquad \overline{\overline{p}} = p$

Konjunktion $p \wedge q$: p und q
$q \wedge q := w \quad p \equiv w$ und $q \equiv w$

Disjunktion $p \vee q$: p oder q
$p \vee q \equiv w := p \equiv f$ und $q \equiv f$

Implikation $(p \Rightarrow q) \equiv f :\Leftrightarrow p \equiv w$ und $q \equiv f$
$\overline{p \Rightarrow q} \equiv p \wedge \overline{q}$
$p \Rightarrow q \equiv \overline{p \wedge \overline{q}} = \overline{q} \vee q$

Äquivalenz $p \Leftrightarrow q$: p genau dann, wenn q
$(p \Leftrightarrow q) \equiv:\Leftrightarrow p$ und q haben den gleichen Wahrheitswert

1.2 Grundbegriffe der Prädikatenlogik (Quantorenlogik)

Unter einer Aussageform $p(x, y, \ldots)$ versteht man einen Satz, in dem eine oder mehrere Variablen $x, y, \ldots$ auftreten. Sie besitzt die Eigenschaft, dass man jedes Mal eine Aussage erhält, wenn man für die Variablen Objekte einer festliegenden Gesamtheit einsetzt.

Quantifizierung von Aussageformen Durch folgende sprachliche Gebilde wird die Aussageform quantifiziert:

- $\forall x$: für alle
- $\exists x$: es gibt (mind.) ein

Bausteine der Prädikatenlogik (Quantorenlogik)

- $\forall x(p(x) \Rightarrow q(x)$ Für jedes x mit der Eigenschaft $p(x)$ folgt die Eigenschaft $q(x)$.
- $\exists x p(x) \wedge q(x)$ Es gibt ein x mit der Eigenschaft $p(x)$ *und* der Eigenschaft $q(x)$.

Negation quantorenlogischer Aussagen

$$\overline{\forall x(p(x) \Rightarrow q(x))} \equiv \exists x(p(x) \wedge \overline{q(x)})$$

$$\overline{\exists x(p(x) \wedge q(x))} \equiv \forall x(p(x) \Rightarrow \overline{q(x)})$$

1.3 Elemente der Mengenlehre

Details zur Mengenlehre siehe Vorlesungsunterlagen Lineare Algebra ud Analytische Geometrie

1.4 Abbildungen (Funktionen)

Definition 1. Seien X, Y zwei nichtleere Mengen. Eine Teilmenge $f \subseteq X \times Y := \{(x, y) : x \in X \wedge y \in Y\}$ mit der Eigenschaft

$$\forall x \in X \ \forall y_1 \in Y \ \forall y_2 \in Y(((x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f) \Rightarrow y_1 = y_2)$$

heißt *Abbildung* (Funktion) von X in Y.

Schreibweise: $f : X \to Y \qquad x \mapsto f(x)$
In Worten: Unter einer Abbildung (Funktion) f von X in Y versteht man eine Vorschrift, die jedem $x \in X$ *genau ein* $y \in Y$ zuordnet und nennen es *Bild* oder *Wert* der Abbildung f an der Stelle x.
X heißt Urbildmenge (Definitionsbereich).

Komposition (Hintereinanderausführung, Verkettung)

Definition 2. Seien X, Y, Z nichtleere Mengen und $f : X \to Y, g : Y \to Z$ zwei Abbildungen. Dann heißt die Abbildung $g \circ f : X \to Z$, wobei $(g \circ f)(x) := g(f(x)), x \in X$ *Komposition* (Hintereinanderausführung) der Abbildung f und g.

Inverse Abbildungen (Funktionen)

Definition 3. Seien X, Y zwei nichtleere Mengen und $f : X \to Y$ bijketiv. Dann heißt $f^{-1} : Y \to X, f(x) \mapsto x$ *inverse Abbildung* oder Umkehrabbildung.

2 Zahlen

2.1 Reelle Zahlen

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\} \qquad \mathbb{Z} := \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\} \qquad \mathbb{Q} := \left\{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$$

Satz 2.1.1. *Es existiert keine rationale Zahl $x \in \mathbb{Q}$ mit der Eigenschaft $x^2 = 2$.*

Lemma 1. *Sei m eine natürliche Zahl, so dass m^2 eine gerade Zahl ist. Dann ist m auch eine gerade Zahl.*

$$\forall m \in \mathbb{N}(m^2 \text{ gerade} \Rightarrow m \text{ gerade})$$

2.1.1 Körperaxiome

Kommutativgesetz $a \cdot b = b \cdot a$

Assoziativgesetz $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Existenz und Eindeutigkeit des neutralen Elements Es gibt eine von 0 verschiedene Zahl 1: $\forall a \in \mathbb{R} : a \cdot 1 = a$

Eindeutigkeit der Lösbarkeit der Gleichung $a \cdot x = 1, a \neq 0, \forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0, \exists^1 x \in \mathbb{R} : a \cdot x = 1, x = a^{-1}$

Distributivgesetz $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

2.1.2 Anordnungsaxiome

In $\mathbb{R}$ gibt es eine "Kleinerbeziehung" $<$ mit folgenden Eigenschaften:

- Entweder gilt $a = b$ oder $a < b$ oder $b < a$.
- Transitivgesetz: $a < b \land b < c \Rightarrow a < c$
- Monotoniegesetz der Addition: $a < b \Rightarrow a + c < b + c$
- Monotoniegesetz der Multiplikation: $a < b \land 0 < c \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$
  Gilt $0 < a$, so heißt a positiv. Gilt $a < 0$, so heißt a negativ.

Größerbeziehung $a > b :\Leftrightarrow b < a$

Kleinergleichbeziehung $a \leq b :\Leftrightarrow a < b \lor a = b$

Größergleichbeziehung $a \geq b :\Leftrightarrow a > b \lor a = b$

Intervalle

- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ abgeschlossenes Intervall
- $[a, a] := \{a\}$
- $[a, b[:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ halboffenes Intervall
- $]a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$
- $]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ offenes Intervall
- $b - a$ Länge des Intervalls
- $[a, \infty[:= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$
- $]\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$

Absoluter Betrag

$$a \in \mathbb{R} \quad |a| := \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

$|a|$ heißt *absoluter Betrag* (Betrag) von a und es gilt: $|a| \geq 0, |a| = \max\{a, -a\}$

Eigenschaften von $|\cdot|$:

1. $|a| \geq 0, |a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
2. Homogenität: $|ab| = |a||b|$
3. Dreiecksungleichung: $|a + b| \leq |a| + |b|$

   3′ $||a| - |b|| \leq |a - b|, ||a| - |b|| \leq |a + b|$

Beweis:

1. klar
2. $|ab| = |a||b|$
   In einem Zwischenschritt machen wir uns klar, dass

   $$|a| = |-a|$$

   gilt. Denn $|a| = \max\{a, -a\} = \max\{-a, -(-a)\} = |-a|$.

   1. Fall $a \in \mathbb{R}, b \geq 0$
      1.1 Fall $a \geq 0, b \geq 0$
      $|ab| = ab = |a||b|$

1.2 Fall $a < 0, b \geq 0$

$|ab| = -(ab) = (-a)b = |a||b|$

2. Fall $a \in \mathbb{R}, b < 0$

$|ab| = |-(ab)| = |a(-b)|$ Aus dem 1. Fall folgt nunmehr $|a||-b| = |a||b|$

3. $\left.\begin{array}{rcl} a \leq \max\{a,-a\} & \leq & |a| \\ b \leq \max\{b,-b\} & \leq & |b| \end{array}\right\} \Rightarrow a + b \leq |a| + |b|$

$\left.\begin{array}{rcl} -a \leq \max\{a,-a\} & \leq & |a| \\ -b \leq \max\{b,-b\} & \leq & |b| \end{array}\right\} \Rightarrow -(a + b) \leq |a| + |b|$

$\Rightarrow |a + b| = \max\{a + b, -(a + b)\} \leq \max\{|a| + |b|, |a| + |b|\} = |a| + |b|$

$3'$ $|a| = |a + b - b| = |a + b + (-b)| \leq |a + b| + |-b| = |a - b| + |b|$

$\Rightarrow |a| - |b| \leq |a + b|$

$|b| - |a| \leq |b + a| = |a + b|$

$||a| - |b|| = \max\{|a| - |b|, -(|a| - |b|)\} \leq \max\{|a| + |b|, |a| + |b|\} = |a + b|$

2.1.3 Vollständigkeitsaxiom

Definition 4. $M \subset \mathbb{R}$ heißt genau dann *nach oben beschränkt*, wenn es eine reelle Zahl $S \in \mathbb{R}$ derart gibt, dass $x \leq S$ für alle $x \in M$ gilt.

$$M \subset \mathbb{R} :\Leftrightarrow \exists S \in \mathbb{R} \forall x \in M : x \leq S$$

Definition 5. S heißt eine *obere Schranke* von M: $\exists S \in \mathbb{R}\ \forall x \in M : x \leq S$

Definition 6. $S \in \mathbb{R}$ heißt genau dann *Supremum*[1] (oder kleinste obere Schranke) von M, wenn gilt:

1. S ist eine obere Schranke von M.
2. Für jede obere Schranke S' von M: $S \leq S'$

Es existiert genau eine obere Schranke für M. Denn sind S_1, S_2 kleinste obere Schranken von M, dann gilt sowohl $S_1 \leq S_2$ wie auch $S_2 \leq S_1$. Daraus folgt nun aber $S_1 = S_2$.

Vollständigkeitsaxiom Jede nichtleere, nach oben beschränkte Menge reeller Zahlen besitzt ein Supremum. $\forall M (M \subset \mathbb{R}$ n.o.b. $M \neq \emptyset \Rightarrow \sup M \in \mathbb{R})$

Bemerkung. Über die Zugehörigkeit von $S = \sup M$ zur Menge M wird nichts ausgesagt. Gilt $S \in M$, so schreibt man auch $\max M$ und S heißt *Maximum* von M. $S = \max M \Leftrightarrow S \in M \wedge \forall x \in M : x \leq S$

Beispiel.

$$M := \{x \in \mathbb{R} : x < 1\} \quad \sup M = 1$$

$$M := \{x \in \mathbb{R} : x \leq 1\} \quad \sup M = 1 \quad \max M = 1$$

[1]Bezeichnung: $S = \sup M$

Bemerkung. S ist Supremum von $M \subset \mathbb{R}$ kann auch wie folgt charakterisiert werden:

1. $\forall x \in M : x \leq S$
2. $\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in M : S - \varepsilon < x$

Beweis:

"$\Rightarrow$" Sei $S = \sup M \Rightarrow \forall x \in M : x \leq S$
Wegen $S - \varepsilon < S$ (S ist kleinste obere Schranke) $\exists x \in M : S - \varepsilon < x$

"$\Leftarrow$" Sei S' obere Schranke von M. Zu zeigen: $S \leq S'$
Annahme: $S' < S \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : S' + \varepsilon < S$
$\overset{(2.)}{\Rightarrow} \exists x \in M : S' < S < \varepsilon < x \Rightarrow$ x ist echt größer als S'. ↯
$\Rightarrow S'$ ist keine obere Schranke von M.

Untere Schranke und Infimum

$M \subset \mathbb{R}$ heißt nach unten beschränkt: $\Leftrightarrow \exists s \in \mathbb{R}\ \forall x \in M : x \geq S$
$s \in \mathbb{R}$ heißt *Infimum*[2]: $\Leftrightarrow$

1. s ist untere Schranke
2. s ist größte untere Schranke

Satz 2.1.2. *Jede nichtleere nach unten beschränkte Menge besitzt ein Infimum.*

2.2 Teilmengen von reellen Zahlen

2.2.1 Natürliche Zahlen und Prinzip der vollständigen Induktion

Definition 7. $I \subseteq \mathbb{R}$ heißt *induktiv*:$\Leftrightarrow$

1. $1 \in I$
2. $\forall x(x \in I \Rightarrow x + 1 \in I)$

Beispiel. $J := \{I : I \subset \mathbb{R} \quad I \text{ ist induktiv}\}$ entspricht der Menge aller induktiven Mengen aus $\mathbb{R}$.

Definition 8.

$$\mathbb{N} := \bigcap J := \bigcap_{I \in J} I = \{x \in \mathbb{R} : \forall I \in J x \in J\}$$

Satz 2.2.1. $\mathbb{N}$ *ist die kleinste induktive Teilmenge von* $\mathbb{R}$.

Proof. Wenn $A \in J : \bigcap_{I \in J} I \subset A$, genügt es zu zeigen, dass $\mathbb{N}$ induktiv ist.

[2] Schreibweise: $s = \inf M$

1. $\forall I \in J : 1 \in I \Rightarrow 1 \in \mathbb{N} = \bigcap_{I \in J} I$

2.
$$x \in \mathbb{N} = \bigcap_{I \in J} \Rightarrow \forall I \in J : x \in I \overset{I \text{induktiv}}{\Longrightarrow} x + 1 \in I$$
$$\Rightarrow I \in J : x + 1 \in I \Rightarrow x + 1 \in \mathbb{N} = \bigcap_{I \in J} I$$

□

Definition 9. Die zu $\mathbb{N}$ gehörenden Elemente heißen *natürliche Zahlen.*

Satz 2.2.2.
1. $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq 1$
2. $\forall n, m \in \mathbb{N} : n + m \in \mathbb{N} \qquad n \cdot m \in \mathbb{N}$
3. $\forall n > 1 \Rightarrow n - 1 \in \mathbb{N}$
4. $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R} : n < x < n + 1 \Rightarrow x \in \mathbb{N}$
5. *Jede nichtleere Teilmenge $A \subset \mathbb{N}$ enthält eine kleinste natürliche Zahl.*

Proof. Die Beweise dazu finden sich in dem Buch Analysis I von Barner/Flohr. □

Satz 2.2.3 (Satz von Archimedes). $\mathbb{N}$ *ist nicht beschränkt.*

Proof. Da wir wissen, dass $\mathbb{R}$ nicht beschränkt ist, genügt es zu zeigen, dass es für jedes $a \geq 0$ aus $\mathbb{R}$ ein n aus $\mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $n \geq a$ gibt:

$$\forall a \in \mathbb{R}\, a \geq 0\, \exists n \in \mathbb{N} : n \geq a$$

Zum Beweis nehmen wir das Gegenteil an und müssen nach den Gesetzen der Logik auf einen Widerspruch stossen:

$$\exists a \in \mathbb{R}\, a \geq 0\, \forall n \in \mathbb{N} : n < a$$

Damit folgt, dass $\mathbb{N}$ beschränkt und nach dem Vollständigkeitsaxiom muss es ein $b = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$ geben. Sei nun $\varepsilon = 1/2$. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $b - \frac{1}{2} < n_0$. Damit folgt nun, $b < (b - \frac{1}{2}) + 1 < n_0 + 1$. Natürlich muss $n_0 + 1$ in den natürlichen Zahlen liegen, da diese ja induktiv sind. $\lightning$ □

Das Prinzip der vollständigen Induktion

Satz 2.2.4. *Sei $A \subseteq \mathbb{N}$ mit folgenden Eigenschaften:*

1. $1 \in A$
2. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ liegt $n + 1$ wieder in A. Dann gilt $A = \mathbb{N}$.*

Proof. $A \subseteq \mathbb{N}$ ist induktiv. Da $\mathbb{N}$ die kleinste induktive Menge ist, gilt $A = \mathbb{N}$. □

Bemerkung. Das Prinzip der vollständigen Induktion kann o.B.d.A für Mengen der Form $\{n \in \mathbb{Z} : n \geq m\}$ mit dem Induktionsanfang $m \in \mathbb{Z}$ formuliert werden.

Definition 10. Sei A eine Menge. Eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to A$ heißt *Folge*[3].

Sei $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (reelle Zahlenfolge)

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n \qquad \prod_{k=m}^{n} a_k := a_m \cdot a_{m+1} \cdot \ldots \cdot a_n$$

Ganzzahlige Potenzen

$$a \in \mathbb{R} \qquad n \in \mathbb{N} \qquad a^1 := a \qquad a^{n+1} := a^n a$$

Erweiterung:

$$\begin{aligned} a \in \mathbb{R} &\qquad n \in \mathbb{N} \\ a^0 = 1 &\qquad a \neq 0 \\ a^{-1} = (a^{-1})^n &\qquad a \neq 0 \end{aligned}$$

Für die Potenzen gelten folgende Rechenregeln:

$$a^n a^m = a^{n+m} \qquad (a^n)^m = a^{nm} \qquad a^n b^n = (ab)^n$$

Allgemeines Distributivgesetz

$$\left(\sum_{k=1}^{m} a_k\right)\left(\sum_{l=1}^{n} b_l\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_k b_l$$

Beispiel. Summenformel für die geometrische Reihe

$$1 \neq q \in \mathbb{R} \qquad n \in \mathbb{N} : \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Bernoullische Ungleichung:

$$\forall x \geq -1 \qquad \forall n \in \mathbb{N} : (1+x)^n \geq 1 + n + x$$

Binomische Formel:

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \qquad \forall n \in \mathbb{N} : (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

[3] Schreibweise: $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}, (a_k), (a_1, a_2, a_3, \ldots)$

2.2.2 Endliche und unendliche Teilmengen von $\mathbb{R}$

Definition 11. Eine Teilmenge von $\mathbb{R}(\emptyset \neq A \subset \mathbb{R})$ heißt:

1. endlich $:\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \quad \exists \varphi : \{1, \ldots, n\} \to$ A bijektiv
2. unendlich $:\Leftrightarrow$ A ist nicht endlich

Definition 12.
1. Eine Teilmenge $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ heißt abzählbar $:\Leftrightarrow \exists \varphi : \mathbb{N} \to A$ surjektiv $(\varphi(\mathbb{N}) = A)$
2. $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ heißt überabzählbar $: \Leftrightarrow$ A ist nicht abzählbar

Beispiel.

$$A = \{1, \ldots, a_n\} \qquad \varphi : \mathbb{N} \to A$$
$$\varphi(k) = \begin{cases} a_k & 1 \leq k \leq n \\ a_n & k = n+1, \ldots \end{cases}$$

Satz 2.2.5. *Die Vereinigung abzählbar vieler abzählbarer Mengen $A_n, n \in \mathbb{N}$ ist wieder abzählbar, d.h.*

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n := \{x : \exists n \in \mathbb{N} : x \in A\}$$

Proof.

$$A_n := \{a_{nm} : m \in \mathbb{N}\} \qquad \varphi_n(m) := a_{nm} \qquad \varphi_n : \mathbb{N} \to A_n$$

□

Satz 2.2.6. $\mathbb{R}$ *ist überabzählbar.*

Proof. Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \qquad f(n) = b_n, a_{n1}a_{n2}a_{n3}\ldots \qquad b_n \in \mathbb{Z} \qquad a_{nk} \in \{0, \ldots, 9\}$

$$\begin{array}{rcl} f(1) & = & b_1, a_{11}a_{12}a_{13}\ldots \\ f(2) & = & b_2, a_{21}a_{22}a_{23}\ldots \\ f(3) & = & b_3, a_{31}a_{32}a_{33}\ldots \\ \vdots & = & \vdots \\ f(n) & = & b_n, a_{n1}a_{n2}a_{n3}\ldots \end{array}$$

$$c_n = \begin{cases} 1 & \text{falls } a_{nn} \neq 1 \\ 2 & \text{falls } a_{nn} = 1 \end{cases}$$

Dann ist $c = 0, c_1c_2c_3\ldots \in \mathbb{R}$ mit $\forall n \in \mathbb{N} : f(n) \neq c$.
c und $f(n)$ unterscheiden sich mindestens in der n-ten Stelle nach dem Komma. Also gilt:

$$\forall f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{R}$$

□

3 Konvergenz

3.1 Metrische Räume

Definition 13. $\emptyset \neq X$ Menge. Eine Abbildung $d : X \times X \to [0, \infty[$ heißt *Metrik* (Abstand) auf $X :\Leftrightarrow$

(M1) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (Definitheit)

(M2) $\forall x, y \in X : d(x,y) = d(y,x)$ (Symmetrie)

(M3) $\forall x, y, z \in X : d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (Dreiecksungleichung)

Das Paar (X, d) heißt *metrischer Raum.*

Beispiel. 1. $(\mathbb{R}, d)$ $\quad d(x,y) := |x - y|$
Nachweis der Eigenschaften:

(M1) $d(x,y) = |x-y| = 0 \Leftrightarrow x = y$
(M2) $d(x,y) = |x-y| = |-(x-y)| = |y-x| = d(y,x)$
(M3) $d(x,y) = |x-y| = |(x-z)+(z-y)| \leq |x-z| + |z-y| = d(x,z) + d(z,y)$

2. $(\mathbb{R}^n, d)$ $\qquad \mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} := \{x = (\xi_1, \dots, \xi_n) : \xi_i \in \mathbb{R}\}$
$x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \quad y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n$
euklidischer Abstand:

$$d(x,y) = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i - \eta_i|^2\right)}$$

Nachweis der Eigenschaften:

(M1) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \xi_1 = \eta_1, \xi_2 = \eta_2, \dots, \xi_n = \eta_n \Leftrightarrow x = y$
(M2) $d(x,y) = d(y,x) \qquad (|\xi_i - \eta_i| = |\eta_i - \xi_i|)$
(M3) Verwendung der Ungleichung:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2}$$

$$\begin{array}{lll} x = (\xi_1, \dots, \xi_n) & y = (\eta_1, \dots, \eta_n) & z = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \\ a_i = \xi_i - \zeta_i & b_i = \zeta_i - \eta_i & a_i + b_1 = \xi_i - \eta_i \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
d(x,y) &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\xi_i - \eta_i|^2} \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2} \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\xi_i - \zeta_i|^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\zeta_i - \eta_i|^2} \\
&= d(x,z) + d(y,z)
\end{aligned}
$$

Es gelten folgende Ungleichungen:

Cauchy-Schwartzsche Ungleichung

$$\forall n \in \mathbb{N} \, \forall a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \, b_n \in \mathbb{R} : \left| \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$$

Beweis: Sei $xy \leq x^2/2 + y^2/2$ mit $\forall x, y \geq 0$. Dann ist $0 \leq (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$. O.B.d.A. seien $A := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2} > 0$ und $B := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2} > 0$.
Wir setzen $x_i := |a_i|/A$ und $y_i := \frac{|b_i|}{B}$. Dann ist:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{AB} \left| \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right| &\leq \frac{1}{AB} \sum_{i=1}^{n} |a_i||b_i| = \sum_{i=1}^{n} \frac{|a_i|}{A} \frac{|b_i|}{B} \leq \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i^2}{2} + \frac{y_i^2}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{|a_i|^2}{A^2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{|b_i|^2}{B^2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{A^2} \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 + \frac{1}{B^2} \sum_{i=1}^{n} |b_i|^2 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{A^2}{A^2} + \frac{B^2}{B^2} \right) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Minkowskische Ungleichung

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2}$$

Beweis: O.B.d.A. sei $\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^2 > 0$

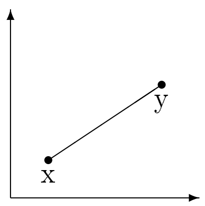
$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^2 &= \sum_{i=1}^n |a_i + b_i||a_i + b_i| \leq \sum_{i=1}^n (|a_i| + |b_i|)|a_i + b_i| \\
&= \sum_{i=1}^n |a_i||a_i + b_i| + \sum_{i=1}^n |b_i||a_i + b_i| \\
&\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |a_i|^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n |b_i|^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^2} \\
&\Rightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |a_i|^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n |b_i|^2}
\end{aligned}$$

□

3. Maximummetrik:
$$d(x, y) := \max_{1 \leq i \leq n} |\xi_i - \eta_i|$$

4. Summenmetrik:
$$d(x, y) := \sum_{i=1}^n |\xi_i - \eta_i|$$

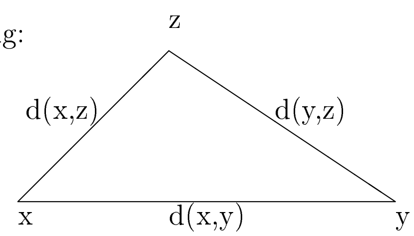
Geometrische Interpretation von Metrik im $(\mathbb{R}^n, d)$



$x = (\xi_1, \xi_2) \qquad y = (\eta_1, \eta_2)$

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^2 |\xi_i - \eta_i|^2} = \sqrt{|\xi_1 - \eta_1|^2 + |\xi_2 - \eta_2|^2}$$

Dreiecksungleichung:



$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

Definition 14 (Kugel). Sei (X, d) ein metrischer Raum mit $a \in X$ und $r \geq 0$. Dann ist

$$B_r(a) := \{x \in X : d(a, x) \leq r\}$$

eine *abgeschlossene* Kugel mit Mittelpunkt a und Radius r und

$$\overset{o}{B}_r(a) := \{x \in X : d(a, x) < r\}$$

eine *offene* Kugel mit Mittelpunkt a und Radius r.

geometrische Interpretation in $\mathbb{R}^2$:

$$(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \qquad d(a, x) = \sqrt{|a_1 - x_1|^2 + |a_2 - x_2|^2}$$
$$B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^2 : d(a, x) = \sqrt{|a_1 - x_1|^2 + |a_2 - x_2|^2} \leq r\}$$

3.2 Folgen

Definition 15. Sei X eine Menge. Eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to X$ heißt *Folge*[1].

Beispiel (reelle Zahlenfolgen).

$$\begin{aligned} a_n &= a && \text{konstante Zahlenfolge} \\ a_n &= 1/n && \\ a_n &= (-1)^n && \text{alternierende Zahlenfolge} \\ a_n &= q^n && q \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

3.2.1 Konvergente Folgen

Definition 16. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge $(a_n) \subset X$ heißt genau dann *konvergent*, wenn es ein $a \in X$ derart gibt, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $d(a, a_n) \leq \varepsilon$ für alle $n \geq n_\varepsilon$ existiert:

$$\exists a \in X \, \forall \varepsilon > 0 \, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \, \forall n \geq n_\varepsilon : d(a, a_n) \leq \varepsilon$$

Man sagt (a_n) konvertiere gegen a. Das Gegenteil von konvergenten Folgen sind *divergente Folgen.*

Geometrische Interpretation von Konvergenz In jeder ε-Kugel $B_\varepsilon(a)$ liegen unendlich viele Glieder der Folge (a_n) und ausserhalb $B_\varepsilon(a)$ liegen höchstens endlich viele Glieder der Folge (a_n).

Satz 3.2.1 (Grenzwert einer Folge). *Sei $(a_n) \subset X$ konvergent gegen a. Dann ist a eindeutig bestimmt und heißt* Grenzwert[2] *oder* Limes *von (a_n).*

[1] Schreibweise: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (a_n) $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ $(a(n))_{n\in\mathbb{N}}$ $(a_1, a_2, \ldots)$
Verallgemeinerung: $(a_n)_{n\geq n_0}$ $n_0 \in \mathbb{Z}$

[2] Schreibweise: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ $a_n \to a$ $(a_n) \to a$

Proof. Es ist zu zeigen: konvergiert (a_n) gegen a und b, so ist $a = b$.
Sei $\varepsilon > 0$. Dann existieren $n_\varepsilon^{(1)}, n_\varepsilon^{(2)} \in \mathbb{N} : d(a, a_n) \le \varepsilon/2$ für $n \ge n_\varepsilon^{(1)}$ und $d(b, a_n) \le \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \ge n_\varepsilon^{(2)}$. Für $n \ge n_\varepsilon := \max\{n_\varepsilon^{(1)}, n_\varepsilon^{(2)}\} : d(a, a_n) \le \frac{\varepsilon}{2}$ und $d(b, a_n) \le \frac{\varepsilon}{2}$ folgt nach der Dreiecksungleichung $d(a, b) \le d(a, a_n) + d(a_n, b) \le \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$ für $n \ge n_\varepsilon$. Also gilt:

$$\underbrace{\forall \varepsilon > 0 : d(a,b) \le \varepsilon}_{p} \Rightarrow \underbrace{d(a,b) = 0}_{q} \Rightarrow a = b$$

wegen der Beziehung $\overline{p \Rightarrow q} \equiv p \wedge \overline{q}$ gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 : d(a,b) \le \varepsilon \wedge d(a,b) > 0$$

Setze $\varepsilon := \frac{1}{2} d(a,b) > 0$. Dann ist

$$d(a,b) \le \frac{1}{2} d(a,b) \Rightarrow 1 \le \frac{1}{2} \ \lightning$$

$\square$

Teilfolgen

Definition 17. Sei X eine nichtleere Menge, $(a_n) \subset X$ eine Folge und $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ streng monoton wachsend[3]. Dann heißt die Folge $(a_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ *Teilfolge*[4] von (a_n).

Satz 3.2.2. *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge (a_n) konvergiert genau dann gegen $a \in X$, wenn jede Teilfolge von (a_n) gegen a konvergiert.*

Proof. „⇒“ Zu zeigen: $a_n \to a \Rightarrow a_{n_k} \to a$
Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $n_\varepsilon \in \mathbb{N} : d(a, a_n) < \varepsilon$ für $n \ge n_\varepsilon$. Wähle $k_\varepsilon \in \mathbb{N} : n_{k_\varepsilon} \ge n_\varepsilon$.
Für $k \ge k_\varepsilon \Rightarrow n_k \ge n_{k_\varepsilon}$ ist $d(a, a_{n_k}) < \varepsilon \Rightarrow a_{n_k} \to a$

„⇐“ Zu zeigen: $\forall (a_{n_k} \subset (a_n)) : a_{n_k} \to a$
Insbesondere gilt dies für (a_n) selbst: $a_n \to a$

$\square$

Definition 18. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Die Folge $(a_n) \subset X$ heißt genau dann *beschränkt*, wenn gilt:

$$\exists a \in X \, \exists M \ge 0 \, \forall n \in \mathbb{R} : d(a, a_n) \le M$$

Satz 3.2.3. *Jede konvergente Folge in (X, d) ist beschränkt.*

Proof. Sei $a \in X$ der Grenzwert von (a_n). Für $\varepsilon = 1$ gibt es ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \ge \varepsilon$ gilt: $d(a_n, a) \le 1$. Für $M := \max\{d(a, a_1), \ldots, d(a, a_{n_\varepsilon}), 1\}$ gilt $d(a, a_n) \le M$ $(\forall n \in \mathbb{N})$. $\square$

[3] $\forall n \in \mathbb{N} : \varphi(n) < \varphi(n+1)$
[4] Schreibweise: $n_k := \varphi(k) \qquad n_1 < n_2 < n_3 \qquad (a_{n_k}) \subset (a_n)$

3.2.2 Sätze über reelle Zahlenfolgen

Im folgenden sei $X = \mathbb{R}$ und $d(x,y) = |x-y|$ für $x, y \in \mathbb{R}$. Aus dem vorigen Abschnitt folgt:

1. $a \in \mathbb{R}$ ist Grenzwert von $(a_n) \subset \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_\varepsilon : |a_n - a| \leq \varepsilon$

2. Eine konvergente Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}$ ist beschränkt, d.h. $\exists M \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq M$.
   Denn sei $a = \lim a_n$. Dann existiert $M_1 \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N} : |a - a_n| \leq M_1$
   $|a_n| = |(a_n - a) + a| \leq |a_n - a| + |a| \leq M_1 + |a|$
   Für $M := M_1 + |a|$ gilt $|a_n| \leq M$ $(\forall n)$.

Geometrische Interpretation von Grenzwert

$$|a - a_n| \leq \varepsilon \qquad \forall n \leq n_\varepsilon$$

Bemerkung. 1. Eine Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}$ heißt *Nullfolge* $\Leftrightarrow \lim a_n = 0$ $(\Leftrightarrow \lim |a_n| = 0)$

2. $\lim a_n = a \Leftrightarrow \lim(a_n - a) = 0$, d.h. $a_n - a$ ist Nullfolge.

Beispiel. Die Folge $a_n = 1/n$ ist eine Nullfolge. Denn sei $\varepsilon > 0$ und wähle $n_\varepsilon \in \mathbb{R}$, so dass $1/n_\varepsilon \leq \varepsilon$. Dann $n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |1/n - 0| = 1/n \leq 1/n_\varepsilon \leq \varepsilon$

Rechenregeln für konvergente Folgen

Satz 3.2.4. *Seien $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$ konvergent, $a := \lim a_n$ und $b := \lim b_n$. Dann:*

1. $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n = a + b$

2. $\lim(a_n b_n) = \lim a_n \lim b_n = ab$

3. $\lim \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim a_n}{\lim b_n} = \frac{a}{b}$ *falls* $b \neq 0 \quad b_n \neq 0$

4. $\lim |a_n| = |\lim a_n| = |a|$

5. *Vergleichssatz*
   $\exists m \in \mathbb{N}\ \forall n \geq m\ a_n \leq b_n \Rightarrow \lim a_n \leq \lim b_n \Rightarrow a \leq b$

6. $\exists m \in \mathbb{N}\, \forall n \geq m\, a_n \leq c_n \leq b_n \wedge \lim a_n = \lim b_n \Rightarrow (c_n)$ *konvergent und* $\lim c_n = \lim a_n$

7. $\lim \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = \lim a_n$

8. $a_n > 0 \Rightarrow \lim \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} = \lim a_n$

9. $a_n > 0$ $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ *existiert* $\Rightarrow \sqrt[n]{a_n} = \frac{\lim a_{n+1}}{\lim a_n}$

Proof. 1. Übung

2. zu zeigen: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n \geq n_\varepsilon : a_n b_n - ab = a_n(b_n - b) + (a_n - a)b$
   Nach Satz 3.2.3 folgt, dass (a_n) beschränkt ist, d.h. $\exists M \geq 0 \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq M$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$, so dass $|a - a_n| \leq \frac{\varepsilon}{2(|b|+1)}$ für $n \geq n_1$ und $|b - b_n| \leq \frac{\varepsilon}{2M}$ für $n \geq n_0$. Für $n \geq n_\varepsilon = \max\{n_0, n_1\}$ gilt

$$\left.\begin{aligned} |a_n - a| &\leq \tfrac{\varepsilon}{2(|b|+1)} \\ |b_n - b| &\leq \tfrac{\varepsilon}{2M} \end{aligned}\right\} \forall n \geq n_\varepsilon$$

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| \leq |a_n||b_n - b| + |a_n - a||b| &\leq M\frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2(|b|+1)}|b| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

3. Seien b und $b_n \neq 0$. Man zeigt zunächst: $\lim 1/b_n = 1/\lim b = 1/b$. Aus der Tatsache, dass $\exists n_0 \forall n \geq n_0 : |b_n - b| \leq |b|/2$ für $b \neq 0$ folgt nach der Dreiecksungleichung, dass $|b| - |b_n| \leq |b_n - b| \leq |b|/2$ für $n \geq n_0$. Daraus kann man nun für alle $n \geq n_0$ schließen, dass $|b|/2 \leq |b_n|$
   Sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists n_1 \in \mathbb{N} : |b_n - b| \leq \frac{\varepsilon |b|^2}{2}$ und für $n \geq \max\{n_0, n_1\}$ gilt:

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n||b|} \leq \frac{\varepsilon |b|^2/2}{|b|/2 |b|} = \varepsilon$$

   Damit ist nach Regel 2 $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}$.

4. Sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon\ \forall n \geq n_\varepsilon$. Nach der Dreiecksungleichung folgt für alle $n \geq n_\varepsilon : ||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < \varepsilon \Rightarrow \lim |a_n| = |a|$.

5. Annahme: $\lim a_n > \lim b_n$. Dann ist $\varepsilon = a-b/2$ und es existieren $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für $n \geq n_0$ und $|b_n - b| < \varepsilon$ für $n \geq n_1$. Wir definieren $n_\varepsilon := \max\{n_0, n_1\} : |a_n - a| < \varepsilon, |b_n - b| < \varepsilon$. Insbesondere da $\varepsilon = a-b/2$ ist, folgt für alle $n \geq n_0 : a - \varepsilon = b + a-b/2 = a+b/2 < a_n$ und $b_n < b + \varepsilon = a+b/2 \Rightarrow b_n < a_n \quad \forall n \geq n_\varepsilon$ ↯
   □

6. Sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists n_0, n_1 \in \mathbb{N}$, $|a_n - a| < \varepsilon$ und $|b_n - a| < \varepsilon$. Sei $n_\varepsilon := \max\{n_0, n_1\}$.

$$\begin{aligned} &a - \varepsilon \leq a_n \leq c_n \leq b_n \leq a + \varepsilon \\ &\Rightarrow |c_n - a| \leq \varepsilon \qquad \forall n \geq n_\varepsilon \\ &\Rightarrow \lim c_n = a \end{aligned}$$

□

Beispiel. Sei $q \in \mathbb{R}$ und $a_n := q^n$.

$$\lim q^n = \begin{cases} 0 & |q| < 1 \\ 1 & q = 1 \\ \mathit{divergent} & |q| > 1 \vee q = -1 \end{cases}$$

Proof. 1. Fall $q = 0 \Rightarrow q^n = 0 \Rightarrow \lim q^n = 0$

2. Fall $0 < |q| < 1$
Man setzt:

$$h := 1/|q| - 1 > 0 \Rightarrow |q| = \frac{1}{1+h}$$
$$0 < |q|^n = \frac{1}{(1+h)^n} \leq \frac{1}{1+nh} \leq \frac{1}{nh}$$

Nach Satz 3.2.4 Punkt 6 folgt damit, $\lim |q|^n = 0 \Rightarrow \lim q^n = 0$.

3. Fall $q = 1 \Rightarrow q^n = 1 \Rightarrow \lim q^n = 1$

4. Fall $q = -1$
$a_n = q^n = (-1)^n$ ist divergent. Angenommen, es existiert ein $a \in \mathbb{R} : a_n \to a$. Für $\varepsilon = 1/2 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < 1/2$. Somit gilt:

$$a_{n+1} - a_n = (-1)^{n+1} - (-1)^n = (-1)^n(-1) - (-1)^n = (-1)^n(-2)$$
$$|-2| = 2 = |a_{n+1} - a_n| \leq |a_{n+1} - a| + |a - a_n| \leq 1/2 + 1/2 = 1$$

für $n \geq n_0$ ↯

5. Fall $|q| > 1$
Annahme: q^n ist konvergent. Dann ist nach Satz 3.2.3 q^n beschränkt, d.h. $\exists M > 0 \forall n \in \mathbb{N} : |q^n| \leq M \Rightarrow M \geq |q^n| = |q|^n = (\underbrace{1 + |q| - 1}_{>0})^n \geq 1 + n(|q| - 1) \geq n(|q| - 1)$
$\Rightarrow n \leq \frac{M}{|q|-1} \Rightarrow \mathbb{N}$ ist beschränkt ↯

□

Bemerkung. Bestimmte Divergenz[5] (=uneigentliche Konvergenz) gegen $+\infty$ bzw. $-\infty$: Eine Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}$ heißt *bestimmt divergent* gegen $+\infty$ $(-\infty)$ $:\Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R} \exists n_M \in \mathbb{N} \forall n \geq n_M : a_n \geq M (a_n \leq M)$

Beispiel.

$a_n = n$		$\lim a_n = \infty$
$a_n = -n$		$\lim a_n = -\infty$
$a_n = (-1)^n$	nicht bestimmt divergent	

∞ ist keine relle Zahl. Denn wäre ∞ eine reelle Zahl, so würde für die Folgen $a_n = a$ und $b_n = 1$ gelten, dass $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n \Rightarrow \infty = \lim(n+1) = \lim n + \lim 1 = \infty + 1 \Rightarrow 0 = 1$ ↯.

[5] Schreibweise: $\lim a_n = +\infty \qquad a_n \to \infty$

Monotone Folgen

Definition 19 (monotone Folgen). Eine Zahlenfolge $(a_n) \subset \mathbb{R}$ heißt *monoton wachsend (fallend)* $:\Leftrightarrow \forall n, m \in \mathbb{N} : n < m \Rightarrow a_n \leq a_m (a_n \geq a_m)$.

Satz 3.2.5.

1. *Für eine monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge* $(a_n) \subset \mathbb{R}$ *gilt:* $\lim a_n = \sup\{a_n\}$
2. *Für eine monoton fallende und nach unten beschränkte Folge* $(a_n) \subset \mathbb{R}$ *gilt:* $\lim a_n = \inf\{a_n\}$

Proof.

1. Sei $a := \sup\{a_n\} \in \mathbb{R}$. Dies existiert nach dem Vollständigkeitsaxiom. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N} : a - \varepsilon < a_{n_\varepsilon}$. Für $n \geq n_\varepsilon : a - \varepsilon \leq a_{n_\varepsilon} \leq a_n \leq a + \varepsilon \Rightarrow |a_n - a| \leq \varepsilon$ für $n \geq n_\varepsilon \Rightarrow \lim a_n = \sup\{a_n\}$
2. Der Beweis erfolgt analog zum ersten Fall.

□

Beispiel.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e \qquad\qquad a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e$$

Proof.

1. Zeigen a_n ist beschränkt und monoton wachsend
Monotonie: klar, $a_n \geq a_{n+1}$
Beschränkt: Es gilt, $a_n \leq 3$

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\ &\leq 1 + 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \leq 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}} = 3 \\ &\Rightarrow \lim a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right) \text{ existiert} \end{aligned}$$

2.

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n}^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$$

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k} \\
&= \frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n}\frac{1}{k!} \\
&= \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow \lim_n \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}$ Ferner: $\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} < \binom{n+1}{k}\frac{1}{(n+1)^k}$
Also gilt:

$$
\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \leq \sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!} \leq 3
$$

$\Rightarrow \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ existiert. Fixieren $l < n$. Dann gilt:
$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{l}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{l}\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{l}\frac{1}{k!}$
wegen $\sum_{k=0}^{l}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \leq \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$
$\overset{n\to\infty}{\Rightarrow} \sum_{k=0}^{l}\frac{1}{k!} \leq \lim_n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \lim_n \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$
$\overset{l\to\infty}{\Rightarrow} \lim_{l\to\infty}\sum_{k=0}^{l}\frac{1}{k!} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

□

Satz 3.2.6 (Intervallschachtelung). *Seien $I_n = [a_n, b_n]$ mit $n \in \mathbb{N}$ abgeschlossene Intervalle, so dass $I_{n+1} \subset I_n$ und $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$. Dann gilt: Es existiert genau ein Punkt $a \in \mathbb{R}$:*

$$
\bigcap_{n=1}^{n\to\infty} I_n = \{a\}
$$

Proof. Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $a_n \leq b_m$ ist a_n monoton wachsend und b_m monoton fallend. Dann gilt wegen $\lim(b_n - a_n) = 0$, dass der Limes von a_n kleiner bzw. gleich als der Limes von b_m ist. Weiter folgt $\lim b_n = \lim(b_n - a_n + a_n) = \lim(b_n - a_n) + \lim a_n = \lim a_n =: a$ und

$$
\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a \leq b_n \Rightarrow a \in \bigcap I_n
$$

Zu zeigen ist noch, dass a einziger Punkt in $\bigcap_{n=1}^{\infty}$ ist. Sei $a, b \in \bigcap I_n$

$$
\Rightarrow a_n \leq a, b \leq b_n \Rightarrow 0 \leq |a-b| \leq \underbrace{b_n - a_n}_{0} \qquad \Rightarrow a = b
$$

□

3.2.3 Häufungspunkte von Folgen in metrischen Räumen

Der Begriff *Häufungspunkt* einer Folge kann als eine Verallgemeinerung des Begriffs Grenzwert verstanden werden.

Definition 20 (Häufungspunkt einer Folge). Sei (X,d) ein metrischer Raum und $(a_n) \subset X$ eine Folge. Ein Punkt $a \in X$ heißt *Häufungspunkt* von $(a_n) :\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \forall m \in \mathbb{N}\ \exists n > m : d(a, a_n) \leq \varepsilon$

geometrische Interpretation In jeder ε-Kugel $B_\varepsilon(a)$ liegen unendlich viele Glieder der Folge (a_n). Ausserhalb können ebenfalls unendlich viele liegen.

Satz 3.2.7. *1. $a \in X$ ist genau dann Häufungspunkt von $(a_n) \subset X$, wenn eine Teilfolge $(a_{n_k}) \subset (a_n)$ mit der Eigenschaft $\lim a_{n_k} = a$ existiert.*

2. Jede konvergente Folge besitzt genau einen Häufungspunkt und zwar den Grenzwert.

Beweis:

1. $\Rightarrow\ \varepsilon_k := \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}$

$$\left.\begin{array}{lcl} \varepsilon_1 = 1\ m = 1\ \exists n_1 > 1 : d(a, a_{n_1}) & \leq & 1 \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{2}\ m = n_1\ \exists n_2 > n_1 : d(a, a_{n_2}) & \leq & \frac{1}{2} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_k = \frac{1}{k}\ m = n_{k-1}\ \exists n_k > n_{k-1} : d(a, a_{n-k}) & \leq & \frac{1}{k} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (a_{n_k}) \subset (a_n) : \lim a_{n_k} = a$

$\Leftarrow$ Sei $\varepsilon > 0$ und $k \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists n_k > k : d(a, a_{n_k}) \leq \varepsilon$

□

2. Sei $\lim a_n = a \stackrel{(1)}{\Rightarrow} a$ ist Häufungspunkt von (a_n)
Eindeutigkeit des Häufungspunktes: Sei b ebenfalls Häufungspunkt von (a_n)

$$\stackrel{(1)}{\Rightarrow} \exists \text{ Teilfolge } (a_{n_k}) \subset (a_n) : \lim_{k \to \infty} a_{n_k} = b$$

Da jede Teilfolge einer konvergenten Folge den gleichen Grenzwert hat, gilt $b = a$. □

Beispiel $X = \mathbb{R} \quad d = |\cdot| \quad a_n = (-1)^n$ besitzt die Häufungspunkte -1 und +1. Denn $a_{2n} = (-1)^{2n} = 1 \to 1$ und $a_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1 \to -1$. Aber (a_n) ist nicht konvergent.

3.2.4 Häufungspunkte von reellen Zahlenfolgen und der Satz von Bolzano/Weierstrass

Lemma 2. *Jede reelle Zahlenfolge $(a_n) \subset \mathbb{R}$ enthält eine monotone Teilfolge.*

Proof. Sei $(a_n) \subset \mathbb{R}$. Setzen $M := \{k \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : a_{k+n} \leq a_k\}$

1. Fall M ist unendlich. $M = \{n_k : n_1 < n_2 < n_3 < \dots\}$

$$\begin{array}{ll} n_1 \in M \Rightarrow \forall n \in M : a_{n_1} \geq a_{n_1+n} & \Rightarrow a_{n_1} \geq a_{n_2} \\ n_2 \in M \Rightarrow \forall n \in M : a_{n_2} \geq a_{n_2+n} & \Rightarrow a_{n_2} \geq a_{n_3} \\ \vdots \quad \vdots & \Rightarrow \vdots \\ a_{n_1} \geq a_{n_2} \geq a_{n_3} & \geq \dots \end{array}$$

2. Fall M ist endlich und $M \neq \emptyset$. Dann $\sup M = \max M$. Für $n_1 > k \Rightarrow n_1 \notin M$, d.h. $\exists m_1 \in \mathbb{N} : a_{n_1+m_1} > a_{n_1}$. Setzen $n_2 := n_1 + m_1$. Dann $n_2 > n_1 \wedge a_{n_2} > a_{n_1}$
$n_2 > n_1 > k \Rightarrow n_2 \notin M$, d.h. $\exists m_2 \in \mathbb{N} : a_{n_2+m_2}$. Setzen $n_3 := n_2 + m_2 \Rightarrow n_3 > n_2 \wedge a_{n_3} > a_{n_2}$
$a_{n_1} < a_{n_2} < a_{n_3} < \dots$

3. Fall $M = \emptyset$, d.h. $\forall k \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N} : a_{k+n} > a_k$ siehe 2. Fall

□

Satz 3.2.8 (Satz von Bolzano/Weierstrass). *Jede beschränkte Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}$ besitzt einen Häufungspunkt.*

Proof. Aus dem Lemma 2 folgt: Es existiert eine Teilfolge $(a_{n_k}) \subset (a_n)$. (a_{n_k}) ist monoton und beschränkt. Daraus folgt nach Satz 3.2.5: $\lim a_{n_k} = a \in \mathbb{R}$ und Satz 3.2.7 legt den Schluss nahe, dass a Häufungspunkt ist. □

Folgerung Eine Zahlenfolge in $\mathbb{R}$ ist genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist und höchstens einen Häufungspunkt besitzt.

Limes superior und Limes inferior

Definition 21. Sei $(a_n) \subset \mathbb{R}$. Dann heißt $\lim_{n\to\infty} \sup a_n := \lim(\sup\{a_k : k \geq n\})$*Limes superior* und $\liminf a_n := \lim(\inf\{a_k : k \geq n\})$ *Limes inferior.*

Schreibweise: $\overline{\lim} = \limsup$ $\qquad \underline{\lim} = \liminf$
Beispiel: $a_n = (-1)^n \quad \sup\{(-1)^k : k \geq n\} = 1 \Rightarrow \limsup(-1)^n = 1$
$\inf\{(-1)^k : k \geq n\} \Rightarrow \liminf(-1)^n = -1$

Bemerkung. Die Folge $b_n := \sup\{a_k : k \geq n\}$ ist monoton fallend oder $+\infty$. Die Folge $c_n := \inf\{a_k : k \geq n\}$ ist monoton wachsend oder $-\infty$. Daher existieren $\limsup a_n = \lim b_n$ und $\liminf a_n = \lim c_n$ immer eigentlich oder uneigentlich, d.h. es gilt $\limsup a_n \in \mathbb{R}$ oder $\limsup a_n = +\infty/-\infty$ und $\liminf a_n \in \mathbb{R}$ oder $\liminf a_n = +\infty/-\infty$.

Satz 3.2.9. *Sei $(a_n) \subset \mathbb{R}$ beschränkt. Dann ist $\overline{\lim}\ a_n$ grösster Häufungspunkt von (a_n) und $\underline{\lim}\ a_n$ kleinster Häufungspunkt von (a_n).*

Beweis Nach dem Satz 3.2.8 (Satz von Bolzano/Weierstrass) besitzt (a_n) einen Häufungspunkt.

$$\inf\{a_n\} \leq \overline{\lim}\ a_n \leq \sup\{a_n\}$$

1. Schritt Zu zeigen: $a = \overline{\lim}\ a_n$ ist Häufungspunkt von (a_n)
Setzen $b_n := \sup\{a_k : k \geq n\}$ ist monoton fallend und nach unten beschränkt.
Daraus folgt nach Satz 3.2.5: $a = \lim b_n = \inf\{b_n\} = \overline{\lim}\ a_n$
Für $k \in \mathbb{N}\ \exists m_k \in \mathbb{N} : a \leq b_{m_k} < a + \frac{1}{k} \Rightarrow \exists n_k \geq m_k : b_{m_k} - \frac{1}{k} < a_{n_k} \leq b_{m_k}$
$\Rightarrow a - \frac{1}{k} \leq b_{m_k} - \frac{1}{k} < a_{n_k} < a + \frac{1}{k}$
$\Rightarrow a - \frac{1}{k} < a_{n_k} < a + \frac{1}{k}$
$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a \stackrel{Satz 3.2.7}{\Longrightarrow} a$ ist Häufungspunkt von (a_n)

2. Schritt a ist grösster Häufungspunkt von (a_n). Sei a' Häufungspunkt von (a_n) $\overset{Satz 3.2.7}{\Longrightarrow}$
$\exists$Teilfolge $(a_{n_k}) : \lim a_{n_k} = a'$
$b_{n_k} = \sup\{a_l : l \geq n_k\} \geq a_{n_k} \Rightarrow a = \lim b_{n_k} \geq \lim a_{n_k} = a'$

□

3.2.5 Cauchyfolgen

Definition 22. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge $(a_n) \subset X$ heißt *Cauchyfolge* $:\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n, m \geq n_\varepsilon : d(a_n, a_m) \leq \varepsilon$$

Satz 3.2.10. *Sei (X, d) ein metrischer Raum und $(a_n) \subset X$ eine konvergente Folge. Dann ist (a_n) eine Cauchyfolge.*
Beweis *Sei $a = \lim a_n$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert $n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_\varepsilon : d(a, a_n) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Für $n, m \geq n_\varepsilon : d(a_n, a_m) \leq d(a_n, a) + d(a, a_m) = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow a_n$ ist eine Cauchyfolge.* □

Bemerkung. In einem beliebigen metrischen Raum ist *nicht* jede Cauchyfolge konvergent.
Beispiel: $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ ist ein metrischer Raum. $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{2}{a_n})$ $\quad a_0 := 1$
$(a_n) \subset \mathbb{Q}, \lim a_n = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Satz 3.2.11 (Cauchysches Konvergenzkriterium in $\mathbb{R}$). *Eine Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}$ ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchyfolge ist.*

Beweis

"$\Rightarrow$" siehe Satz 3.2.10

"$\Leftarrow$" Sei $(a_n) \subset \mathbb{R}$ eine Cauchyfolge. (a_n) ist beschränkt für $\varepsilon = 1$

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}\, \forall n, m > n_1 : \qquad |a_n - a_m| \leq \varepsilon = 1$$
$$\Rightarrow |a_n| = |a_n - a_m + a_m| \leq |a_n - a_m| + |a_m| \leq 1 + |a_m| \qquad \text{für } n, m \geq n_1$$

Für $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_m|, 1 + |a_m|\}$ gilt $|a_n| \leq M\, \forall n \in \mathbb{N}$. Nach dem Satz von Bolzano/Weierstrass (Satz 3.2.8) gilt: $\exists$ Teilfolge $(a_{n_k}) \subset (a_n) : a_{n_k}$ ist konvergent mit $a := \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$.
Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $k_\varepsilon, n_\varepsilon \in \mathbb{N} : |a_{n_k} - a| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ für $k \geq k_\varepsilon$
$|a_n - a_m| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ für $n, m \geq n_\varepsilon$. Wähle $n_{k_0} \geq \{\max n_{k_\varepsilon}, n_\varepsilon\}$. Dann gilt für $n \geq n_{k_0}$: $|a_n - a| = |a_n - a_{n_{k_0}} + a_{n_{k_0}} - a| \leq |a_n - a_{n_{k_0}}| + |a_{n_{k_0}} - a| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow (a_n)$ ist konvergent.

□

Bemerkung. Um die Konvergenz einer Folge in $\mathbb{R}$ nachzuweisen, genügt es, zu zeigen, dass die Folge Cauchyfolge ist. Dabei braucht man den Grenzwert nicht zu kennen.

3.2.6 Vollständigkeit und kompakte metrische Räume

Satz 3.2.12. *In $\mathbb{R}$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) ***Vollständigkeitsaxiom****: Jede nichtleere nach oben beschränkte Menge besitzt ein Supremum.*

(2) ***Satz über monotone Folgen****: Nach Satz 3.2.5 Jede nach oben beschränkte monoton wachsende Folge besitzt einen Grenzwert.*

(3) ***Satz von Bolzano/Weierstrass****: Jede beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge.*

(4) Jede Cauchyfolge hat einen Grenzwert.

(5) Intervallschachtelungsprinzip (Satz 3.2.6)

Beweis

(1)⇒(2) $\lim(a_n) = \sup\{a_n\}$ nach Satz 3.2.5

(2)⇒(3) siehe Beweis zu Satz 3.2.8

(3)⇒(4) siehe Beweis zu Satz 3.2.11

(4)⇒(5) zu zeigen: Sei $I_n = [a_n, b_n]$ eine Intervallschachtelung $\Rightarrow \bigcap I_n = \{s\}$
$\forall n, m \in \mathbb{N}$ gilt: $\left.\begin{array}{l}(a_n) \text{ monoton fallend}\\ (b_n) \text{ monoton wachsend}\end{array}\right\} \Rightarrow b_n - a_n \to 0$
$n \geq m = |a_n - a_m| = a_n - a_m \leq b_m - a_m$
Sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists m_\varepsilon \in \mathbb{N}\ m \geq m_\varepsilon : b_m - a_m \leq \varepsilon$
$\Rightarrow \forall n, m : n \geq m \geq m_\varepsilon \Rightarrow |a_n - a_m| \leq \varepsilon$, d.h. (a_n) ist Cauchyfolge.
$\Rightarrow \lim a_n = s \in \mathbb{R}$
Ferner $\lim b_n = \lim((b_n - a_n) + a_n) = \lim(b_n - a_n) + \lim a_n = 0 + s = s$. Ausserdem
$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq s \leq b_n \Rightarrow s \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$
Eindeutigkeit von s wie im Beweis von Satz 3.2.6

(5)⇒(1) zu zeigen: Sei $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkt. $\Rightarrow \sup M \subset \mathbb{R}$
Sei $b \in \mathbb{R}$ obere Schranke und $a \in M$

1. Fall a ist obere Schranke von $M \Rightarrow a = \sup M$
2. Fall a ist keine obere Schranke von M. Wir setzen $a_1 := a, b_1 := b$ und bilden das Mittel $\frac{a_1+b_1}{2}$

   2.1. Fall $\frac{a_1+b_1}{2}$ ist obere Schranke von M, so setzen wir $a_2 := a_1, b_2 := \frac{a_1+b_1}{2}$

   2.2. Fall $\frac{a_1+b_1}{2}$ ist keine obere Schranke $\Rightarrow M \cap [\frac{a_1+b_1}{2}, b_1] \neq \emptyset$ Wählen $a_2 \in M \cap [\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$ und $b_2 := b_1$. In beiden Fällen gilt, dass $M \cap [a_2, b_2] \neq \emptyset$ und $b_2 - a_2 \leq b_1 - \frac{a_1+b_1}{2} = \frac{a_1-b_1}{2}$. Führen wir diese Prozedur fort, so erhalten wir Intervalle $[a_n, b_n]$ mit $a_n \in M$ und b_n obere Schranke von M.

$b_n - a_n \le \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2} \le \dots \le (\frac{1}{2})^{n-1}(b_1 - a_1) \Rightarrow I_n = [a_n, b_n]$ ist Intervallschachtelung, da $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$ und $\lim(b_n - a_n) = 0$
$\Rightarrow \bigcap I_n = \{s\}, \lim a_n = \lim b_n = s$ zu zeigen ist: $s = \sup M$

α s ist obere Schranke von M. Sei $x \in M \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : x \le b_n \Rightarrow x \le \lim b_n = s$

β s ist kleinste obere Schranke von M. Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists I_{n_\varepsilon} = [a_{n_\varepsilon}, b_{n_\varepsilon}]$ $s - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} \le s$. Da $M \cap I_{n_\varepsilon} \ne \emptyset$ folgt $x_\varepsilon \in M \cap I_{n_\varepsilon} : s - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} \le s \Rightarrow s$ ist kleinste obere Schranke.

□

Die Aussagen (3) und (4) haben grosse Bedeutung in der Mathematik und dienen zur Einführung der Begriffe *Kompaktheit* und *Vollständigkeit von metrischen Räumen.*

Definition 23. Sei (X, d) ein metrischer Raum

(1) X heißt *vollständiger metrischer Raum* :$\Leftrightarrow$ jede Cauchyfolge in X hat einen Grenzwert in X.

(2) X heißt *kompakter metrischer Raum* :$\Leftrightarrow$ Jede Folge aus X enthält eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in X.

Beispiel $d = |\cdot|$

(1) $[a, b]$ ist ein vollständiger metrischer Raum und ein kompakter metrischer Raum.

(2) $\mathbb{R}$ ist ein vollständiger metrischer Raum, allerdings kein kompakter.

(3) $[a, b] \in \mathbb{Q}$ ist keines von beiden

3.3 Reihen

Definition 24. Sei $(a_n) \subset \mathbb{R}$ eine reelle Zahlenfolge. Die Folge

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad a_k \in \mathbb{N}$$

der Partialsummen heißt *Reihe*[6]. Konvergiert (s_n), so heißt $\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim s_n$ *Summe* oder *Wert* der Reihe.

3.3.1 Rechenregeln für konvergente Reihen

Satz 3.3.1. *(1)* $\sum a_n$ *ist konvergent* $\Rightarrow \sum c a_n$ *konvergiert* $c \in \mathbb{R} = c \sum a_n$

(2) $\sum a_n, \sum b_n$ *sind konvergent* $\Rightarrow \sum(a_n + b_n)$ *konvergent*

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergent* $\Rightarrow \sum_{k+1}^{\infty}(\sum_{j=k}^{n_k+1} a_j)$ *konvergent* $1 = n_1 < n_2 < \dots$

[6]Schreibweise: $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n), (\sum_{k=1}^{n} a_k)_{n \in \mathbb{N}}, \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Beweis

(1) $s_n = \sum_{k=1}^n a_k, \lim s_n = \sum_{k=1}^\infty a_k$
$\sum_{k=1}^\infty ca_k = \lim(cs_n) = c \lim s_n = c \sum_{k=1}^\infty a_k$

(2) $s_n = \sum_{k=1}^n a_k, t_n = \sum_{k=1}^n b_k, s_n + t_n = \sum_{k=1}^n (a_n + b_k)$
$\sum_1^\infty (a_k + b_k) = \lim(s_n + t_n) = \lim s_n + \lim t_n = \sum_1^\infty a_k + \sum_1^\infty b_k$

(3) $s_n = \sum_{k=1}^n a_k, s_{\substack{n-1\\l+1}} = \sum_{k=1}^l (\sum_{j=n_k}^{n_{k+1}-1} a_j), 1 = n_1 < n_2 < \dots$
$\lim s_n$ existiert $\Rightarrow \lim_{l\to\infty} s_{\substack{n-1\\l+1}}$ (Jede Teilfolge hat gleichen Grenzwert.)

Beispiele:

geometrische Reihe $a_n = q^n \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad \sum_{n=0}^\infty q^n = 1 + q^1 + q^2 \cdots$ konvergiert für $|q| < 1$ und divergiert für $|q| \geq 1$

Beweis: $s_n = 1 + q + \dots + q^n = \frac{1-q^{n-1}}{1-q}, q \neq 1$

Für $|q| < 1 \quad \lim s_n = \frac{1}{1-q}$

Für $|q| > 1$ ist s_n divergent.

Für $q = -1 \quad s_n = \begin{cases} 1 & n = 2k \\ 0 & n = 2k+1 \end{cases}$ divergent.

Für $q = 1 \quad s_n = n + 1$ divergent.

harmonische Reihe $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$ divergent

alternierende harmonische Reihe $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{1}{n}$ konvergent

3.3.2 Einige Konvergenzkriterien für Reihen

Satz 3.3.2 (Notwendiges Kriterium für Konvergenz). *$\sum a_n$ ist konvergent, wenn $\lim a_n = 0$ ist.*

Proof. $s_n = \sum_{k=1}^n a_k, s_{n+1} - s_n = a_{n+1} \Rightarrow 0 = s - s = \lim s_{n+1} - \lim s_n = \lim a_{n+1}$ □

Bemerkung. Die Umkehrung von Satz 3.3.2 gilt im allgemeinen nicht. Ein Beispiel ist die harmonische Reihe.

Satz 3.3.3 (Cauchykriterium). *$\sum a_n$ konvergent* $:\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n > m > n_\varepsilon : \left|\sum_{k=m}^n a_k\right| \leq \varepsilon$$

Beweis: $s_n - s_m = \sum_{k=m+1}^n a_k \quad \sum a_k$ konvergent $\overset{Def.24}{\Leftrightarrow}$ (s_n) konvergent $\overset{Satz 3.2.11}{\Leftrightarrow}$ (s_n) ist Cauchyfolge.

Definition 25. Absolute Konvergenz Eine Reihe $\sum a_k$ heißt *absolut konvergent* $:\Leftrightarrow$ $\sum |a_k|$ konvergiert.

Korollar: $\sum a_n$ sei absolut konvergent. Dann ist auch $\sum a_k$ konvergent. Zum Beweis nutzt man das Cauchykriterium: Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $n \in \mathbb{N} : |\sum_{k=m+1}^{n} a_k| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| \leq \varepsilon$ für $n > m > n_\varepsilon$ □

Bemerkung: Es gibt konvergente Reihen, die nicht absolut konvergent sind. Bsp.: alternierende harmonische Reihe

Satz 3.3.4. ***weitere Konvergenzkriterien***

(1) ***Monotoniekriterium*** *Sei $a_n \geq 0$. Dann $\sum a_n$ konvergent $\Leftrightarrow$ (s_n) beschränkt.*

(2) ***Vergleichskriterium:***

(2.1) ***Majorantenkriterium*** *Sei $|a_n| \leq c_n, n \geq n_0$. Dann $\sum c_n$ konvergent $\Rightarrow \sum a_n$ absolut konvergent*

(2.2) ***Minorantenkriterium*** *Sei $a_n \geq d_n \geq 0$ für $n \geq n_0$. Dann $\sum d_n$ divergent $\Rightarrow \sum a_n$ divergent*

(3) ***Teleskopsummenkriterium / Verdichtungskriterium*** *Seien $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq 0$. Dann $\sum a_n$ konvergent $\Leftrightarrow \sum 2^n a_{2^n}$ konvergent*

(4) ***Wurzelkriterium*** *Sei $\alpha := \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$. Dann ist $\sum a_n$ konvergent für $\alpha < 1$ und divergent für $\alpha > 1$. Für $\alpha = 1$ existieren sowohl konvergente als auch divergente Reihen.*

(5) ***Quotientenkriterium*** *Seien $\underline{\beta} := \underline{\lim} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|, \overline{\beta} := \overline{\lim} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$. Dann folgt für $\overline{\beta} < 1$, dass $\sum a_n$ konvergent ist und für $\underline{\beta} > 1$, dass $\sum a_n$ divergent ist.*

Beweis

(1) $a \geq 0 \Rightarrow s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n, (s_n)$ nach oben beschränkt und monoton wachsend $\Rightarrow (s_n)$ konvergent

(2) 1) $|\sum_{k=m+1}^{n} a_k| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=m+1}^{n} c_k < \varepsilon$ für $n > m \geq n_\varepsilon \overset{Cauchykrit.}{\Longrightarrow} \sum |a_k|$ absolut konvergent

2) Wäre $\sum a_n$ konvergent, folgt darus, dass auch $\sum d_n$ konvergent ist

(3) $s_n < a_1 + a_2 + \cdots + a_n, t_k := a_1 + 2a_2 + 2^2 a_{2^2} + \cdots + 2^k a_{2^k}$
Für $n \leq 2^k$ gilt $s_n \leq t_k$.
Denn $s_n \leq a_1 + (a_2 + a_3) + \cdots + (a_{2^k} + a_{2^k+1} + \cdots + a_{2^{k+1}-1}) \leq a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^k a_{2^k} = t_k$.
Für $n \geq 2^k$ gilt $s_n \geq \frac{1}{2} t_k$.
Denn $s_n \geq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2^{k-1}+1} + \cdots + a_{2^k}) \geq \frac{a_1}{2} + a_2 + 2a_4 + \cdots + 2^{k-1} a_{2^k} = \frac{1}{2}(a_1 + 2a_2 + 2^2 a_{2^2} + \cdots + 2^k a_{2^k}) = \frac{1}{2} t_k$. Somit gilt nach (1) (s_n) ist konvergent, genau dann wenn (t_k) konvergent ist.

(4) 1. Fall Sei $\alpha > 1, \alpha = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$. Dann existiert eine Teilfolge $(a_{n_k}) \subset (a_n)$: $\lim \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} = \alpha$. Wähle $\varepsilon_0 > 0 : \alpha > 1 + \varepsilon_0$. Dann existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$: $|\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} - \alpha| < \varepsilon_0$ für $k \geq k_0$. Somit ist $-\varepsilon_0 < \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} < \varepsilon_0 \Rightarrow 1 < \alpha - \varepsilon_0 <$

$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \Rightarrow 1 < |a_{n_k}|$ für $k \geq k_0$ Daraus folgt, dass a_{n_k} nicht gegen 0 streben. Daher strebt auch a_n nicht gegen 0. Nach Satz 3.3.2 folgt, dass auch $\sum a_n$ divergiert.

2. Fall Sei $\alpha = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$. Wähle $\beta : \alpha < \beta < 1, b_n := \sup\{\sqrt[k]{|a_k|} : k \geq n\}$ Für b_n gilt $\lim b_n = \alpha$. Wähle $\varepsilon_0 : \alpha + \varepsilon_0 < \beta$. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : \alpha - b_n| < \varepsilon_0$. Somit ist $-\varepsilon_0 < \alpha - b_n < \varepsilon_0$ für $n \geq n_0 \Rightarrow b_n < \alpha + \varepsilon_0$ für $n \geq n_0$. Insobesondere gilt für $n = n_0 : b_{n_0} < \alpha + \varepsilon_0 < \beta$, d.h. $\sqrt[k]{|a_k|} \leq b_{n_0} < \beta \quad \forall k \geq n_0 \Rightarrow |a_k| < \beta^k, k \geq n_0 \overset{\beta<1}{\Rightarrow} \sum \beta^k$ ist konvergent $\overset{(2)}{\Rightarrow} \sum |a_n|$ konvergent. Diese Summe ist sogar absolut konvergent.

(5) $\overline{\beta} := \overline{\lim}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1 \Rightarrow \sum a_n$ konvergent
$\underline{\beta} := \underline{\lim}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| > 1 \Rightarrow \sum a_n$ divergent
$\underline{\lim}_n|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq \underline{\lim}_n \sqrt[n]{|a_n|} \leq \overline{\lim}_n \sqrt[n]{|a_n|} \leq \overline{\lim}_n|\frac{a_{n+1}}{a_n}|$
$b_1 := \sup\{|a_k| : k \geq 1\} \geq |a_1|$
$b_n := \sup\{|\frac{a_{k+1}}{a_k}| : k \geq n\} \geq \frac{a_n}{a_{n-1}}|, n \geq 2$
$\overline{\lim}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim b_n$. Dann:
$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{|a_1| \cdot \frac{|a_2|}{|a_1|} \cdot \frac{|a_3|}{|a_2|} \cdot \ldots \cdot \frac{|a_{n-1}|}{|a_{n-2}|} \cdot \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|}} \leq \sqrt[n]{b_1 b_2 \ldots b_n} \leq \frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}$
$\Rightarrow \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \overline{\lim}\frac{b_1+\cdots+b_n}{n} = \lim \frac{b_1+\cdots+b_n}{n} = \lim b_n = \overline{\lim}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|$
Der Beweis für $\underline{\lim}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq \underline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$ geht analog.

□

Beispiele: Sei $0 \leq \alpha < \infty$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ eine Reihe. Diese ist konvergent für $\alpha > 1$ und divergent für $0 \leq \alpha \leq 1$. Nach dem Quotientenkriterium gilt:
$a_n = \frac{1}{n^\alpha}, |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(n+1)^\alpha} \cdot \frac{n^\alpha}{1} = (\frac{n}{n+1})^\alpha = (1 - \frac{1}{n+1})^\alpha$
$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n (1 - \frac{1}{n+1})^\alpha = 1^\alpha = 1$
Daraus folgt, dass nach dem Quotientenkriterium keine Entscheidung zu treffen ist, ob diese Reihe konvergiert oder nicht.
Nach dem Teleskopsummenkriterium gilt:
$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots \geq 0, \lim a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$ für $0 < \alpha < \infty$. Die Summe $\sum a_n$ konvergiert genau dann, wenn die Summe $\sum 2^n a_{2^n}$ konvergiert.
$a_{2^n} = \frac{1}{(2^n)^\alpha} = \frac{1}{2^{n\alpha}} = (\frac{1}{2^\alpha})^n$
$\sum 2^n a_{2^n} = \sum 2^n (2^{-\alpha})^n = \sum (2^{1-\alpha})^n \Rightarrow \sum 2^n a_{2^n}$ ist konvergent für $\alpha > 1$ und divergent für $\alpha \leq 1$.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ ist konvergent.

Beweis nach dem Wurzelkriterium: $a_n = \frac{n!}{n^n} \quad \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \frac{1}{n}\sqrt[n]{n!}$ Dies ist kompliziert zu berechnen. Daher ein Versuch mit dem Quotientenkriterium:
$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n!(n+1)n^n}{(n+1)^n(n+1)n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \Rightarrow \lim |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow$ Summe ist konvergent.

Alternierende Reihen

Definition 26. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ heißt genau dann *alternierende Reihe*, wenn entweder $a_n \geq 0$ für $n \in \mathbb{N}$ oder $a_n \leq 0$ für $n \in \mathbb{N}$.

Satz 3.3.5. ***Leibnitzsches Kriterium*** *Sei $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots \geq 0$ und $\lim a_n = 0$. Dann ist $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ konvergent.*

Beweis: $s_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k = a_0 - a_1 + a_2 + \cdots + (-1)^n a_n$ Wegen der Monotone gilt:

$$\left.\begin{array}{rcl} s_{2n+2} - s_{2n} = -a_{2n+1} + a_{2n+2} & \leq & 0 \\ s_{2n+3} - s_{2n+1} = a_{2n+2} - a_{2n+3} & \geq & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{lcl} s_0 \geq s_2 \geq s_2 \geq & \ldots & \geq s_{2n} \geq \ldots \\ s_1 \leq s_3 \leq s_5 \leq & \ldots & \leq s_{2n+1} \leq \ldots \end{array} \text{ und}$$

$s_{2n+1} - s_n = -a_{2n+1} \leq 0$

$\Rightarrow s_{2n+1} \leq 2_{2n}$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} s_{2n} & \geq & s_1 \\ s_{2n+1} & \leq & s_0 \end{array} \text{ für alle } n = 0,1,2,\ldots \right\} \overset{Satz 3.2.5}{\Longrightarrow} \begin{array}{rcl} \lim s_{2n} & = & s \\ \lim s_{2n+1} & = & s' \end{array}$$

$s_{2n+1} = s_n - a_{2n+1} \overset{n\to\infty}{\Longrightarrow} s' = s - 0 \Rightarrow s' = s$

noch zu zeigen: $\lim s_n = s$

Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$: $\begin{array}{rcl} |s_{2n} - s| & \leq & \varepsilon \text{ für } n \geq n_0 \\ |s_{2n+1} - s| & < & \varepsilon \text{ für } n \geq n_1 \end{array}$

Für $N := \max\{2n_0, 2n_1 + 1\}$ gilt: $|s_n - s| < \varepsilon$ für $n \geq N$, d.h. $\lim s_n = s$ □

Beispiel

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ konvergiert. $a_n = \frac{1}{n}, a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots \geq 0, \lim a_n = 0$
   $\overset{\text{Satz 3.3.5}}{\Longrightarrow} \sum(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ ist konvergent.

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^{n-1}}{(-n)^n} = \sum\frac{1}{(-1)^n}\cdot\frac{(n+1)^{n-1}}{n^n} = \sum(-1)^n\frac{(n+1)^{n-1}}{n^n}$
   $a_n = \frac{(n+1)^{n-1}}{n^n} = (\frac{n+1}{n})^n \cdot \frac{1}{n+1} = (1+\frac{1}{n})^n \cdot \frac{1}{n+1} \to e \cdot 0 = 0$
   zu zeigen ist noch die Monotonie: $a_n = \frac{(n+1)^{n-1}}{n^n} \geq \frac{(n+2)^n}{(n+1)^{n+1}} = a_{n+1}$
   $(n+1)^{2n} = ((n+1)^2)^n = (n^2+2n+1)^n \geq (n(n+2))^n = (n^2+2n)^n \Rightarrow$ monoton fallend
   $\Rightarrow \sum\frac{(n+1)^{n-1}}{(-n)^n}$ ist konvergent.

Umordnung und Produkt von Reihen

Definition 27. Sei $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv. Dann heißt

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\pi(k)}$$

eine *Umordnung* der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Satz 3.3.6. *Seien $c_n \geq 0$ und $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergent. Dann gilt $\forall \pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} c_{\pi(k)}$ konvergent und es gilt $\sum_{k=1}^{\infty} c_k = \sum_{k=1}^{\infty} c_{\pi(k)}$*

Beweis: Sei $n \in \mathbb{N}, M := \max\{\pi(1), \ldots, \pi(n)\}$
Dann ist $n \leq M$ und es gilt $\sum_{k=1}^{n} c_{\pi(k)} \leq \sum_{k=1}^{M} c_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} c_k < \infty \overset{c_k \geq 0}{\Rightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} c_{\pi(k)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} c_k$
Obige Aussage auf $\sum_1^{\infty} c_k = \sum_1^{\infty} c_{\pi^{-1}(\pi(k))} \leq \sum_1^{\infty} c_{\pi(k)} \Rightarrow \sum_1^{\infty} c_k = \sum_1^{\infty} c_{\pi(k)}$ $\square$

Satz 3.3.7. $\sum a_n$ *ist absolut konvergent* $\Leftrightarrow \forall \pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *bijektiv* $\sum_1^{\infty} a_{\pi(k)}$ *konvergent.*

Ferner gilt: $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\pi(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad \forall \pi$
Beweis:

"$\Rightarrow$" Sei $\sum a_n$ absolut konvergent. $\begin{array}{rcl} 0 \leq a_n^+ := \max\{a_n, 0\} & = & \frac{|a_n| + a_n}{2} \leq |a_n| \\ 0 \leq a_n^- := \min\{a_n, 0\} & = & \frac{|a_n| - a_n}{2} \leq |a_n| \end{array}$

$\overset{\text{Maj.-krit.}}{\Rightarrow} \sum a_n^+, \sum a_n^-$ konvergent

$\overset{\text{Satz 3.3.6}}{\Rightarrow} \sum_1^{\infty} \sum_1^{\infty} a_{\pi(k)}^+ = \sum_1^{\infty} a_k^+, \sum_1^{\infty} a_{\pi(k)}^- = \sum_1^{\infty} a_k^-$

$\Rightarrow \sum_1^{\infty} a_{\pi(k)} = \sum_1^{\infty} (a_{\pi(k)}^+ - a_{\pi(k)}^-) = \sum_1^{\infty} a_{\pi(k)}^+ - \sum_1^{\infty} a_{\pi(k)}^- = \sum_1^{\infty} a_k^+ - \sum_1^{\infty} a_k^- = \sum_1^{\infty} (a_k^+ - a_k^-) = \sum_1^{\infty} a_k$

"$\Leftarrow$" Sei $\sum |a_n|$ divergent. O.B.d.A. sei $\sum a_n$ konvergent (sonst $\pi = id$)
Feststellung: $a_k = a_k^+ - a_k^- \quad |a_k| = a_k^+ + a_k^-$

$\left. \begin{array}{r} \sum |a_n| \text{ divergent} \\ \sum a_n \text{ konvergent} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum a_k^+ = \infty, \sum a_k^- = \infty$

Sei $(a_{\varphi+(k)})$ Teilfolge aller $a_k > 0$ ($a_k \leq 0$ streichen) und $(a_{\varphi-(k)})$ Teilfolge aller $a_k \leq 0$ ($a_k > 0$ streichen)
$s_n^{\pm} := \sum_{k=1}^{n} a_k^{\pm}, t_n^{\pm} := \sum_{k=1}^{n} a_{\varphi\pm(k)}$
$s_n^+ \leq t_n^+$ (da t_n^+ nur positiv, bei s_n^+ kann auch die 0 enthalten sein)
$s_n^- = -t_n^- \Rightarrow \lim_{n\to\infty} = \sum_1^{\infty} a_{\varphi+(k)} = \infty, \lim_{n\to\infty} t_n^- = \sum_1^{\infty} a_{\varphi-(k)} = -\infty$

Definition 28. (1) Eine konvergente Reihe heißt genau dann *unbedingt konvergent* , wenn alle Umordnungen konvergent sind.

(2) Eine konvergente Reihe heißt *bedingt konvergent*, wenn sie nicht unbedingt konvergent ist.

Satz 3.3.7 besagt, dass unbedingt konvergente Reihen vorhanden sind, wenn diese absolut konvergieren.

Satz 3.3.8. ***Riemannsche Umordnungssatz*** *Sei* $\sum_1^{\infty} a_k$ *bedingt konvergent. Dann*

$$\forall S \in \mathbb{R}\ \exists \pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ } \textit{Bijektion} \text{ } : \sum_1^{\infty} a_{\pi(k)} = S$$

Beweis: siehe Heuser S.197-199

Produkte von Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ seien Reihen in $\mathbb{R}$

$$\left(\sum_{i=0}^{M} a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{N}\right) = \sum_{i=0}^{M}\sum_{j=0}^{N} a_i b_j$$

Ordnet man alle $a_j b_k$ (Reihenfolge der Glieder spielt keine Rolle) zu einer Folge $(p_n)_{n=0}^{\infty}$ an, so wird die Reihe $\sum_0^{\infty} p_n$ als *Produktreihe* der Reihen $\sum a_n \sum b_n$ bezeichnet.

Satz 3.3.9. *Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{b=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergent. Dann ist auch $\sum_{n=0}^{\infty} p_n$ absolut konvergent und es gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$$

Beweis:

1. Schritt Zu zeigen ist, dass $\sum |p_n|$ konvergent ist. Nach dem Monotoniekriterium reicht es zu zeigen, dass $\exists K \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \sum_{k=0}^{\infty} |p_k| \leq K$.
Sei $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} : \sum_{k=0}^{n} |p_k| \leq (\sum_{k=0}^{m} |a_k|)(\sum_{k=0}^{m} |b_k|)$
$\leq (\sum_0^{\infty} |a_k|)(\sum_0^{\infty} |b_k|) =: K$

2. Schritt Beweis der Summenformel $q_0+q_1+\cdots+q_{(n+1)^2-1} = (\sum_{k=0}^{n} a_k)(\sum_{k=0}^{n} b_k) \overset{n\to\infty}{\to}$ $(\sum_{k=0}^{\infty} a_k)(\sum_{k=0}^{\infty} b_k)$
$\sum_{k=0}^{\infty} q_k = (\sum_{k=0}^{\infty} a_k)(\sum_{k=0}^{\infty} b_k)$
Da $\sum q_n$ eine Umordnung von $\sum p_n$ ist, folgt nach Satz 3.3.7 und dem ersten Schritt, dass $\sum p_n = \sum q_n = (\sum a_n)(\sum b_n)$

□

Definition 29. Cauchy-Produkt Die Produktreihe $\sum c_n$ heißt *Cauchyprodukt* der Reihen $\sum a_n, \sum b_n$.

Satz 3.3.10. *Seien $\sum a_n, \sum b_n$ absolut konvergent. Dann ist das Cauchyprodukt $\sum c_n$ absolut konvergent und es gilt:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}}_{=:d_n}\right) = \left(\sum a_n\right)\left(\sum b_n\right)$$

Beweis: $\sum c_n = (\sum a_n)(\sum b_n)$ ist nach Satz 3.3.9 absolut konvergent. Da $\sum d_n$ eine spezielle Klammerung von $\sum c_n$ ist, gilt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} d_n$ nach Satz 3.3.1 Punkt 3. □

Bemerkungen zum Cauchyprodukt für $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sei $a_n := b_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ und $d_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Die Reihen $\sum a_n, \sum b_n$ konvergieren nach dem Leibnitzkriterium. Ihr Cauchyprodukt konvergiert nicht, denn

$$
\begin{aligned}
d_n &= \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}} \\
&= (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}} \\
\\
|d_n| &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}} \\
&\geq \sum_{k=0}^{n} \frac{\frac{1}{(k+1)(n-k+1)}}{2} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{n+2} \\
&= \frac{2n+2}{n+2} \\
&\geq 1
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow |d_n|$ konvergiert nicht gegen $0 \Rightarrow d_n \not\to 0 \Rightarrow \sum d_n$ ist divergent. Daraus folgt, dass auch $\sum c_n$ divergent ist.

Ein Beispiel für das Cauchyprodukt ist die *Exponentialreihe*:

$$
e^x := exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}
$$

Dann gilt $exp(x+y) = exp(x) \cdot exp(y)$.

Beweis: $\sum_0^\infty \frac{x^n}{n!}$ ist nach dem Quotientenkriterium absolut konvergent für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
exp(x) \cdot exp(y) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{n!}{k!(n-k)!}}_{=\binom{n}{k}} x^k y^{n-k}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x+y)^n \\
&= exp(x+y)
\end{aligned}$$

□

Korollar:

(1) $\forall x \in \mathbb{R} : exp(x) > 0$
$\forall x \geq 0 : exp(x) \geq 1 > 0$
$\forall x < 0 : (-x) > 0 \Rightarrow exp(-x) > 0 \Rightarrow exp(x) > 0$

(2) $\forall x \in \mathbb{R} : exp(-x) = \frac{1}{exp(x)}$
Nach der Funktionalgleichung ist $exp(x)exp(-x) = exp(x-x) = exp(0) = 1$.

(3) $\forall x \in \mathbb{Z} : exp(n) = e^n$
$n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
$n = 0 : exp(0) = 1 = e^0$
$n \Rightarrow n+1 : exp(n+1) = exp(n) \cdot exp(1) = e^n \cdot e = e^{n+1}$
$n \in \mathbb{Z}, n < 0, (-n) \in \mathbb{N}, e^{-n} = exp(-n) = \frac{1}{exp(n)} \Rightarrow exp(n) = e^n$

□

4 Funktionen und Stetigkeit

Seien $(X,d),(Y,\tilde{d})$ metrische Räume und $D \subset X, f: D \to Y$ eine Funktion.

4.1 Grenzwerte und Stetigkeit

Definition 30. Sei $a \in X$ mit folgenden Eigenschaften: $\exists (a_n) \subset D : a_n \to a$. Die Funktion $f: D \to Y$ hat in a den Grenzwert

$$c :\Leftrightarrow \forall x_n \subset D : \lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = c$$

Dann heißt c *Grenzwert an der Stelle a.*

Schreibweise: $\lim_{x\to a} f(x) = c, \lim_{\substack{x\to a\\ x\in D}} f(x) = c$

Beispiel:

(1) Seien $X = Y = \mathbb{R}$ und der Abstand definiert durch $d(x,y) = |x-y|$. Wie ermittelt man $\lim_{x\to 1} f(x)$ mit $f: D = \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$? $a = 1 \notin D, a_n = 1 + \frac{1}{n} \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$.
Sei $(x_n) \subset D \subset \mathbb{R}\backslash\{1\}$ mit $x_n \to 1$.
$f(x) = \frac{x_n^2-1}{x_n-1} = x_n + 1 \overset{n\to\infty}{\to} 1+1 = 2 \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = 2$
$a \neq 1, x_n \to a, f(x_n) = x_n + 1 \overset{n\to\infty}{\to} a+1$

(2) $X = Y = \mathbb{R} \quad f: D = \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{exp(x)-1}{x}$
Es gilt $\lim_{x\to 0} \frac{exp(x)-1}{x} = 1$
Beweis:

$$\begin{aligned}
exp(x) - 1 - x &= \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \\
|exp(x) - 1 - x| &\leq \frac{|x|^2}{2!} + \frac{|x|^3}{3!} + \frac{|x|^4}{4!} + \cdots \\
&= |x|^2 \left(\frac{1}{2!} + \frac{|x|}{3!} + \frac{|x|^2}{4!} + \cdots \right) \\
&\leq |x|^2 \left(\underbrace{\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots}_{=e-2} \right) \text{für } |x| \leq 1 \\
&= (e-2)|x|^2 \\
\left| \frac{exp(x)-1}{x} - 1 \right| &\leq (e-2)|x| \text{für } x \neq 0, |x| \leq 1
\end{aligned}$$

Sei $x_n \overset{x_n \neq 0}{\rightarrow} 0 \Rightarrow 0 \leq |\frac{exp(x_n)-1}{x_n} - 1| \leq (e-2)x_n \overset{n\rightarrow\infty}{\rightarrow} 0 \Rightarrow \frac{exp(x_n)-1}{x_n} \rightarrow 1$

$$\lim \frac{exp(x)-1}{x} = 1$$

(3) $X = Y = \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$
Vermutung: $f(x) \not\rightarrow c :\Leftrightarrow \exists (x_n) \subset D : x_n \rightarrow a \wedge f(x_n) \not\rightarrow c$
$x_n = (-1)^n \frac{1}{n} \rightarrow 0 \wedge f(x_n) = \begin{cases} 1 & n \text{ gerade} \\ -1 & n \text{ ungerade} \end{cases} \Rightarrow \lim f(x_n)$ existiert nicht.

Definition 31. Sei $f : D \rightarrow Y$ und $a \in D$. f heißt genau dann stetig in a, wenn $\lim_{x\rightarrow a} f(x) = f(a)$. f heißt genau dann stetig in D, wenn f in jedem Punkt a aus D stetig ist.

Beispiel: Die konstante Funktion $f(x) = b$ und die identische Funktion sind stetige Funktionen.
$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases} \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$lim_{x\rightarrow 1} f(x) = 2 \neq 1 = f(1)$ Dies heißt, dass f nicht stetig in 1 ist.

Satz 4.1.1. *Rechenregeln:*

(1) Sei (X, d) und $D \subset X$. Dann gilt:
sind $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in $a \in D$, so sind $f + g, f \cdot g, \lambda f (\lambda \in \mathbb{R})$ stetig in a. Ist $g(a) \neq 0$, so ist auch $\frac{f}{g} : D' \rightarrow \mathbb{R} (D' = \{x \in D : g(x) \neq 0\})$ stetig in a.
***Beweis**: Siehe hierzu Satz 3.3.4. z.B. Sei (x_n) eine Folge mit $x_n \rightarrow a \overset{f,g \text{ stetig}}{\Longrightarrow}$ $f(x_n) \rightarrow f(a), g(x_n) \rightarrow g(a)$*
$\Rightarrow (f+g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) \rightarrow f(a) + g(a) = (f+g)(a)$
Daraus folgt, dass $f + g$ stetig in a sind.

(2) Seien X, Y, Z metrische Räume mit $D \subset X, E \subset Y, f : D \rightarrow Y, g : E \rightarrow Z, f(D) \subset E$. Ist f in $a \in D$ und g in $f(a)$ stetig, so ist $g \circ f$ in a stetig.
***Beweis**:$x_n \rightarrow a \overset{f \text{ stetig}}{\Longrightarrow} f(x_n) \rightarrow f(a) \overset{g \text{ stetig}}{\Longrightarrow} (g \circ f)(x_n) = g(f(x_n)) \rightarrow g(f(a)) = (g \circ f)(a)$*

□

4.2 ε-δ-Stetigkeit

Satz 4.2.1. *Sei $D \subset X, f : D \rightarrow Y$. f ist genau dann im Punkt $a \in D$ stetig, wenn:*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_\varepsilon(a) > 0 \; \forall x \in D : d(x, a) < \delta_\varepsilon(a) \Rightarrow \tilde{d}(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

In Worten: $f(x)$ weicht beliebig wenig von $f(a)$ ab, falls nur x hinreichend nahe bei a liegt oder zu jeder ε-Kugel $\overset{\circ}{B}_\varepsilon\,(f(a))$ existiert eine δ_ε -Kugel relativ zu D mit $f(\overset{\circ}{B}_\varepsilon \cap D) \subset \overset{\circ}{B}_\varepsilon\,(f(a))$.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0 : f(\overset{\circ}{B}_{\delta_\varepsilon}\,(a) \cap D) \subset \overset{\circ}{B}_\varepsilon\,(f(a))$$

Beweis

"$\Rightarrow$" Voraussetzung: $\forall (x_n) \subset D : x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a)$
zu zeigen: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0\ \forall x\ inD : d(x,a) < \delta_\varepsilon \Rightarrow \tilde{d}(f(x), f(a)) < \varepsilon$
Der Beweis wird indirekt geführt. Annahme: $\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in D : d(x,a) < \delta \wedge \tilde{d}(f(x), f(a)) \geq \varepsilon$
Insbesondere gilt: $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in D : d(x_n, a) < \frac{1}{n} \wedge \tilde{d}(f(x_n), f(n)) \geq \varepsilon \overset{n\to\infty}{\Longrightarrow} x_n \to a \wedge f(x_n) \not\to f(a)$ ↯

"$\Leftarrow$" zu zeigen: $\forall (x_n) \subset D$ mit $x_n \to a$ gilt $f(x_n) \to f(a)$
Sei $(x_n) \subset D$ mit $x_n \to a$ und $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung existiert ein $\delta > 0$, so dass $\tilde{d}(f(x), f(a)) < \varepsilon\ \forall x \in D$ mit $d(x,a) < \delta$. Da $x_n \to a$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $d(x_n, a) < \delta\ \forall n \geq n_0 \Rightarrow \tilde{d}(f(x_n), f(a)) < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$.

□

Beispiel: $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}, f(x) := \begin{cases} 0 & x < \sqrt{2} \\ 1 & x > \sqrt{2} \end{cases}$

$f(x)$ ist stetig auf $\mathbb{Q}$.
Beweis: Sei $a \in \mathbb{Q}$. Zeige $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

1. Fall Sei $a > \sqrt{2}$ und $(x_n) \subset \mathbb{Q}$, so dass $x_n \to a$.
Setze $\varepsilon := a - \sqrt{2} > 0$. Für ε gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|x_n - a| < \varepsilon\ \forall n \geq n_0$. Ferner gilt $x_n > \sqrt{2}$ für $n \geq n_0$, denn $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$ für $n \geq n_0 \Rightarrow \underbrace{a - \varepsilon}_{\sqrt{2}} <$

$x_n \Rightarrow f(x_n) = 1\ \forall n \geq n_0$
$\lim_{n\to\infty} f(x) = 1 = f(a)$

2. Fall Sei $a < \sqrt{2}$: analog

4.3 Grenzwerte und Häufungspunkte von Mengen

Definition 32. Sei X ein metrischer Raum und $D \subset X$. Ein Punkt $a \in X$ heißt genau dann Häufungspunkt von D, wenn:

$$\forall \varepsilon > 0 : \left(\overset{o}{B}_\varepsilon\,(a) \backslash \{a\}\right) \cap D \neq \emptyset$$

Achtung: Die Häufungspunkte einer Folge (x_n) stimmen i.a. *nicht* mit dem Häufungspunkt der entsprechenden Menge $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ überein. Zum Beispiel hat die konstante Folge $(a)_n$ hat den Häufungspunkt a. a selbst hat keinen Häufungspunkt.

Satz 4.3.1. *Sei $f : D \to Y, D \subset Y$ und $a \in X$ ein Häufungspunkt von D. Dann gilt:*

$$\lim_{x \to a} f(x) = c \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \forall x \in D \, d(x,a) < \delta \Rightarrow \tilde{d}(f(x), c) < \varepsilon$$

Proof. Der Beweis wird analog zu Satz 4.2.1 geführt. □

Bemerkung. **Negation des Häufungspunktes** $a \in X$ ist genau dann kein Häufungspunkt von D, wenn es eine ε-Kugel um a gibt, die kein Element aus D enthält, ausser eventuell a selbst.

$$\exists \varepsilon > 0 : (B_\varepsilon(a) \setminus \{a\}) \cap D = \emptyset$$

isolierter Punkt $a \in D$ heißt *isolierter Punkt*

$$:\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : (B_\varepsilon(a) \setminus \{a\}) \cap D = \emptyset$$

Korollar Sei $D \subset X, f : D \to Y$. Dann gilt

i f ist in jedem isolierten Punkt von D stetig.

ii f ist genau dann in einem Häufungspunkt von D stetig, wenn $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, d.h. bei der Untersuchung einer Funktion auf Stetigkeit genügt es, nur die Häufungspunkte zu betrachten.

4.4 Stetigkeit, offene und abgeschlossene Mengen

Definition 33. Sei X ein metrischer Raum.

(1) $O \subset X$ heißt genau dann *offen*, wenn es zu jedem Element in O eine ε-Kugel um dieses Element gibt, die ebenfalls ganz in O liegt.

$$\forall x \in O : \overset{\circ}{B}_\varepsilon (x) \subset O$$

(2) $A \subset X$ heißt genau dann *abgeschlossen*, wenn $X \setminus A$ offen ist.

Beispiele:

(i) $\emptyset, X$ sind offen und abgeschlossen

- X offen: klar!
- $\emptyset$ offen: Sei $\emptyset$ nicht offen, dann gilt $\exists x_0 \in \emptyset \lightning \forall \varepsilon > 0 : \overset{o}{B}_\varepsilon (x_0) \cap (X \setminus \emptyset) \neq \emptyset \lightning$
- X ist abgeschlossen, da $X \setminus X = \emptyset$. Die leere Menge ist offen.
- $\emptyset$ ist abgeschlossen, da $X \setminus \emptyset = X$. X ist offen.

(ii) $r \geq 0 \quad \overset{o}{B}_r (a)$ ist offen und $B_r(a)$ ist abgeschlossen.

Satz 4.4.1. *Eine Teilmenge $A \subseteq X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $\forall (x_n) \subset A : (x_n)$ konvergent $\Rightarrow \lim x_n \in A$.*
Beweis

"$\Rightarrow$" *Der Beweis erfolgt durch Kontraposition: Sei A abgeschlossen*
Annahme: $\exists (x_n) \subset A : (x_n)$ konvergent $\Rightarrow \lim x_n \notin A$
$a := \lim x_n$
$\Rightarrow a \in X \backslash A$ *offen, da A nach Voraussetzung abgeschlossen.*
$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \;\; \overset{o}{B}_\varepsilon (a) \subset X \backslash A$
Da x_n gegen a strebt, existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $d(x_n, a) < \varepsilon$ für $n \geq n_0$
$\Rightarrow x_n \in \overset{o}{B}_\varepsilon (a) ↯$

"$\Leftarrow$" *Sei $\forall (x_n) \subset A : x_n$ konvergent $\Rightarrow \lim x_n \in A$*
Annahme: A ist offen. Dann ist zu zeigen:

$$\begin{aligned} A \text{ abgeschlossen} &\Leftrightarrow && X \backslash A \text{ offen} \\ &\Leftrightarrow && \forall x \in X \backslash A \; \exists \varepsilon > 0 : \overset{o}{B}_\varepsilon (x) \subseteq X \backslash A \\ &\Leftrightarrow && \forall x \in X \backslash A \; \exists \varepsilon > 0 : \overset{o}{B}_\varepsilon (x) \cap A = \emptyset \end{aligned}$$

$\Rightarrow \exists x_0 \in X \backslash A \; \forall \varepsilon > 0 : \overset{o}{B}_\varepsilon (x_0) \cap A \neq \emptyset$
Insbesondere existiert ein $x_n \in A : d(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$
$\overset{Voraussetzung}{\Longrightarrow} x_0 = \lim x_n \in A ↯$

□

Korollar Sei A' die Menge der Häufungspunkte von A. Dann ist A genau dann abgeschlossen, wenn A' eine Teilmenge von A ist.
Beweis

"$\Rightarrow$" Sei $a \in A'$. Dann existiert $x_n \subset A, x_n \neq a, x_n \to a \Rightarrow a \in A$

"$\Leftarrow$" Annahme: A ist nicht abgeschlossen.
$\Rightarrow \exists (x_n) \subset A, (x_n)$ ist konvergent, aber $\lim x_n \in A$
$\Rightarrow a$ ist Häufungspunkt von A
$\Rightarrow A' \not\subset A ↯$

□

Satz 4.4.2. *Seien X, Y metrische Räume und $f : D \to Y$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) f ist stetig auf X.

(2) $\forall O \subset Y$ offen : $f^{-1}(O)$ offen

(3) $\forall A \subset Y$ abgeschlossen : $f^{-1}(A)$ abgeschlossen

Beweis

(1) $\Rightarrow$ (2) Sei $O \subset Y$ offen, $x \in f^{-1}(O) \Leftrightarrow f(x) \in O$

$\overset{O\text{ offen}}{\Longrightarrow} \exists \varepsilon > 0 : \overset{o}{B}_\varepsilon (f(x)) \subset O$

$\overset{f\text{ stetig}}{\Longrightarrow} \exists \delta > 0 : f(\overset{o}{B}_\delta (x)) \subset \overset{o}{B}_\varepsilon (f(x)) \subset O$

$\Longrightarrow \overset{o}{B}_\delta (x) \subset f^{-1}(O)$

(2) $\Rightarrow$ (1) Sei $x \in X, \varepsilon > 0 \overset{(2)}{\Rightarrow} f^{-1}(\overset{o}{B}_\varepsilon (f(x)))$ offen

$\Rightarrow \exists \delta > 0 : \overset{o}{B}_\delta (x) \subset f^{-1}(\overset{o}{B}_\varepsilon (f(x)))$

$\Rightarrow f(\overset{o}{B}_\delta (x)) \subset \overset{o}{B}_\varepsilon (f(x)) \Rightarrow f$ stetig

(2) $\Leftrightarrow$ (3) $f^{-1}(Y \backslash M) = f^{-1}(Y) \backslash f^{-1}(M) = x \backslash f^{-1}(M)$

(2) $\Rightarrow$ (3) Sei A abgeschlossen. $O = Y \backslash A$ offen $\Leftrightarrow A = Y \backslash O$

$f^{-1}(A) = f^{-1}(Y) \backslash f^{-1}(O) = X \backslash \underbrace{f^{-1}(O)}_{offen} \Rightarrow$ abgeschlossen

(3) $\Rightarrow$ (2) Sei O offen. Dann ist $A = Y \backslash O$ abgeschlossen. $\Rightarrow f^{-1}(A) = X \backslash \underbrace{f^{-1}(O)}_{offen} \Rightarrow$ abgeschlossen.

□

4.5 Stetigkeit und kompakte Mengen

Definition 34. Sei X ein metrischer Raum. Eine Menge $K \subset X$ heißt genau dann *kompakt*, wenn jede Folge aus K eine konvergente Teilfolge in K enthält.

$$\forall (x_n) \subset K \; \exists (x_{n_k}) \subset (x_n) : \lim_{K \to \infty} x_{n_k} \in K$$

Satz 4.5.1. *(1) Sei $K \subset X$ kompakt. Dann ist K beschränkt und abgeschlossen.*
Beweis*Beschränktheit Annahme: K ist nicht beschränkt.*
$\Rightarrow \exists a \in K \; \forall n \in \mathbb{N} \; \exists x_n \in K : d(x_n, a) \geq n$
$\Rightarrow$ *Es existiert keine konvergente Teilfolge (x_{n_k}) aus (x_n)*↯
Abgeschlossenheit Sei $(x_n) \subset K : x_n \to a \in X$ zu zeigen: $a \in K$
$\overset{kompakt}{\Rightarrow} \exists$ *Teilfolge*$(x_{n_k}) \subset X : \lim(x_{n_k}) \in K$
$\Rightarrow \lim x_n = \lim x_{n_k} = a \in K$

(2) In $\mathbb{R}$ gilt: $K \subset \mathbb{R}$ ist genau dann kompakt, wenn K beschränkt und abgeschlossen ist.
***Beweis** $K \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen und beschränkt. Dann ist zu zeigen, dass K kompakt ist.*
Sei $(x_n) \subset K \Rightarrow (x_n)$ beschränkt $\overset{Satz\ 3.2.8}{\Rightarrow} \exists$ TF$(x_{n_k}) \subset (x_n) : \lim x_{n_k} \in \mathbb{R} \overset{abg.}{\Rightarrow}$
$\lim(x_{n_k}) \in K$

□

Beispiele:

(i) $[a, b]$ ist kompakt, da beschränkt und abgeschlossen.

(ii) Endliche Mengen sind kompakt.

(iii) $]0, 1]$ ist nicht kompakt.

Gleichmässige Stetigkeit

Definition 35. Sei $D \subset X, f : D \to Y$. f heißt genau dann *gleichmässig stetig*, wenn:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \ \forall x, y \in D : d(x, y) < \delta_\varepsilon \Rightarrow \tilde{d}(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Bemerkung: f ist stetig auf $D :\Leftrightarrow \forall x \in D \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon(x) > 0 \ \forall y \in D : d(x, y) < \delta_\varepsilon(x) \Rightarrow \tilde{d}(f(x), f(y)) < \varepsilon$
Offenbar gilt: f ist gleichmässig stetig auf $D \Rightarrow f$ stetig auf D. Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht.
Beispiel: $D =]0, 1] \subset \mathbb{R} = X = Y, f(x) = \frac{1}{x}$
Es gilt, dass f in $]0, 1]$ stetig, aber nicht gleichmässig stetig ist.
Negation von gleichmässiger Stetigkeit $f : D \to Y$ ist auf D nicht gleichmässig stetig:

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta_\varepsilon > 0 \ \exists x_\delta, y_\delta \in D : |x_\delta - y_\delta| < \delta \wedge |f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geq \varepsilon$$

In unserem Fall sei $\varepsilon = 1$. Für $\delta > 0$ wählen wir $x_\delta = \frac{\min\{1,\delta\}}{1+\delta}, y_\delta = \min\{1, \delta\} \in]0, 1]$
Dann:

$$\begin{aligned} |x_\delta - y_\delta| &= y_\delta - x_\delta \\ &= \min\{1, \delta\}(1 - \frac{1}{1+\delta}) \\ &= \min\{1, \delta\}\frac{\delta}{\delta+1} < \delta \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} |f(x_\delta) - f(y_\delta)| &= \left| \frac{1}{x_\delta} - \frac{1}{y_\delta} \right| \\ &= \frac{1}{x_\delta} - \frac{1}{y_\delta} \\ &= \frac{1+\delta}{\min\{1,\delta\}} - \frac{1}{\min\{1,\delta\}} \\ &= \frac{\delta}{\min\{1,\delta\}} \geq \frac{\delta}{\delta} = 1 \\ &\Rightarrow f(x) = \frac{1}{x} \text{ nicht gleichmässig stetig auf }]0, 1] \end{aligned}$$

Satz 4.5.2. *Sei $K \subset X$ kompakt und $f : K \to Y$ stetig. Dann gilt*

(1) *f ist gleichmässig stetig auf K.*
Beweis *Annahme: f ist stetig, aber nicht gleichmässig stetig auf K*
$\exists \varepsilon_0 > 0 \; \forall \delta > 0 \; \exists x_\delta, y_\delta \in K : d(x_\delta, y_\delta) < \delta \wedge \tilde{d}(f(x_\delta), f(y_\delta)) \geq \varepsilon_0$
Insbesondere existiert für $\delta_n = \frac{1}{n}$ ein x_n, y_n aus K mit
$d(x_n, y_n) < \frac{1}{n} \wedge \tilde{d}(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0$
Wegen der Kompaktheit existiert eine Teilfolge $(x_{n_k}) \subset (x_n) : x_{n_k} \to a \in K \Rightarrow$ $(y_{n_k}) \to a \in K$ gilt wegen $d(y_{n_k}, a) \leq d(y_{n_k}, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, a) \overset{K \to \infty}{\to} 0$
Stetigkeit: $f(x_{n_k}) \to f(a), f(y_{n_k}) \to f(a)$ ↯

(2) *$f(K)$ ist kompakt. Sei $(y_n) \subset f(K)$. Dann existiert $x_n \in K : f(x_n) = y_{n_k}$*
$\overset{kompakt}{\Rightarrow} \exists$ *Teilfolge* $(x_{n_k}) \subset (x_n) : x_{n_k} \to a \in K$
$\overset{stetig}{\Rightarrow} y_{n_k} = f(x_{n_k}) \to f(a) \in f(K)$
$\Rightarrow f(K)$ *ist kompakt*

□

Satz 4.5.3. *Sei $K \subset X$ kompakt und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:*

$$\exists p \in K : f(p) = \sup_{X \in K} f(x)$$

f nimmt auf K ihr Maximum an.

$$\exists q \in K : f(q) = \inf_{X \in K} f(x)$$

f nimmt auf K ihr Minimum an.
Beweis: *Für Maximum: Nach Satz 4.5.1 und 4.5.2 wissen wir: Die Tatsache, dass f stetig ist, impliziert, dass $f(K)$ beschränkt ist.*

$$\begin{aligned} M := \sup_{x \in K} f(x) \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \; \exists x_n \in K : f(x_n) \leq M \leq f(x_n) + \frac{1}{n} \\ \overset{K kompakt}{\Rightarrow} \exists \textit{Teilfolge}(x_{n_k}) \subset (x_n) : x_{n_k} \to p \in K \\ \overset{f stetig}{\Rightarrow} f(p) = \lim_{K \to \infty} f(x_{n+k}) = M \end{aligned}$$

□

Bemerkung: Satz 4.5.3 ist im allgemeinen falsch, falls K nicht kompakt ist. Ein Beispiel hierfür ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$. Diese hat auf dem Intervall $]0, \infty[$ weder ein Maximum noch ein Minimum.

Ein Satz über inverse Funktionen

Satz 4.5.4. *Sei X ein kompakter metrischer Raum, die Abbildung $f : X \to Y$ stetig und injektiv. Dann gilt:*

$$f^{-1} : f(X) \to X \textit{ist stetig}$$

Beweis *$Y_0 := f(X)$ ist nach Satz 4.5.2 kompakt. Nach Satz 4.4.2 genügt es, zu zeigen, dass die Urbilder von abgeschlossenen Mengen wieder abgeschlossen sind.*
$A \subset X$ abgeschlossen $\Rightarrow (f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$ abgeschlossen
Sei $(y_n) \subset f(A), y_0 \to b \in Y = f(X)$. Es ist zu zeigen, dass $b \in f(A)$.
$x_n = f^{-1}(y_n) \in A \subset X \overset{X\,kompakt}{\Rightarrow} \exists\,Teilfolge(x_{n_k}) \subset (x_n) : x_{n_k} \to a \in X \overset{A\,abg.}{\Rightarrow} a \in A \overset{f\,stetig}{\quad} b = \lim y_n = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(a) \in f(A)$ □

4.6 Zwischenwert- und Fixpunktsatz

Zwischenwertsätze reeller Funktionen

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}$ nennt man *reelle Funktion.*

Satz 4.6.1. *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ (bzw. umgekehrt). Dann existiert ein*

$$p \in [a,b] : f(p) = 0$$

***Beweis**: Zur Beweisführung wird die Intervall-Halbierungsmethode heran gezogen: Sei $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Wir definieren induktiv $[a_n, b_n] \subset [a,b], n \in \mathbb{N}$*

(i) $[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}], n \geq 1, [a_0, b_0] := [a,b]$

(ii) $b_n - a_n = 2^{-n}(b-a)$

(iii) $f(a_n) \leq 0, f(b_n) \geq 0$

Induktionsanfang: $[a_0, b_0] = [a,b]$
Induktionsschritt: $n \to n+1$
Sei $[a_n, b_n]$ bereits definiert und $m := \frac{a_n+b_n}{2}$. Dann sind folgende zwei Fälle möglich:

1. Fall $f(m) \geq 0$ *Dann ist* $[a_{n+1}, b_{n+1}] := [a_n, m] \subset [a_n, b_n]$

(i) $b_{n+1} - a_{n+1} = m - a_n = \frac{a_n+b_n}{2} - a_n = \frac{1}{2}(b_n - a_n) = \frac{1}{2}2^{-n}(b-a) = 2^{-(n+1)}(b-a)$

(ii) $f(a_{n+1}) = f(a_n) \geq 0, f(b_{n+1}) = f(m) \geq 0$

2. Fall $f(m) < 0$ *Dann ist* $[a_{n+1}, b_{n+1}] := [m, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$

(i) $b_{n+1} - a_{n+1} = b_n - m = b_n - \frac{a_n+b_n}{2} = \frac{1}{2}(b_n - a_n) = \frac{1}{2}2^{-n}(b-a) = 2^{-(n+1)}(b-a)$

(ii) $f(a_{n+1}) = f(m) \leq 0, f(b_{n+1}) \geq 0$

$$\left.\begin{array}{r} (a_n) mon.\ wachsend\ u.\ beschr. \\ (b_n) mon.\ fallend\ u.\ beschr. \\ b_n - a_n = 2^{-n}(b-a) \end{array}\right\} \Rightarrow \lim a_n = \lim b_n = p$$

Die Stetigkeit von f und die vorige Fallunterscheidung liefern:

$$\left.\begin{array}{l} f(p) = \lim f(a_n) \leq 0 \\ f(p) = \lim f(b_n) \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(p) = 0$$ □

Folgerung 1. 2. Zwischenwertsatz Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$ liegt zwischen $f(a)$ und $f(b)$. Dann existiert $p \in [a, b] : f(p) = c$.
Beweis Sei $f(a) < c < f(b)$. Wir definieren eine Funktion $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ durch $g(x) := f(x) - c$. Die Funktion g ist stetig mit $g(a) = f(a) - c < 0, g(b) = f(b) - c > 0$. Dann folgt nach Satz 4.6.1 $\exists p \in [a, b] : g(p) = f(p) - c = 0 \Rightarrow f(p) = c$ □

Folgerung 2. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f([a, b]) \subset [a, b]$. Dann existiert $p \in [a, b] : f(p)$. p heißt *Fixpunkt*.

Bemerkung: Der Zwischenwertsatz gilt nicht, wenn rationale Zahlen betrachtet werden. Beispielsweise gibt es für die Funktion $f(x) := x^2 - 2$ keinen Fixpunkt im Intervall $[0, 2]$, wenn das x aus den rationalen Zahlen stammt.

4.6.1 Ein Satz über reelle inverse Funktionen

Definition 36. Sei $f : D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}$ eine reelle Funktion. Sie heißt genau dann *monoton wachsend* auf D, wenn

$$\forall x_1, x_2 \in D : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

Sie heißt genau dann *streng monoton wachsend* auf D, wenn

$$\forall x_1, x_2 \in D : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Sie heißt genau dann *monoton fallend* auf D, wenn

$$\forall x_1, x_2 \in D : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

Sie heißt genau dann *streng monoton fallend* auf D, wenn

$$\forall x_1, x_2 \in D : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Satz 4.6.2. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige, streng monoton wachsende (fallende) Funktion und $A = f(a), B = f(b)$. Dann ist $f : [a, b] \to [A, B]([B, A])$ bijektiv und $f^{-1} : [A, B]([B, A]) \to [a, b]$ ist stetig und streng monoton wachsend (fallend).* ***Beweis*** *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend. Diese Funktion ist injektiv, denn $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.*
$f : [a, b] \to [A, B]$ ist surjektiv, denn wenn $A < c < B$ dann folgt nach dem zweiten Zwischenwertsatz $\exists p \in [a, b] : f(p) = c$. Daher ist f bijektiv von $[a, b] \to [A, B]$.
f^{-1} ist streng monoton wachsend. Es ist zu zeigen, dass $y_1, y_2 \in [A, B] : y_1 < y_2 \to f^{-1} < f^{-1}$.
Annahme: $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2) \to y_1 = f(f^{-1}(y_1)) \geq f(f^{-1}(y_2)) = y_2 \lightning$
$f^{-1}[A, B] \to [a, b]$ ist stetig. Nach Satz 4.5.4 ist auch f auf der kompakten Menge $[a, b]$ stetig und bijektiv. Daher folgt, dass $^{-1} : f([A, B]) = [A, B] \to [a, b]$ stetig. □

4.6.2 Der Banachsche Fixpunktsatz in vollständigen metrischen Räumen

Zur Erinnerung sollte sich nochmals Definition 23 anschauen.
Bemerkung Eine abgeschlossene Teilmenge A eines vollständigen metrischen Raumes X ist in der Metrik von X ebenfalls ein vollständiger metrischer Raum.
Beweis: Sei $(x_n) \subset A$ eine Cauchyfolge. Dann ist $(x_n) \subset X$ eine Cauchyfolge. Da X vollständig ist, existiert ein $a \in X$ für das gilt $\lim x_n = a$. Aufgrund der Tatsache, dass A abgeschlossen ist, gilt nach Satz 4.4.1, dass $a \in A$ liegt. Daher folgt, dass A abgeschlossen ist.

Beispiele: $X = \mathbb{R}, [a, b]$ ist ein vollständiger metrischer Raum.
$[a, \infty[$ ist ein vollständiger metrischer Raum.
$]\infty, a]$ ist ein vollständiger metrischer Raum.
$]a, \infty[$ ist *kein* vollständiger metrischer Raum.

Satz 4.6.3 (Banachscher Fixpunktsatz). *Dieser Satz wird auch* Prinzip der kontrahierenden Abbildung *genannt.*
Sei (X, d) *ein vollständiger metrischer Raum und* $f : X \to X$ *eine* kontrahierende Abbildung *, d.h.*

$$\exists 0 \leq \alpha < 1 \; \forall x, y \in X : d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)$$

Dann gilt:

(1) $\exists!! a \in X : f(a) = a$
a heißt Fixpunkt *von* f*.*

(2) Sei $x_0 \in X, x_{n+1} = f(f_x), n = 0, 1, 2, \ldots \Rightarrow \lim x_n = a$
Fehlerabschätzung: $d(a, x_n) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_0, x_1)$

Beweis *Sei* $x_0 \in X$ *beliebig und* $x_{n+1} = f(f_x), n = 0, 1, 2, \ldots$

1. Schritt (x_n) *ist eine Cauchyfolge. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= d(f(x_n), f(x_{n-1})) \\ &\leq \alpha d(x_n, x_{n-1}) \\ &\leq \alpha^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \\ &\leq \ldots \leq \alpha^n d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

Nach der Dreiecksungleichung gilt

$$\begin{aligned} n > m : d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{x-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \cdots + d(x_{m+1}, x_m) \\ &\leq (\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} + \cdots + \alpha^n) d(x_1, x_0) \\ &= \alpha^m (\alpha^{n-m-1} + \alpha^{n-m-2} + \cdots + 1) d(x_1, x_0) \\ &= \alpha^m \left(\frac{1 - \alpha^{n-m}}{1 - \alpha} \right) d(x_1, x_0) \\ &\leq \frac{\alpha^m}{1 - \alpha} d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

Also hat man $d(x_n, x_m) \leq \frac{\alpha^m}{1-\alpha} d(x_1, x_0)$ für $n > m$. Aus der Tatsache, dass α zwischen 0 und 1 liegt, folgt $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n, m \geq n_\varepsilon : d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$. Daher folgt weiter, dass (x_n) eine Cauchyfolge ist. Weiterhin ist bekannt, dass X vollständig ist. Dies bedingt, dass ein $a \in X$ existiert, für das $\lim x_n = a$ ist. Wegen der Dreiecksungleichung $|d(a, x_m) - d(x_m, x_n)| \leq d(a, x_n)$ ergibt sich für $n \to \infty$, dass $d(a, x_n) \to 0 \Rightarrow d(a, x_m) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_m) \leq \frac{\alpha^m}{1-\alpha} d(x_1, x_0)$. Diese Formel impliziert die Fehlerabschätzung.

2. Schritt *a ist Fixpunkt von f: $a = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$. Da f stetig ist, kann man das wie folgt umformen: $= f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(a)$*

□

Eindeutigkeit von Fixpunkten Annahme: $\exists a, b \in X : f(a) = a, f(b) = b$. Dann:

$$
\begin{aligned}
d(a,b) = d(f(a), f(b)) &\leq \alpha d(a,b) \\
\Rightarrow \underbrace{(1-\alpha)}_{>0} d(a,b) &\Rightarrow d(a,b) \leq 0 \\
&\Rightarrow d(a,b) = 0 \\
&\Rightarrow a = b
\end{aligned}
$$

□

Beispiel: Berechnung von $\sqrt{a}$, Abbildung: $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x}), x = [\sqrt{a}, \infty[, d = |\cdot|$

1. $f([\sqrt{a}, \infty[\subset [\sqrt{a}, \infty[$
2. f ist kontrahierend: $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|\ \alpha = \frac{1}{2}$
3. $f(p) = \sqrt{p}, p = \sqrt{a}$ ist ein Fixpunkt.

Rechenbeispiel: $a = 2, f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x}), [\sqrt{2}, \infty[$

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 2 \\
x_1 &= f(x_0) = f(2) = 3/2 \\
x_2 &= f(x_1) = f(3/2) = 1/2(3/2 + 4/3) = 17/12 = 1,41\overline{6} \\
x_3 &= f(x_2) = f(17/12) = 1/2(17/12 + 24/17) = 579/408 = 1,41415\overline{6} \\
x_4 &= 1,4142135623746\ldots
\end{aligned}
$$

4.7 Elementare Funktionen

Bemerkungen über Grenzwerte und Stetigkeit von reellen Funktionen Sei $D \subset \mathbb{R}, f : D \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion, $a \in \mathbb{R}$ ist Häufungspunkt von D. Man schreibt:

(1) $\lim_{x\to a+0} f(x) = c :\Leftrightarrow \forall (x_n) \subset D\ x_n > a, x_n \to a \Rightarrow f(x_n) = c$ f hat in c den *rechtsseitigen Grenzwert*.

(2) $\lim_{x\to a-0} f(x) = c :\Leftrightarrow \forall (x_n) \subset D\ x_n < a, x_n \to a \Rightarrow f(x_n) = c$ f hat in c den *linksseitigen Grenzwert.*

(3) $\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a) :\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D : 0 \leq x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$
f ist *linksseitig stetig.*

(4) $\lim_{x\to a-0} f(x) = f(a) :\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D : 0 \leq a - x < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$
f ist *rechtsseitig stetig.*

(5) $\lim_{x\to\infty} f(x) = c :\Leftrightarrow \forall (x_n) \subset D(x_n \to \infty \Rightarrow f(x_n) \to c)$

(6) $\lim_{x\to a} f(x) = \infty :\Leftrightarrow \forall (x_n) \subset D$
$\{a\}(x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to \infty)$

4.7.1 Polynome und rationale Funktionen

Eine Funktion $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $P(x) = a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_{k-1} x + a_k$ $(a_0 \neq 0, k = 0, 1, 2, \ldots)$ heißt *Polynom* k-ten Grades.

Eine Funktion $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ mit P, Q Polynomen heißt *rationale Funktion.*

Es gilt: $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, $R : D \to \mathbb{R}, D = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}$ **Beweis**: siehe Satz 4.2.1. Ferner gilt:

$$\lim_{x\to\infty} P(x) = \begin{cases} \infty, a_0 > 0, k \geq 1 \\ -\infty, a_0 < 0, k \geq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\infty} P(x) = \begin{cases} \infty, a_0 > 0, k \text{ gerade} \\ -\infty, a_0 < 0, k \text{ gerade} \\ -\infty, a_0 > 0, k \text{ ungerade} \\ \infty, a_0 < 0, k \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$P(x) = x^k (a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_k}{x^k}), x \neq 0$$

4.7.2 Exponential-, Logarithmus- und Potenzfunktionen

$$exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

ist absolut konvergent für alle $x \in \mathbb{R}$. Somit definiert $exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf $\mathbb{R}$. Sie heißt *Exponentialfunktion.*

Satz 4.7.1. *Für $exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gelten folgende Eigenschaften:*

i $exp(0) = 1, exp(1) = e, exp(x + y) = exp(x) \cdot exp(y), x, y \in \mathbb{R}$
zum Beweis siehe Beispiele und Korollar aus dem vorigen Kapitel

ii $exp(x) > 0, x \in \mathbb{R}$
zum Beweis siehe Beispiele und Korollar aus dem vorigen Kapitel

iii $exp(-x) = (exp(x))^{-1}$
zum Beweis siehe Beispiele und Korollar aus dem vorigen Kapitel

iv $e^n = exp(n), n \in \mathbb{Z}$
zum Beweis siehe Beispiele und Korollar aus dem vorigen Kapitel

v Abschätzung des Rest:
$exp(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!} + r_{N+1}(x)$, *wobei* $|r_{N+1}(x)| \leq 2\frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}$ *für* $|x| \leq 1 + \frac{N}{2}$
Beweis:

$$\begin{aligned}
|r_{N+1}(x) &= \left|\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right| \\
&\leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!} = \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} + \frac{|x|^{N+2}}{(N+2)!} + \frac{|x|^{N+3}}{(N+3)!} + \cdots \\
&= \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}\left(1 + \frac{|x|}{N+2}\right. \\
&\quad \left. + \frac{|x|^2}{(N+2)(N+3)} + \frac{|x|^3}{(N+2)(N+3)(N+4)} + \cdots\right) \\
&\leq \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}\left(1 + \frac{|x|}{N+2} + \frac{|x|^2}{(N+2)^2} + \frac{|x|^3}{(N+2)^3} + \cdots\right) \\
&\leq \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^k\right) \text{ für } \frac{|x|}{N+2} \leq \frac{1}{2} \\
&= \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \\
&= 2\frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \text{ für } |x| \leq 1 + \frac{N}{2}
\end{aligned}$$

Satz 4.7.2. *i Die Exponentialfunktion* $exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist stetig, streng monoton wachsend und bildet* $\mathbb{R}$ *bijektiv auf* $]0, \infty[$ *ab.*

ii Die Umkehrfunktion $ln :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ *ist stetig, monoton wachsend und heißt der* natürliche Logarithmus. *Es gilt die Funktionalgleichung* $ln(xy) = ln(x) + ln(y)$.

Beweis

zu i **Stetigkeit von exp** exp ist in $x = 0$ stetig:
$|exp(x) - exp(0)| = |exp(x) - 1| \leq 2\frac{|x|}{1!} = 2x$ für $|x| \leq 1 (N = 0)$
$\Rightarrow \lim_{x\to 0} exp(x) = exp(0) = 1 \Rightarrow$ Stetigkeit in $x = 0$
Stetigkeit in $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig
$\lim_{x\to x_0} exp(x) = \lim_{x\to x_0}(exp(x - x_0) \cdot exp(x_0))$
$\Rightarrow \lim_{x\to x_0\to 0} exp(x - x_0) \cdot \lim_{x\to x_0} exp(x_0) = exp(0) \cdot \exp(x_0) = exp(x_0)$
streng monoton wachsend

$x_0 < x_1 \Rightarrow exp(x_1) = exp(x_1 - x_0) \cdot exp(x_0) > exp(x_0) \Rightarrow$ streng monoton wachsend
$exp : \mathbb{R} \to]0, \infty[$ **bijektiv**
Die Exponentialfunktion ist bijektiv, da sie streng monoton wachsend ist. Ferner gilt: $0 < exp(x) < \infty$ für $x \in \mathbb{R}$ (Satz 4.7.1)

zu ii $ln := (exp)^{-1};]0, \infty[$ ist stetig und streng monoton wachsend auf jedem kompakten Intervall $[a, b] \subset]0, \infty[$ (nach Satz 4.6.2) und damit auch auf $]0, \infty[$
$x_0 < x_1 \Rightarrow f(x_0) < f(x_1)$
Funktionalgleichung:
$exp(ln(x) + ln(y)) = exp(ln(x)) \cdot exp(ln(y)) = x \cdot y$

4.7.3 Exponentialfunktion zur Basis a

Definition 37. Exponentialfunktion zur Basis a Sei $a > 0, a \neq 1$. Dann heißt $exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $exp_a(x) := exp(x\ ln(a))$ *Exponentialfunktion* zur Basis a.

Satz 4.7.3. *Die Funktion* $exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist stetig und es gilt:*

i $exp_a(x + y) = exp_a(x) \cdot exp_a(y), x, y \in \mathbb{R}$

ii $exp_a(n) = a^n, n \in \mathbb{Z}$

iii $exp_a(\frac{p}{q}) = \sqrt[q]{a^p} =: a^{\frac{p}{q}}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$

Beweis: Stetigkeit: da $x \mapsto x \cdot \underbrace{ln(a)}_{Konstante}$
$f(x) = x \cdot ln(a) \quad g(x) = exp(x) \quad exp_a(x) = g(f(x))$ Die Komposition von stetigen Funktionen ist wieder stetig.

i)

$$\begin{aligned} exp(x + y) = & & exp((x + y)ln(a)) \\ = & & exp(x \cdot ln(a)) \cdot exp(y \cdot ln(a)) \\ = & & exp_a(x) \cdot exp_a(y) \end{aligned}$$

ii) $n \in \mathbb{N} : exp_a(n) = exp(n \cdot ln(a)) = exp(ln(a^n)) = a^n$
$-n \in \mathbb{N} : exp_a(n) = \frac{1}{exp(-n)} = \frac{1}{a^{-n}} = a^n$

iii) $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$
$a^p = exp_a(p) = exp_a(q\frac{p}{q}) = \left(exp_a(\frac{p}{q})\right)^q \Rightarrow exp_a(\frac{p}{q}) = \sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}$

Bemerkung: Satz 4.7.3 rechtfertigt die Bezeichnung $a^x := exp_a(x)$. Für $a = e$ hat man $e^x = exp_e(x) = exp(x)$, da $ln(e) = 1$. Die Funktionalgleichung aus Satz 4.7.3 i) hat jetzt die Form $a^{x+y} = a^x \cdot a^y, x, y \in \mathbb{R}$

Satz 4.7.4. *Für* $a, b > 0$ *und* $x, y \in \mathbb{R}$ *gilt:*

i) $(a^x)^y = a^{xy}$
Wegen $a^x = exp(x \cdot ln(a))$ *gilt* $ln(a^x) = x \cdot ln(a)$. *Damit* $(a^x)^y = exp(y \cdot ln(a^x)) = exp(xy \cdot ln(a)) = a^{xy}$

ii) $a^x \cdot b^x = (ab)^x$
$a^x b^x = exp(x \cdot ln(a)) \cdot exp(x \cdot ln(b)) = exp(x(ln(a) + ln(b))) = exp(x(ln(ab))) = (ab)^x$

iii) $(\frac{1}{a})^x = \frac{1}{a^x} = a^{-x}$
$(\frac{1}{a})^x = (a^{-1})^x = a^{-x}$

Es gilt $exp_a : \mathbb{R} \to]0, \infty[$ ist stetig und bijektiv für $a > 0, a \neq 1$. Ferner: streng monoton wachsend für $a > 1$ und streng monoton fallend für $a < 1$. Die Umkehrfunktion $log_a := (exp_a)^{-1}$ heißt *Logarithmus* zur Basis a. Es gilt $log_a :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ ist stetig und streng monoton wachsend für $a > 1$ und streng monoton fallend für $a < 1$.
Beweis: $\log_a x = \frac{ln(x)}{ln(a)}$
$exp_a log_a(x) = exp(\frac{ln(x)}{ln(a)} \cdot ln(a)) = exp(ln(x)) = x$

4.7.4 Die Potenzfunktion

Definition 38. Sei $\alpha > 0$. Dann heißt $f_\alpha(x) = x^\alpha$ für $x \geq 0$ *Potenzfunktion* mit Exponent α.

Es gilt: $f_\alpha [0, \infty[\to [0, \infty[$ ist stetig, bijektiv und streng monoton wachsend.
Beweis: $x^\alpha = \exp(\alpha \ln x) = e^{\alpha \ln x}$ □

4.8 Konvergenz in $\mathbb{C}$

4.8.1 Der vollständige metrische Raum der komplexen Zahlen

$\mathbb{C}$ sei der Körper der komplexen Zahlen.

$$z = x + iy \qquad i = \sqrt{-1} \qquad i^2 = -1 \qquad x, y \in \mathbb{R}$$

$$x = \Re z \qquad \text{Realteil von } z$$

$$y = \Im z \qquad \text{Imaginärteil von } z$$

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 + iy_1 \\ z_2 &= x_2 + iy_2 \\ z_1 + z_2 &:= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \\ z_1 z_2 &:= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \end{aligned}$$

$$z_1 = x_1 + iy_1 = z_2 = x_2 + iy_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2, \Re z_1 = \Re z_2, \Im z_1 = \Im z_2$$

konjugiert komplexe Zahl $\overline{z} = x - iy$
$z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$
$\Re z = \frac{1}{2}(z + \overline{z}), \Im z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$

Rechenregeln $\overline{\overline{z}} = z, \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

Betrag einer komplexen Zahl $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$

$|\Re z| \leq |z|, |\Im z| \leq |z|$

(1) $|z| \geq 0, |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
Der Nachweis hierzu ist trivial zu führen.

(2) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
Beweis: $|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) = (z_1 z_2)(\overline{z_1} \cdot \overline{z_2}) = (z_1\overline{z_1})(z_2\overline{z_2}) = |z_1|^2|z_2|^2$

(3) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
Beweis: $|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = z_1\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_2} = |z_1|^2+(z_1\overline{z_2}+ z_2\overline{z_1})+|z_2|^2 = |z_1|^2+2\Re(z_1\overline{z_2})+|z_2|^2 \leq |z_1|^2+2|z_1 \underbrace{\overline{z_2}}_{=|z_2}|+|z_2|^2 = (|z_1|^2+|z_2|^2)^2$

(4) $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$
Hierdurch wird eine Metrik auf $\mathbb{C}$ erklärt.

Satz 4.8.1. *(1)* $\lim z_n = z \Leftrightarrow \lim \Re z_n = \Re z \wedge \lim \Im z_n = \Im z$
Beweis: Dies folgt aus $\max\{|\Re z|, |\Im z|\} \leq |z| \leq 2\max\{|\Re z|, |\Im z|\}$

(2) $\lim z_n = z \Leftrightarrow \lim \overline{z_n} = \overline{z_n}$
Beweis: $|z_n - z| = |\overline{z_n - z}| = |\overline{z_n} - \overline{z}|$

(3) $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ *ist ein vollständiger metrischer Raum.*
Beweis: Dies folgt aus dem Punkt (1) und der Tatsache, dass $\mathbb{R}$ *vollständig ist*

$\square$

Reihen in $\mathbb{C}$

$$(z_n) \subset \mathbb{C} \quad s_n := \sum_{k=0}^{n} z_k \quad \text{n-te Partialsumme}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} z_k := (s_n) \quad \text{Reihe}$$

Für den Wert der Reihe gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} z_k := \lim s_n \quad \text{falls } (s_n) \text{ konvergiert}$$

Weiterhin gilt:

$$\overline{\sum_{k=0}^{\infty} z_k} = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{z_k}$$

Beweis: $\overline{\lim s_n} = \overline{\lim \sum_{k=0}^{\infty} z_k} = \lim \overline{\sum_{k=0}^{\infty} z_k} = \lim \sum_{k=0}^{\infty} \overline{z_k} = \lim \overline{s_n}$
In $\mathbb{C}$ existiert *keine* Kleiner-Gleich-Beziehung. Für Reihen gelten im wesentlichen die gleichen Aussagen wie für Reihen in $\mathbb{R}$.

Die Exponentialfunktion in $\mathbb{C}$

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ ist für jedes $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergent, d.h. $\sum \frac{|z^k|}{k!} < \infty$.

Definition 39.

$$e^z := \exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad z \in \mathbb{C} \quad \exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

Eigenschaften:

(i) Funktionalgleichung: $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2} \quad z_1, z_2 \in \mathbb{R}$
Beweis: Die Multiplikation von Reihen ist ähnlich wie im Reellen (siehe voriges Kapitel).

(ii) $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$
Beweis: $\overline{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}} = \sum_{k=0}^{\infty} (\overline{\frac{z^k}{k!}}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overline{z}^k}{k!}$

(iii) $|e^z| = e^{\Re(z)} > 0$
Beweis: $e^z = e^{\Re(z)+i\Im(z)} = e^{\Re(z)} + e^{i\Im(x)} \Rightarrow |e^z| = |e^{\Re(z)}||e^{i\Im(x)}| = e^{\Re(z)} \cdot |e^{i\Im(x)}|$
zu zeigen: $|e^{i\Im(z)}| = 1$
$|e^{i\Im(z)}|^2 = e^{i\Im(z)} \cdot \overline{e^{i\Im(z)}} = e^{i\Im(z)}e^{-i\Im(z)} = 1$

(iv) $|e^z - \sum_{k=0}^{N} \frac{z^k}{k!}| \leq 2\frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!} \quad |z| \leq 1 + \frac{N}{2}$ Der Beweis wird wie im Reellen geführt.

(v) $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig Der Beweis wird wie im Reellen geführt.

(vi) $\lim_{z\to 0} \frac{e^z-1}{z} = 1$ Beweis: $|e^z - (1+z)| \leq |z^2|$ für $|z| \leq \frac{3}{2}$
$\Rightarrow |\frac{e^z-1}{z} - 1| \leq |z|^2$
$\Rightarrow \lim_{z\to 0} \frac{e^z-1}{z} = 1$

4.8.2 Trigonometrische Funktionen

Definition 40. Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\cos x := \Re(e^{ix})$$
$$\sin x := \Im(e^{ix})$$

cos heißt *Kosinus* und sin heißt *Sinus*.

Also ist $|e^{ix}|^s = 1 = \cos^2 x + \sin^2 x$. Insbesondere folgt, dass $|\cos x|, |\sin x| \leq 1$.

Satz 4.8.2. *Seien $x, y \in \mathbb{R}$:*

(i)

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}$$

(ii)

$$\cos(-x) = \cos x \qquad \cos 0 = 1$$
$$\sin(-x) = -\sin x \qquad \sin 0 = 0$$

(iii) Additionstheoreme:

$$\begin{aligned}
\cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \\
\sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \\
\sin x - \sin y &= 2\cos(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{x-y}{2}) \\
\cos x - \cos y &= -2\sin(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{x-y}{2})
\end{aligned}$$

(iv) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

(v) $\left.\begin{array}{l}\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\end{array}\right\}$ *stetig*

(vi) Der Kosinus hat eine kleinste positive Nullstelle a *mit* $1 < a < 2$*. Man setzt* $\pi := 2a \Rightarrow \sin \frac{\pi}{2} = 1$

(vii) Kosinus und Sinus sind 2π*-periodisch:*

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x \qquad \cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$$
$$\sin(x + 2\pi) = \sin x \qquad \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$$

(viii) $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *ist streng monoton wachsend.*
$\cos : [0, \pi]$ *ist streng monoton fallend*

5 Differentiation reeller Funktionen

5.1 Definition, Rechenregeln und Beispiele

Definition 41. Sei $D \subseteq \mathbb{R}, f : D \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und $a \in D$ ein Häufungspunkt von D. f heißt genau dann differenzierbar in a, wenn gilt:

$$\exists c \in \mathbb{R}\ \exists r : D \backslash \{a\} \to \mathbb{R} \text{ mit } \lim_{x \to a} \frac{r(x)}{x-a} = 0$$

$$\forall x \in D : f(x) = f(a) + c(x-a) + r(x)$$

c ist eindeutig bestimmt, denn:
Seien $c_1, c_2 \in \mathbb{R} : \forall x \in D : f(x) = f(a) + c_1(x-a) + r_1(x)$ und $f(x) = f(a) + c_2(x-a) + r_2(x)$ und $\lim_{x \to a} \frac{r_1(x)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{r_2(x)}{x-a} = 0$
$\Rightarrow c_1(x-a) + r_1(x) = c_2(x-a) + r_2(x)$
$\Rightarrow c_1 = c_2 + \frac{r_2(x)}{x-a} - \frac{r_1(x)}{x-a}$
$\Rightarrow c_1 = c_2$ Schreibweise: $f'(a) = c, \frac{df}{dx}(a) = c$
c heißt *Ableitung* von f an der Stelle a. f heißt genau dann *differenzierbar* in D, wenn f in jedem Punkt $a \in D$ diffenzierbar ist.

Bemerkung. Die Differenzierbarkeit einer Funktion f in $a \in D$ ist gleichbedeutend mit der Approximierbarkeit durch eine affin-lineare Funktion, d.h. ein Polynom ersten Grades:

$$L(x) = f(a) + c(x-a)$$

Der Graph von L ist die Tangente an dem Graphen von f in $(a, f(a))$.

Satz 5.1.1. *f ist genau dann in $a \in D$ differenzierbar, wenn $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existiert.*
Beweis:

"$\Rightarrow$" *Sei f in $a \in D$ differenzierbar. Dann ist $f(x) = f(a) + c(x-a) + r(x)$ mit* $\lim_{x \to a} \frac{r(x)}{x-a} = 0$
$\Rightarrow \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = c + \frac{r(x)}{x-a}$
$\Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = c$

"$\Leftarrow$" *Sei* $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} := c$
$r(x) := f(x) - f(a) - c(x-a)$
Dann ist $f(x) = f(a) + c(x-a) + r(x)$ *und* $\frac{r(x)}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - c \overset{x \to a}{\to} c - c = 0$

□

Geometrische Interpretation Der Differenzenquotient $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ist die Steigung der Sekante von f durch die Punkte $(x, f(x))$ und $(a, f(a))$. Beim Grenzübergang $x \to a$ geht die Sekante in die Tangente vom Graphen f im Punkt $(a, f(a))$ über. $f'(a)$ ist also die Steigung der Tangente in $(a, f(a))$.

Beispiele:

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = c$ konstante Funktion
Es gilt: $f'(a) = 0$
Beweis: $f'(a) = lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{c-c}{x-a} = 0$

(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = cx, f'(a) = c$
Beweis: $f'(a) = lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{cx-ca}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{c(x-a)}{x-a} = c$

(3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x, f'(a) = e^x$ Exponentialfunktion
Beweis: $f'(a) = lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{e^x-e^a}{x-a} = \lim_{x\to a} e^a\frac{e^{x-a}-1}{x-a} =$
$\lim_{x\to a} \underbrace{e^a}_{\text{konstant}} \underbrace{\lim_{x\to a}\frac{e^{x-a}-1}{x-a}}_{=1} = e^a \cdot 1$

Korollar Ist $f : D \to \mathbb{R}$ in $a \in D$ differenzierbar, so ist f in a stetig.
Beweis: $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + r(x), \lim_{x\to a}\frac{r(x)}{x-a} = 0$
$\frac{r(x)}{x-a} \to 0 \Rightarrow \lim_{x\to a} r(x) = 0$
Denn es gilt: $\lim r(x) = \lim(x-a)\frac{r(x)}{x-a} = \lim(x-a)\lim\frac{r(x)}{x-a} = 0\cdot 0 = 0$
Somit folgt: $\lim_{x\to a} f(x) = \lim(f(a) + f'(a)(x-a) + r(x)) = \lim f(a) + \lim f'(a)(x-a) + \lim r(x) = f(a) + 0 + 0 = f(a)$

Satz 5.1.2. *(1) Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ in $x \in D$ differenzierbar und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind die Funktionen $f+g, \lambda f, f \circ g : D \to \mathbb{R}$ in $x \in D$ differenzierbar und es gilt:*

- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$
- $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

Ist $g(\xi) \neq 0$ für alle $\xi \in D$, so ist $\frac{f}{g} : D \to \mathbb{R}$ in $x \in D$ differenzierbar und es gilt:

- $(\frac{f}{g})' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$

*(2) **Kettenregel** Seien $f : D \to \mathbb{R}, g : E \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(D) \subset E$ und f sei in $x \in D$ und g in $y = f(x)$ differenzierbar. Dann ist $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ in x differenzierbar und es gilt:*

- $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

*(3) **Ableitung der Umkehrfunktion** Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein abgeleitetes Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige, streng monotone Funktion und $f^{-1} : \tilde{D} = f(D) \to \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion. Ist weiterhin f in $x \in D$ differenzierbar und $f'(x) \neq 0$, so ist f^{-1} in $y = f(x)$ differenzierbar. Es gilt*

- $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

Beispiele:

(1) $f(x) = \ln x \quad f'(x) = \frac{1}{x}$
Beweis: $f(x) = \ln x = g^{-1}(x)\, g(x) = e^x\, (g^{-1'}(x)) = \frac{1}{(g(x))'(g^{-1}(x))} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$

(2) $f(x) = h(x)^{g(x)}$ $h > 0$ differenzierbar und g differenzierbar
$f'(x) = h(x)^{g(x)}(\frac{h'(x)g(x)}{h(x)} + g'(x)\ln h(x))$
Beweis: $(h(x)^{g(x)})' = (e^{g(x)\ln h(x)})' = e^{g(x)\ln h(x)}(g(x)\ln h(x))'$
$= h(x)^{g(x)}(g'(x)\ln h(x) + g(x)\frac{h'(x)}{h(x)})$

(3) $f(x) = x^\alpha \quad f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$
Beweis: $h(x) = x \quad g(x) = \alpha \quad f'(x) = (x^\alpha)' = x^\alpha(0x + \frac{\alpha 1}{x}) = \alpha x^{\alpha-1}$

(4) $f(x) = a^x \quad f'(x) = a^x \ln a$
Beweis: $h(x) = a \quad g(x) = x \quad f'(x) = (a^x)' = a^x(1\ln a + 0) = a^x \ln a$

(5) $f(x) = x^x \quad f'(x) = x^x(1 + \ln x)$
Beweis: $h(x) = x \quad g(x) = x \quad f'(x) = (x^x)' = x^x(\ln x + 1)$

(6) $(\cos x)' = -\sin x \quad (\sin x)' = \cos x$
Beweis: $(e^z)' = e^z, z \in \mathbb{C} \quad (e^z)' = \lim_{h\to 0} \frac{e^{z+h} - e^z}{h} = e^z$
$x \in \mathbb{R} : e^{ix} = \cos x + i \sin x$

$$\begin{aligned}
(\cos x + i\sin x) = &\quad (\cos x)' + i(\sin x)' = (e^{ix})' = ie^{ix} \\
= &\quad (\cos x + i \sin x)i = i\cos x - \sin x \\
\Rightarrow &\quad (\cos x)' = -\sin x, (\sin x)' = \cos x
\end{aligned}$$

5.2 Ableitung höherer Ordnung

Definition 42. (1) $f : D \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar in D.
Falls $f' : D \to \mathbb{R}$ in $x \in D$ differenzierbar ist, so heißt $\frac{d^2 f}{dx^2}(x) = f''(x) := (f')'(x)$ die zweite Ableitung von f an der Stelle x.

(2) Allgemein durch Induktion: $f : D \to \mathbb{R}$ heißt k-mal differenzierbar in $x \in D :\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : f : D \cap]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\to \mathbb{R}$ ist ($k - 1$-mal in $D \cap]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ differenzierbar und die $(k-1)$-te Ableitung von f in x differenzierbar ist.

Leibnitzsche Produktformel $f, g : D \to \mathbb{R}$ sind n-mal differenzierbar. Dann $(f \circ g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{n-k)}(x)$ mit $f^{(0)} := f$

5.3 Lokale Extrema, Mittelwertsatz, Konvexität

Definition 43. Eine Funktion $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ hat in $x \in]a, b[$ genau dann ein *lokales (relatives) Maximum/Minimum* , wenn

$$\exists \varepsilon > 0 \, \forall \xi \in]a, b[: |x - \xi| < \varepsilon \Rightarrow f(\xi) \leq f(x) \text{ bzw. } f(\xi) \geq f(x)$$

Trifft das $f(\xi) = f(x)$ nur für $\xi = x$ zu, so sagt man in x liegt ein isoliertes lokales Maximum/Minimum vor.

Satz 5.3.1. *$f :]a, b[\to \mathbb{R}$ besitze in $x \in]a, b[$ ein lokales Extremum und sei in x differenzierbar. Dann gilt $f'(x) = 0$.*
Beweis*: f habe in x ein lokales Maximum. Dann gilt:*

$$\exists \varepsilon > 0 : D =]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset]a, b[\, \forall \xi \in D : f(\xi) \leq f(x)$$

Somit

$$\begin{aligned} f'_+(x) &:= \lim_{\xi \searrow x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \leq 0 \;\; \textit{da} \;\; f(\xi) \leq f(x) \\ f'_-(x) &:= \lim_{\xi \nearrow x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \geq 0 \;\; \textit{da} \;\; f(\xi) \geq f(x) \end{aligned}$$

Da f in x differenzierbar folgt, dass $f'_+(x) - f'_-(x) = 0$ □

Bemerkungen:

(1) $f'(x) = 0$ ist eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung für ein lokales Extremum. Ein Beispiel ist die Funktion $f(x) = x^3$. Die Ableitung ist $f'(x) = 3x^2$ und es gilt $f'(0) = 0$. f hat in 0 aber kein lokales Extremum.

(2) Hinreichende Bedingung für lokales Extremum: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

(3) Jede in einem kompakten Intervall $[a, b]$ stetige Funktion nimmt in dem Intervall ihr absolutes Maximum $f(p) = \max_{x \in [a,b]} f(x)$ und ihr absolutes Minimum $f(q) = \min_{x \in [a,b]} f(x)$.
Liegt ein Extremum jedoch am Rand, d.h. in a oder b vor, so ist dort $f'(x) = 0$ nicht notwendig.

5.3.1 Satz von Rolle und Mittelwertsatz

Satz 5.3.2. *(1) Satz von Rolle: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und sei $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar in $]a, b[$ und $f(a) = f(b)$. Dann existiert $\xi \in]a, b[: f'(\xi) = 0$*
Beweis:

1. Fall Falls f konstant ist, ist der Beweis trivial.

2. Fall Falls f nicht konstant ist, existiert ein $x_0 \in]a, b[: f(x_0) > f(a)$. Dann wird das absolute Maximum/Minimum von $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $\xi \in]a, b[$ angenommen. Nach Satz 5.3.1 gilt $f'(\xi) = 0$.

(2) *Mittelwertsatz: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und sei $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar in $]a,b[$ und $f(a) = f(b)$. Dann existiert $\xi \in]a,b[$: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$*
***Beweis**: Aus dem Punkt 3 folgt der Punkt 2 mit $g(x) = x$.*

(3) *2. Mittelwertsatz: Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und in $]a,b[$ differenzierbar und sei $g'(\xi) \neq 0$ in $]a,b[$. Dann existiert $\xi \in]a,b[$: $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.*
***Beweis**: Wegen $g' \neq 0$ in $]a,b[$ folgt nach dem ersten Punkt $g(b) \neq g(a)$. Betrachten $\varphi(x) := f(x) - f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x) - g(a))$. Die Funktion $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist stetig und in $]a,b[$ differenzierbar und es gilt $\varphi(a) = \varphi(b) = 0 \Rightarrow \exists \xi \in]a,b[: 0 = \varphi'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(\xi) \Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$*

$\square$

Folgerung:

(1) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f' = 0$ in $]a,b[\Rightarrow f(x) = c$ konstant auf $[a,b]$
Beweis: Sei $x \in]a,b]$ beliebig. Wir betrachten das Intervall $[a,x]$ Nach dem Mittelwertsatz existiert ein $\xi \in]a,x[\subset]a,b[$: $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(\xi) = 0 \Rightarrow f(x) = f(a) \, \forall x \in]a,b] \Rightarrow f(x) = f(a) \, \forall x \in [a,b]$ wegen der Stetigkeit.

(2) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und genüge der Differentialgleichung $f' = f$ auf $\mathbb{R}$ mit $f(0) = 1$. Dann ist $f(x) = e^x$.
Beweis: $F(x) = f(x)e^{-x}$ Dann ist $F'(x) = f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} = \underbrace{(f'(x) - f(x))e^{-x}}_{=0}$
$\Rightarrow F(x) = c = f(x)e^{-x}$
$f(x) = ce^x \quad f(0) = 1 \Rightarrow c = 1$. Also ist $f(x) = e^x$

5.3.2 Berechnung von Grenzwert, Regel von L'Hospital

	Grenzübergänge	Differenzierbarkeitsintervalle
(1)	$x \searrow a$	$a < x < a + h$
(2)	$x \nearrow a$	$a - h < x < a$
(3)	$x \to a$	$0 < \lvert x - a \rvert < h$
(4)	$x \to \infty$	$x > R$
(5)	$x \to -\infty$	$x < -R \, R > 0$

Unter diesen Voraussetzungen gilt die *Regel von L'Hospital*:
Seien $\lim f(x) = \lim g(x) = 0$ und existiert $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ eigentlich oder uneigentlich, so gilt $\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$.
Beispiel:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^x - 1)'}{x'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = \frac{e^0}{1} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^x - 1 - x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2x} = \frac{1}{2}$$

5.3.3 Monotonie differenzierbarer Funktionen

Satz 5.3.3. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ differenzierbar. Dann gilt:*

1. $\forall x \in]a, b[: f'(x) \geq \Rightarrow f$ *auf* $[a, b]$ *monoton wachsend*

2. $\forall x \in]a, b[: f'(x) > \Rightarrow f$ *auf* $[a, b]$ *streng monoton wachsend*

3. $\forall x \in]a, b[: f'(x) \leq \Rightarrow f$ *auf* $[a, b]$ *monoton fallend*

4. $\forall x \in]a, b[: f'(x) < \Rightarrow f$ *auf* $[a, b]$ *streng monoton fallend*

Beweis *(für den zweiten Fall): Sei $f'(x) > 0$ für alle $x \in]a, b[$. Man nehme an, dass f nicht streng monoton wachsend ist. Dann existiert $x_1, x_2 \in]a, b[: x_1 < x_2 \wedge f(x_1) \geq f(x_2)$. Nach dem Mittelwertsatz folgt: $\exists \xi \in]a, b[: \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\xi) \leq 0$ ↯* □

5.3.4 Hinreichende Bedingungen für lokale Extrema

Satz 5.3.4. *Sei $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar. In $x \in]a, b[$ sei f zweimal differenzierbar und es gelte, $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$. Dann besitzt f in x ein isoliertes lokales Extremum.*
Beweis: *Sei $f''(x) > 0$. Wegen $f''(x) = \lim_{\xi \to x} \frac{f'(\xi)-f'(x)}{\xi - x} > 0 \Rightarrow \exists \xi > 0 : \frac{f'(\xi)-f'(x)}{\xi - x} > 0 \, \forall \xi : 0 < |\xi - x| < \varepsilon$. Da $f'(x) = 0$ ist, folgt $\frac{f'(\xi)}{\xi} > 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{ll} f'(\xi) < 0 & \text{für } x - \xi < \xi < x \\ f'(\xi) > 0 & \text{für } x < \xi < x + \xi \end{array}\right\}$*
Nach Satz 5.3.3 besitzt f in x ein isoliertes lokales Minimum. Die Beweisführung erfolgt analog für das Maximum. □

5.3.5 Konvexität

Definition 44. (1) Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein (endliches oder unendliches) Intervall. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt genau dann *konvex*, wenn:

$$\forall x_0, x_1 \in D \, \forall 0 < \Theta < 1 : f((1-\Theta)x_0 + \Theta x_1) \leq (1-\Theta)f(x_0) + \Theta f(x_1)$$

(2) f heißt genau dann *konkav*, wenn $(-f)$ konvex ist.

Geometrische Interpretation Seien $x_0, x_1 \in D, x_0 < x_1, x = (1-\Theta)x_0 + \Theta x_1 \Rightarrow \Theta = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}, 1 - \Theta = \frac{x_1-x}{x_1-x_0}, 0 < \Theta < 1$
$f(x) = f((1-\Theta)x_0 + \Theta x_1) \leq (1-\Theta)f(x_0) + \Theta f(x_1) = \frac{x_1-x}{x_1-x_0} f(x_0) + \frac{x-x_0}{x_1-x_0} f(x_1)$
$y_0 := f(x_0), y_1 := f(x_1), y = \frac{x_1-x}{x_1-x_0} y_0 + \frac{x-x_0}{x_1-x_0} y_1 \Leftrightarrow$

$$\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

Eine lineare Funktion $f(x) = ax + b$ ist sowohl konvex als auch konkav.

Satz 5.3.5. *(i) Konvexität und Stetigkeit*
Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ konvex. Dann ist f stetig auf D.
Beweis: *Sei$p \in D$. Dann existiert $x_0, x_1 \in D : x_0 < p < x_1, [x_0, x_1] \subset D$. Mann kann zeigen, dass für $x \in [x_0, x_1]$ die folgende Abschätzung gilt:*
$|f(x) - f(p)| \leq L|x - p|$, wobei $L = \frac{2\max\{|f(x_0)|,|f(x_1)|\}}{\min\{|x_0-p|,|x_1-p|\}} \Rightarrow \lim_{x\to p} f(x) = f(p) \Rightarrow f$ in p stetig.

(ii) Konvexität und Differenzierbarkeit
Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Dann gilt, dass f genau dann auf D konvex ist, wenn $\forall x \in D : f''(x) \geq 0$
Beweis:

„$\Rightarrow$“ *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ konvex. Man trifft die Annahme, dass $f''(x) < 0$* nicht *gilt und setzt $\varphi(x) := f(x) - f'(x_0)(x - x_0)$ für $x_0 \in D$. Dann hat man $\varphi : D \to \mathbb{R}$ ist zweimal differenzierbar mit $\varphi'(x_0) = 0$ und $\varphi''(x_0) = f''(x) < 0$. Nach Satz 5.3.4 hat φ in x_0 ein isoliertes lokales Maximum. Somit existiert ein $h > 0 : [x_0 - h, x_0 + h] \subset D$ und $\varphi(x_0 - h) < \varphi(x_0), \varphi(x_0 + h) < \varphi(x_0)$. Damit folgt:*

$$\begin{aligned} f(x_0) = & \quad \varphi(x_0) \\ > & \quad \frac{1}{2}(\varphi(x_0 - h) + \varphi(x_0 + h) \\ = & \quad \frac{1}{2}(f(x_0 - h) - f'(x_0)(-h) + f(x_0 + h) - f'(x_0)(h)) \\ = & \quad \frac{1}{2}(f(x_0 - h) + f(x_0 + h)) \end{aligned}$$

Man setzt $x_1 = x_0 - h, x_2 = x_0 + h, \Theta = \frac{1}{2}$. Dann ist $x_0 = \frac{1}{2}(x_0-h)+\frac{1}{2}(x_0+h) = (1 - \Theta)x_1 + \Theta x_2$ und $f(x_0) = f((1 - \Theta)x_1 + \Theta x_2) > (1 - \Theta)f(x_1) + \Theta f(x_2)$↯

„$\Leftarrow$“ *Sei $f'' \geq 0$ auf D. Dann ist f' monoton wachsend. Seien $x_1, x_2 \in D, 0 < \Theta < 1$ und $x = (1 - \Theta)x_2 + \Theta x_1$.*
O.B.d.A. sei $x_1 < x_2$. Dann folgt nach dem Mittelwertsatz: $\exists \xi_1 \in]x_1, x[, \xi_2 \in]x, x_2[: \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2) = \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$. Mit $x - x_1 = (1-\Theta)(x_2 - x_1)$ und $x_2 - x = \Theta(x_2 - x_1)$ folgt $\frac{f(x)-f(x_1)}{1-\Theta} \leq \frac{f(x_2)-f(x)}{\Theta}$ oder $\Theta(f(x) - f(x_1) \leq (1-\Theta)(f(x_2) - f(x))$. Somit ist $f(x) \leq \Theta f(x_1) + (1-\Theta)f(x_2) \Rightarrow f$ ist konvex.

□

5.3.6 Wendepunkt

Definition 45. Eine Funktion $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ hat in $x_0 \in]a, b[$ genau dann einen *Wendepunkt*, wenn ein $\varepsilon > 0$ mit der Eigenschaft existiert, dass f auf $]x_0 - \varepsilon, x_0]$ konkav und f auf $[x_0.x + \varepsilon[$ konvex ist oder dies auf $(-f)$ zutrifft.

Bemerkung:

- Nach der obigen Definition hat eine lineare Funktion $f(x) = cx + d$ in jedem Punkt einen Wendepunkt.
- Ist f auf $]x_0 - \varepsilon, x_0]$ streng konkav und auf $[x_0, x_0 + \varepsilon[$ streng konvex, so liegt ein isolierter Wendepunkt vor.

5.3.7 Hinreichende Bedingungen für (isolierte) Wendepunkte

Satz 5.3.6. *(i) Sei $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ in $x_0 \in]a, b[$ differenzierbar. f besitzt in x_0 einen Wendepunkt, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert und für $0 < |h| < \varepsilon$ stets*

(1) Übergang von konkav in konvex:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} > f'(x_0)$$

(2) Übergang von konvex in konkav:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} < f'(x_0)$$

gilt.
Beweis: $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} > 0f'(x_0)$ *für* $0 < |h| < \varepsilon \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) < \quad & f(x_0) + f'(x_0)h \text{ für } h < 0 \\ f(x_0 + h) < \quad & f(x_0) + f'(x_0)h \text{ für } h > 0 \end{aligned}$$

$h := x - x_0$
Tangente in $(x_0, f(x_0))$: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

(ii) Sei $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann besitzt f in $x_0 \in]a, b[$ einen Wendepunkt, wenn $f' :]a, b[\to \mathbb{R}$ in x_0 ein isoliertes lokales Extremum hat.
Beweis: *Habe f' in x_0 ein isoliertes lokales Maximum, d.h. es existiert ein $\varepsilon > 0$: $f'(\xi) < f'(x_0)$ für $0 < |\xi - x_0| < \varepsilon$. Sei $|h| < \varepsilon$, dann folgt nach dem Mittelwertsatz: $\exists \xi_0 \in]x_0, x_0 + h[$ für $h > 0$ bzw. $\xi_0 \in]x_0 + h, x_0[$ für $h < 0$ mit $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(\xi_0) < f'(x_0)$. Nach (i)(2) folgt: Übergang von konvex in konkav. Analog kann man dies für das isolierte lokale Minimum zeigen.*

(iii) Sei $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ in $]a, b[$ zweimal differenzierbar.

(1) Ist $f''(x) > 0$ für $x < x_0$ und $f''(x) < 0$ für $x > x_0$, so hat f in x_0 einen Wendepunkt (Übergang konkav nach konvex).

(2) Ist $f''(x) < 0$ für $x < x_0$ und $f''(x) > 0$ für $x > x_0$, so hat f in x_0 einen Wendepunkt (Übergang konvex nach konkav).

(3) Sei $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ dreimal differenzierbar. Ist $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$, so hat f in x_0 einen Wendepunkt.

- $f''(x_0) = 0, f'''(x_0) < 0$ *Dann hat* f' *in* x_0 *ein isoliertes lokales Maximum (Übergang konvex nach konkav).*
- $f''(x_0) = 0, f'''(x_0) > 0$ *Dann hat* f' *in* x_0 *ein isoliertes lokales Minimum (Übergang konkav nach konvex)*

□

5.3.8 Kurvendiskussionen von reellen Funktionen

Mögliches Vorgehen beim Studium einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$:

- Bestimmen der Definitionsbereiche und der Symmetrieeigenschaften
- Bestimmung der Nullstellen von f, f', f''
- Untersuchung des Monotonie- und Konvexitätsverhaltens
- Bestimmung lokaler Extremalstellen
- Wendepunkte
- Unstetigkeitsstellen

5.4 Taylorreihen und Satz von Taylor

Problem: Approximation von Funktionen in der Nähe eines Punktes durch möglichst einfache Funktionen (Polynome).

Lemma 3. *Sei* $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ *ein Polynom* n*-ten Grades. Dann gilt:*

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Beweis:

1. Fall Sei $x_0 = 0$

$$\begin{aligned}
p'(x) &= & a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} \\
p''(x) &= & 2a_2 + \cdots + n(n-1) a_n x^{n-2} \\
&\vdots & \\
p^{(k)}(x) &= & k! a_k + \cdots + n(n-1)(n-k+1) a_n x^{n-k} \\
p^{(k)}(0) &= & k! a_k \quad \text{für } 0 \leq k \leq n \\
p^{(k)}(0) &= & 0 \quad \text{für } k \geq n+1 \\
&\Rightarrow & p(x) = \sum_{k-0}^{n} \frac{p^{(k)}(0)}{k!} x^k
\end{aligned}$$

2. Fall Sei x_0 beliebig. Setzen: $q(y) := p(y + x_0)$. Es gilt $q^{(k)}(y) = p^{(k)}(y + x_0), q^{(k)}(y) = p^{(k)}(x_0)$.

$p(y + x_0) = q(y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(0)}{k!} y^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!} y^k$

$y := x - x_0, p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(0)}{k!} (x - x_0)^k$

$\square$

Sei f eine n-mal stetig differenzierbare Funktion in x_0. Man verwendet

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

zur Approximation von f in der „Nähe" von x_0.

Definition 46. (1) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in I$ eine n-mal differenzierbare Funktion. Dann heißt:

$$T_n(f; x_0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

definiert durch

$$T_n(f; x_0) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

n-tes *Taylorpolynom* von f im Punkt x_0.

(2) Taylorreihe von f in x mit Entwicklungspunkt x_0
Sei $f : I \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar in $x \in I$. Dann heißt

$$T(f; x_0)(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Taylorreihe von f in x mit Entwicklungspunkt x_0.

(3) Gilt für eine unendlich oft differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in I : f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$, so sagt man, f ist in I taylorentwickelbar mit dem Entwicklungspunkt x_0.

Beispiele:

(1) $f(x) = e^x, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x_0) &= e^{x_0} \\ f(x) &= e^x = e^{x_0} e^{x - x_0} \\ &= e^{x_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{x_0}}{k!} (x - x_0)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \end{aligned}$$

Also $f(x) = e^x$ ist für $x_0 \in \mathbb{R}$ taylorentwickelbar.

(2) $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}, f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Es gilt $f^{(k)}(0) = 0$ mit $k = 0, 1, 2, \ldots$. Somit ist $T(f; x_0 = 0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 0, x \in \mathbb{R}$. Aber $f(x) \neq 0$ für $x \neq 0$. Damit ist f in $x_0 = 0$ *nicht* taylorentwickelbar.

$R_n(f; x_0) = f - T_n(f; x_0)$ Restglied kürzer $R_n := R_n(f; x_0)$
$f: I \to \mathbb{R}$ in x_0 genau dann taylorentwickelbar, wenn $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$

Satz 5.4.1. ***Taylorscher Satz***

$$I: \begin{cases} [x_0, x] & x > x_0 \\ [x.x_0] & x < x_0 \end{cases} \qquad f: I \to \mathbb{R}$$

f sei n-mal stetig auf I differenzierbar und $n+1$-mal differenzierbar in $I \backslash \{x, x_0\}$ und $p \in \mathbb{N}$. Dann

$$\forall x \in I\, \exists 0 < \Theta < 1: R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \Theta(x - x_0))}{n!p} (1 - \Theta)^{n+1-p} (x - x_0)^{n+1}$$

*(*Restglied von Schlömilch*) und*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0) + R_n(x)$$

*(*Taylorsche Formel*)*
Beweis:

$$F(t) := f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x - t)^k \qquad G(t) := (x - t)^p$$

Dann ist $F(x_0) - \underbrace{F(x)}_{=0} = R_n(x), G(x_0) - \underbrace{G(x)}_{=0} = (x - x_0)^p, F'(t) = -\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}t}{k!} (x - t)^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}t}{k!} k(x - t)^{k-1} = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x - t)^n, G'(t) = p(x - t)^{p-1}$
Nach dem zweiten Zwischenwertsatz folgt:

$$\begin{aligned} \exists 0 < \Theta < 1: \frac{F(x_0) - F(x)}{G(x_0) - G(x)} &= \frac{F'(x_0 + \Theta(x - x_0))}{G'(x_0 + \Theta(x - x_0))} \\ \Rightarrow \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^p} &= \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \Theta(x - x_0)) \cdot (x - (x_0 + \Theta(x - x_0)))^n}{n!p(x - (x_0 + \Theta(x - x_0)))^{p-1}} \\ &= \frac{f^{(n+1)}(x + \Theta(x - x_0))}{n!p} (1 - \Theta)^{n+1-p} (x - x_0)^{n+1-p} \\ \Rightarrow R_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(x + \Theta(x - x_0))}{n!p} (1 - \Theta)^{n+1-p} (x - x_0)^{n+1-p} \end{aligned}$$

□

Spezialfälle des Restglieds

Lagrange $p = n+1 \Rightarrow R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\Theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

Cauchy $p = 1 \Rightarrow R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x+\Theta(x-x_0))}{n!}(1-\Theta)^n(x-x_0)^{n+1}$

Beispiel: Gegeben sei die Funktion $f(x) = \ln(1+x)$ mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Es gilt

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + R_n(x) \tag{5.1}$$

wobei

1. $R_n(x) = (-1)^n \Theta_1 \frac{x^{n+1}}{n+1}, 0 < \Theta_1 < 1, 0 \leq x \leq 1$
2. $R_n(x) = (-1)^n \Theta_2 \frac{x^{n+1}}{1+x}, 0 < \Theta_2 < 1, -1 < x < 0$

(Θ_1, Θ_2 hängen von n und x ab.) Die Taylorreihe

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \qquad -1 < x \leq 1$$

ist für $-1 < x < 1$ absolut konvergent und für $|x| > 1$ divergent.
Folgerung: Für $1 \leq y < \infty$ gilt:

$$\ln y = 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} \left(\frac{y-1}{y+1}\right)^{2k-1} + \widetilde{R_n}(y) \tag{5.2}$$

$$\widetilde{R_n}(y) = \left(\frac{\Theta_1}{2n+1} + \frac{\Theta_2}{2}(y+1)\right)\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^{2n+1} \qquad 0 < \Theta_1, \Theta_2 < 1$$

Für $0 < y \leq 1$ nutzt man $\ln y = -\ln(\frac{1}{y})$. Insbesondere

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + R_n(1)$$

$|R_n(1)| = |(-1)^n||\Theta_1|\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$
Genauigkeit auf sechs Stellen erhält man mit Sicherheit für $n \geq 10^6$ (schlechte Konvergenz), da $|R_n(1)| \leq \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} \leq 10^{-6} \Rightarrow n \geq 10^6$.

Setzt man $y = 2$ in Gleichung 5.1 ein, erhält man $\ln 2 = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2k-1} + \widetilde{R_n}(2)$:

$$|\widetilde{R_n}(2)| = \left|\frac{\Theta_1}{2n+1} + \frac{3}{2}\Theta_2\right| \left(\frac{3}{2}\right)^{2n+1} \leq \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1}$$

$$n = 6 \qquad |\widetilde{R_6}(2)| \leq \left(\frac{1}{13} + \frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{13} < 10^{-6}$$

$$n = 10 \qquad |\widetilde{R_{10}}(2)| \leq \left(\frac{1}{21} + \frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{21} < 1,5 \cdot 10^{-10}$$

$f(x) = \ln(1+x)$
Es gilt: $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + R_n(x)$, wobei

1. $R_n(x) = (-1)^n\Theta_1\frac{x^n+1}{n+1}$ mit $0 < \Theta_1 < 1$ für $0 \leq x \leq 1$

2. $R_n(x) = (-1)^n\Theta_2\frac{x^{n+1}}{x+1}$ mit $0 < \Theta_2 < 1$ für $-1 < x \leq 0$

Dabei ist Θ_1, Θ_2 abhängig von x, n.
Beweis:

$$f(x) = \ln(1+x)f'(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

$$\Longrightarrow \qquad f^{(n)}(x) = (n-1)!(-1)^{n-1}\frac{1}{(1+x)^n}$$

Einsetzen in Taylorformel:

$$\ln(1+x) = f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!} + R_n$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(k-1)!(-1)^{k-1}\frac{1}{k!}x^k + R_n(x)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k!} + R_n(x)$$

Restglied:

1. Fall $0 \leq x \leq 1$: Restglied von Lagrange:
$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\Theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} = (-1)^n \underbrace{\frac{1}{(1+\Theta x)^{n+1}}}_{=:\Theta_1}\frac{x^{n+1}}{n+1}$ mit $0 < \Theta \leq 1$. Es gilt $0 < \Theta_1 < 1$, denn $1+\Theta x \geq 1$. Daher folgt, $\frac{1}{1+\Theta x} \leq 1$. Somit ist $R_n(x) = (-1)^n\Theta_1\frac{x^{n+1}}{n+1}$ für alle $0 \leq x \leq 1$ und es folgt $|R_n(x) \leq \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ für $0 \leq x \leq 1$.

2. Fall $-1 < x \leq 0$: Cauchysches Restglied:

$$
\begin{aligned}
R_n(x) = & \quad \frac{f^{(n+1)}(\Theta x)}{n!}(1-\Theta)^n x^n + 1 \text{ für } 0 < \Theta < 1 \\
= & \quad (-1)^n \frac{1}{(1+\Theta x)^{n+1}}(1-\Theta)^n x^{n+1} \\
= & \quad (-1)^n \underbrace{\left(\frac{1-\Theta}{1+\Theta x}\right)^n \frac{1+x}{1+\Theta x}}_{=:\Theta_2} \frac{x^{n+1}}{1+x}
\end{aligned}
$$

Es gilt $0 < \Theta < 1$, da $0 < 1 - \Theta < 1 + \Theta x$ und $0 < 1 + x < 1 + \Theta x$. Somit ist:

$$
\begin{aligned}
R_n(x) = & \quad (-1)^n \Theta_2 \frac{x^{n+1}}{1+x} \\
\Rightarrow & \quad |R_n(x)| \le \frac{|x|^{n+1}}{1+x} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \\
\Rightarrow & \quad \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \text{ für } -1 < x \le 0
\end{aligned}
$$

Beide Fälle liefern die Konvergenz der Taylorreihe. $\square$

Folgerung: Für $1 \le y < \infty$ gilt:

$$
\begin{aligned}
\ln y = & \quad 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)} \left(\frac{y-1}{y+1}\right)^{2k-1} + \widetilde{R_n}(y) \\
\widetilde{R_n}(y) = & \quad \left(\frac{\Theta_1}{2n+1} + \frac{\Theta_2}{2}(y+1)\right)\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^{2n+1} \quad 0 < \Theta_1, \Theta_2 < 1
\end{aligned}
$$

Beweis: Sei $1 \leq y < \infty$ und $x := \frac{y-1}{y+1}$. Es gilt $0 \leq x < 1$ und $y = \frac{1+x}{1-x}$:

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + R_{2n}(x) \\
\ln(1-x) &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (-x)^k + R_{2n}(-x) \\
\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) &= \ln(1+x) - \ln(1-x) \\
&= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + R_{2n}(x) - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (-x)^k + R_{2n}(-x) \\
&= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1} - (-1)}{k} x^k + \underbrace{(R_{2n}(x) - R_{2n}(-x))}_{=:\widetilde{R_n}(x)} \\
&= 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} + \widetilde{R_n}(x) \\
R_{2n}(x) &= (-1)^{2n} \Theta_1 \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\
R_{2n}(-x) &= (-1)^{2n} \Theta_2 \frac{(-x)^{2n+1}}{1-x} \\
\widetilde{R_n}(x) &= \left(\frac{\Theta_1}{2n+1} + \frac{\Theta_2}{1-x}\right) x^{2n+1}
\end{aligned}$$

Damit ist:

$$\boxed{\ln(y) = 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} \left(\frac{y-1}{y+1}\right)^{2k-1} + \widetilde{R_n}(y)}$$

mit

$$\boxed{\widetilde{R_n} = \left(\frac{\Theta_1}{2n+1} + \frac{\Theta_2}{2}(y+1)\right) \left(\frac{y-1}{y+1}\right)^{2n+1}}$$

$\square$

6 Integration

6.1 Das Riemannsche Integral

Die Integralrechnung umfasst die klassische Problemstellung, dass man eine Fläche unterhalb einer Kurve berechnen möchte:

3

2

1

−1 1 2 3 4

−1

Zur Untersuchung dieses Problems braucht man diverse Variablen:

Zerlegung $\mathfrak{Z} := \{I_1, \cdots, I_n\}$
$I_i := [x_{i-1}, x_i]$ mit $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$

Verfeinerung $\mathfrak{Z}' :\Leftrightarrow \forall I' \in \mathfrak{Z}' \, \exists I \in \mathfrak{Z} : I' \subset I$
Schreibweise: $\mathfrak{Z} \prec \mathfrak{Z}'$

Länge des Intervalls $I = [c, d] : l(I) := d - c$

Durchmesser der Zerlegung $d(\mathfrak{Z}) := \max\{l(I) : I \in \mathfrak{Z}\}$

Überlagerung von zwei Zerlegungen $\mathfrak{Z} := \{I = I' \cap I'' : I' \in \mathfrak{Z}_1, I'' \in \mathfrak{Z}_2, l(I) > 0\}$
$\mathfrak{Z}$ ist wieder eine Zerlegung und $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2 \prec \mathfrak{Z}$
Schreibweise: $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_1 \vee \mathfrak{Z}_2$

Menge der beschränkten Funktionen $B[a, b] := \{f : [a, b] \to \mathbb{R} : f \text{ beschränkt}\}$

Infimum/Supremum Sei $M \subset [a, b]$

$$\underline{f}(M) := \inf\{f(x) : x \in M\}$$

$$\overline{f}(M) := \sup\{f(x) : x \in M\}$$

Flächeninhalt *Untersumme*:

$$\underline{S}(f;\mathfrak{Z}) = \sum_{I\in\mathfrak{Z}} \underline{f}(I)l(I)$$

Obersumme:

$$\overline{S}(f;\mathfrak{Z}) = \sum_{I\in\mathfrak{Z}} \overline{f}(I)l(I)$$

Es gilt:

$$\underline{S}(f;\mathfrak{Z}) \leq \overline{S}(f;\mathfrak{Z})$$

Lemma 4. *Sei $f \in B[a,b]$ und $\mathfrak{Z} \prec \mathfrak{Z}'$. Dann gilt*

(i) $\underline{S}(f;\mathfrak{Z}') \geq \underline{S}(f;\mathfrak{Z})$ *bzw.* $\underline{S}(f;\mathfrak{Z}) \leq \underline{S}(f;\mathfrak{Z}')$
Beweis: Annahme: $\mathfrak{Z}'$ enthält genau einen Punkt x' mehr als $\mathfrak{Z}$ mit $x_{i-1} < x' < x_i$. Es gilt:

$$\underline{f}([x_{i-1},x']), \underline{f}([x',x]) \geq \underline{f}([x_{i-1},x_i])$$

Also ist $\underline{f}([x_{i-1},x_i])l([x_{i-1},x_i]) \leq \underline{f}([x_{i-1},x'])l([x_{i-1},x']) + \underline{f}([x',x_i])l([x',x_i])$ und somit

$$\underline{S}(f;\mathfrak{Z}) \leq \underline{S}(f;\mathfrak{Z}')$$

Falls $\mathfrak{Z}'$ mehr als einen Punkt ($p > 1$) hat, wendet man den Schluss p-mal an.

(ii) $\overline{S}(f;\mathfrak{Z}') \leq \overline{S}(f;\mathfrak{Z})$
Beweis: Der Beweis erfolgt analog zu oben.

(iii) $\overline{S}(f;\mathfrak{Z}') - \underline{S}(f;\mathfrak{Z}') \leq \overline{S}(f;\mathfrak{Z}) - \overline{S}(f;\mathfrak{Z})$
Beweis: Der Schluss folgt aus den obigen Aussagen.

(iv) $\forall \mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2\, \underline{S}(f;\mathfrak{Z}_1) \leq \overline{S}(f;\mathfrak{Z}_2)$
Beweis: Sei $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_1 \prec \mathfrak{Z}_2$. Dann ist $\underline{S}(f;\mathfrak{Z}_1) \leq \underline{S}(f;\mathfrak{Z}) \leq \overline{S}(f;\mathfrak{Z}) \leq \overline{S}(f;\mathfrak{Z}_2)$

Definition 47. Sei f eine beschränkte Funktion auf $[a,b]$. Dann heissen die Größen

$$\int_{\underline{a}}^{b} f dx := \sup_{\mathfrak{Z}} \underline{S}(f;\mathfrak{Z})$$

und

$$\int_{a}^{\overline{b}} f dx := \inf_{\mathfrak{Z}} \overline{S}(f;\mathfrak{Z})$$

wobei $\mathfrak{Z}$ die Menge aller Zerlegungen von $[a,b]$ durchläuft, unteres und oberes *Darboux-sches Integral.*

Bemerkung. Nach Lemma 4 Punkt (iv) gilt immer $\int_{\underline{a}}^{b} f dx \leq \int_{a}^{\overline{b}} f dx$. Es gibt beschränkte Funktionen für die $\int_{\underline{a}}^{b} f dx < \int_{a}^{\overline{b}} f dx$.

Beispiel. $f(x) := \begin{cases} 1 & x \in [0,1], x \,\text{irrational} \\ 0 & x \in [0,1], x \,\text{rational} \end{cases} \in B[0,1]$

Sei $\mathfrak{Z}$ eine beliebige Zerlegung von $[0,1]$ und $I \in \mathfrak{Z}$ ein Intervall. Dann gilt $\underline{f}(I) = 0, \overline{f}(I) = 1$.

$$\underline{S}(f;\mathfrak{Z}) = \sum_{I\in\mathfrak{Z}} \underline{f}(I)l(I) = 0 \qquad \overline{S}(f;\mathfrak{Z}) = \sum_{I\in\mathfrak{Z}} \overline{f}(I)l(I) = l([0,1]) = 1$$

$$\Rightarrow \int_{\underline{a}}^{b} f dx = 0 < 1 = \int_{a}^{\overline{b}} f dx$$

Definition 48. Eine Funktion $f \in B[a,b]$ heißt genau dann Riemann-integrierbar (R-integrierbar), wenn gilt:

$$\int_{\underline{a}}^{b} f dx = \int_{a}^{\overline{b}} f dx$$

$\int_a^b$ heißt *Riemannsches Integral.*

Satz 6.1.1. ***Riemannsches Integrabilitätskriterium***
$f \in B[a,b]$ ist R-integrierbar $:\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \mathfrak{Z} : \overline{S}(f;\mathfrak{Z}) - \underline{S}(f;\mathfrak{Z}) \leq \varepsilon$$

Beweis:

„$\Rightarrow$“ *Sei $f \in B[a,b]$ R-integrierbar. Dann folgt $\int_a^b f dx = \int_{\underline{a}}^b f dx = \int_a^{\overline{b}} f dx$, d.h.*

$$\Rightarrow \qquad \forall \varepsilon > 0 \, \exists \mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2 : \int_a^b f dx - \underline{S}(f;\mathfrak{Z}_1) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{6.1}$$

$$\overline{S}(f;\mathfrak{Z}_2) - \int_a^b f dx < \frac{\varepsilon}{2} \tag{6.2}$$

Für $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_1 \prec \mathfrak{Z}_2$ gilt: $\overline{S}(f;\mathfrak{Z}) - \underline{S}(f;\mathfrak{Z}) \leq \overline{S}(f;\mathfrak{Z}_2) - \underline{S}(f;\mathfrak{Z}_2) = \overline{S}(f;\mathfrak{Z}_2) + \int_a^b f dx - \int_a^b f dx - \underline{S}(f;\mathfrak{Z}_2) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

„$\Leftrightarrow$“ *Sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt:* $0 \leq \int_a^{\overline{b}} f dx - \int_{\underline{a}}^b f dx \leq \overline{S}(f;\mathfrak{Z}) - \underline{S}(f;\mathfrak{Z}) < \varepsilon$
Daher folgt für alle positiven ε: $0 \leq \int_a^{\overline{b}} f dx - \int_{\underline{a}}^b f dx \leq \varepsilon \Rightarrow \overline{\int} = \underline{\int}$. *Womit klar ist, dass f R-integrierbar ist.*

□

6.1.1 Definition des Riemannsches Integrals über ZWS

Auswahlfunktion: Sei $\mathfrak{Z}$ eine Zerlegung von $[a,b]$.

$$\xi : \mathfrak{Z} \to [a,b] \text{ mit } \xi(I) = \xi \in I \in \mathfrak{Z}$$

heißt *Auswahlfunktion.* Sie ordnet jedem Intervall I ein Element $\xi(I)$ des Intervalls zu.

Zwischensumme:

$$S(f;\mathfrak{Z};\xi) := \sum_{I\in\mathfrak{Z}} f(\xi(I))l(I)$$

heißt *Zwischensumme* von f mit der Zerlegung $\mathfrak{Z}$ und der Auswahlfunktion $\xi : \mathfrak{Z} \to [a,b]$.

Wegen $\underline{f} \leq f(\xi(I)) \leq \overline{f}(I)$ gilt $\underline{S}(f;\mathfrak{Z}) \leq S(f;\mathfrak{Z};\xi) \leq \overline{S}(f;\mathfrak{Z})$.

Lemma 5. *Sei $f \in B[a,b]$ und $\mathfrak{Z} \prec \mathfrak{Z}'$. Dann gilt für alle Auswahlfunktionen $\xi : \mathfrak{Z} \to [a,b]$ und $\xi' : \mathfrak{Z}' \to [a,b]$:* $|S(f;\mathfrak{Z};\xi) - S(f;\mathfrak{Z}';\xi')| \leq \max_{I\in\mathfrak{Z}}(\overline{f}(I) - \underline{f}(I))\underbrace{l([a,b])}_{=b-a}$

Satz 6.1.2. *Sei $f \in B[a,b]$. Dann ist f genau dann R-integrierbar, wenn gilt:*

$$\exists A \in \mathbb{R}\, \forall\varepsilon > 0\, \exists\delta_\varepsilon > 0\, \forall\mathfrak{Z}(d(\mathfrak{Z}) < \delta_\varepsilon)\, \forall\xi(\xi : \mathfrak{Z} \to [a,b]) : |S(f;\mathfrak{Z};\xi) - A| \leq \varepsilon$$

Satz 6.1.3. *Sei $f \in B[a,b]$. Dann ist f genau dann R-integrierbar, wenn*

$$\forall(\mathfrak{Z}_n)\, \forall(\xi_n)\, (d(\xi_n) \to 0) : \lim_{n\to\infty} S(f;\mathfrak{Z}_n;\xi_n)$$

existiert und es gilt $\lim_{n\to\infty} S(f;\mathfrak{Z}_n;\xi_n) = \int_a^b f dx$.

6.1.2 Beispiele von R-integrierbaren Funktionen

Satz 6.1.4. *(i) Jede* monotone *Funktion $f \in B[a,b]$ ist R-integrierbar.*

Beweis: O.B.d.A. sei $f(b) \neq f(a)$ und f monoton wachsend. $\mathfrak{Z} = \{I_1,\ldots,I_n\}, I_k = [x_{k-1},x_k], x_0 = a, x_n = b$

Es ist

$$\begin{aligned}\overline{S}(f;\mathfrak{Z}) - \underline{S}(f;\mathfrak{Z}) = \sum_{I\in\mathfrak{Z}} \overline{f}(I)l(I) - \underline{f}(I)l(I) \qquad &= \sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_{i-1}))l(I_i)\\ \leq \left(\sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_{i-1}))\right) d(\mathfrak{Z}) \qquad &= (f(b) - f(a))(d(\mathfrak{Z}))\end{aligned}$$

Für $\varepsilon > 0$ wählt man $\mathfrak{Z}$ derart, dass $d(\mathfrak{Z}) \leq \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$. Dann gilt, $\overline{S}(f;\mathfrak{Z}) - \underline{S}(f;\mathfrak{Z}) \leq f(b) - f(a)d(\mathfrak{Z}) \leq \varepsilon \Rightarrow f$ *ist R-integrierbar.*

(ii) Jede stetige *Funktion $f \in B[a,b]$ ist R-integrierbar.*

Beweis: f sei auf $[a,b]$ stetig. Dann ist f auch beschränkt und gleichmässig stetig und es gilt: $\forall\varepsilon > 0\, \exists\delta_\varepsilon > 0\, \forall x_1,x_2 \in [a,b] : |x_1 - x_2| \leq \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$.

Man wählt $\mathfrak{Z}$ mit $d(\mathfrak{Z}) \leq \delta_\varepsilon$. Dann gilt $\overline{f}(I) - \underline{f}(I) \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$ für $I \in \mathfrak{Z}$. Somit ist

$$\begin{aligned}\overline{S}(f;\mathfrak{Z}) - \underline{S}(f;\mathfrak{Z}) &= \sum_{I\in\mathfrak{Z}}(\overline{f}(I) - \underline{f}(I))l(I)\\ &\leq \sum_{I\in\mathfrak{Z}} \frac{\varepsilon}{b-a} l(I) = \left(\sum_{I\in\mathfrak{Z}}\right) \frac{\varepsilon}{b-a}\\ &= b - a\frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon\end{aligned}$$

$\square$

Satz 6.1.5. *Ändert man eine R-integrierbare Funktion $f \in B[a,b]$ an endlich vielen Stellen ab, so ist die neu entstandene Funktion $\tilde{f}$ ebenfalls R-integrierbar und es gilt*

$$\int_a^b f dx = \int_a^b \tilde{f} dx$$

Ein Beispiel zur numerischen Auswertung eines R-Integrals über ZWS ist die Funktion $f(x) = x^\alpha$.

6.1.3 Eigenschaften des R-Integrals

$$\mathcal{R}[a,b] := \{f \in B[a,b] | f \text{ ist R-integrierbar}\}$$

Satz 6.1.6.

1. *$f \in \mathcal{R}[a,b]$. Dann gilt $\underline{f}([a,b])(b-a) \leq \int_a^b f dx \leq \overline{f}([a,b])(b-a)$.*
2. *$f \in \mathcal{R}[a,b], c \in \mathbb{R} \Rightarrow cf \in \mathcal{R}[a,b]$*
   $\int_a^b cf dx = c \int_a^b f dx$
3. *Additivität: $f_1, f_2 \in \mathcal{R}[a,b] \Rightarrow f_1 + f_2 \in \mathcal{R}[a,b]$*
   $\int_a^b (f_1 + f_2) dx = \int_a^b f_1 dx + \int_a^b f_2 dx$
4. *$f_1, f_2 \in \mathcal{R}[a,b], f_1 \leq f_2 \Rightarrow \int_a^b f_1 dx \leq \int_a^b f_2 dx$*
5. *Sei $a < c < b$ und $f_i[a,b] \to \mathbb{R}$. Dann gilt $f \in \mathcal{R}[a,b] \Leftrightarrow f_{[a,c]} \in \mathcal{R}[a,c] \wedge f_{[c,b]} \in \mathcal{R}[c,b]$ $\int_a^b f dx = \int_a^c f dx + \int_c^b f dx$*
6. *Sei $f \in \mathcal{R}[a,b], m \leq f \leq M, \varphi : [m,M] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt $h = \varphi \circ f \in \mathcal{R}[a,b]$*
7. *$f, g \in \mathcal{R}[a,b] \Rightarrow f \circ g \in \mathcal{R}[a,b]$*
8. *$f \in \mathcal{R}[a,b] \Rightarrow |f| \in \mathcal{R}[a,b], |\int_a^b f dx| \leq \int_a^b |f| dx$*

6.2 Integration und Differentiation

Definition 49. Sei $f \in \mathcal{R}[a,b]$ und $x_0 \in [a,b]$. Dann heißt

$$F : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ definiert durch } F(x) := \int_{x_0}^x f dx \; x \in [a,b]$$

unbestimmtes Integral.

Index