Analysis II

Alexander Blinne, Steven Krause

17. November 2009

Nach der Vorlesung von Dr. Oloff im Wintersemester 2008/09

Inhaltsverzeichnis

1 Funktionentheorie

zu komplexen Zahlen

$$\begin{aligned}
z &= x + iy = |z| \cdot e^{i\phi} \text{ mit } \phi = \arg(z) = \arctan\frac{y}{x} \\
\sqrt[n]{z} &= \sqrt[n]{|z| \cdot e^{i\phi}} = \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{i\frac{\phi+2\pi k}{n}} \text{ mit } k = 0, 1, \ldots, n-1 \\
\ln z &= \ln|z| + i(\phi + 2\pi n)
\end{aligned}$$

1.1 Differentiation

$f : \mathbb{G} \to \mathbb{C};\ \mathbb{G} \subseteq \mathbb{C};\ f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$

Def.: f <u>differenzierbar</u> in $z_0 \in \mathbb{G}$ wenn:

$$\exists \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) \text{ bzw. } \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)}{z - z_0} = 0$$

Def.: f <u>holomorph</u> in $z_0 \in \mathbb{G}$ wenn:

$$f \text{ differenzierbar in } \{z : |z - z_0| < \epsilon\}$$

Def.: f <u>harmonisch</u> wenn:

$$\forall z = x + iy \in \mathbb{C} : \triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \wedge \triangle v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

1.2 Die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen

Eine Funktion f ist genau dann in $z_0 = x_0 + i \cdot y_0$ differenzierbar, wenn u und v in (x_0, y_0) differenzierbar und die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \wedge \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}}$$

erfüllt sind.

Geometrische Interpretation der komplexen Ableitung

$f'(z) = |f'(z)| \cdot e^{i\phi}$

1. $|f'(z)|$ ist der lokale Abbildungsmaßstab von $z \to f(z)$
2. ϕ ist der lokale Abbildungsdrehwinkel von $z \to f(z)$

1.3 Das komplexe Kurvenintegral

Def.: Für eine orientierte glatte Kurve $\mathcal{K} \subset \mathbb{C}$ mit Parameterdarstellung $z(t)$ und eine stetige Funktion $f : \mathcal{K} \to \mathbb{C}$ ist das <u>Kurvenintegral</u> definiert durch

$$\int_{\mathcal{K}} f(z)dz = \int_a^b f(z(t)) \cdot f'(t)dt$$

Eigenschaften des Kurvenintegrals

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathcal{K}} \lambda f(z) + \mu g(z) dz &= \lambda \int\limits_{\mathcal{K}} f(z)dz + \mu \int\limits_{\mathcal{K}} g(z)dz \\
\int\limits_{\mathcal{K}_1+\mathcal{K}_2} f(z)dz &= \int\limits_{\mathcal{K}_1} f(z)dz + \int\limits_{\mathcal{K}_2} f(z)dz \\
\int\limits_{-\mathcal{K}} f(z)dz &= -\int\limits_{\mathcal{K}} f(z)dz \\
\left| \int\limits_{\mathcal{K}} f(z)dz \right| &\leq s(\mathcal{K}) \sup |f(z)|
\end{aligned}$$

1.4 Der Cauchysche Integralsatz

Wenn f in dem einfach zusammenhängenden Gebiet $\mathbb{G}$ holomorph ist, gilt für jede einfach geschlossene, stückweise glatte Kurve $\mathcal{K} \subset \mathbb{G}$:

$$\boxed{\oint\limits_{\mathcal{K}} f(z)dz = 0}$$

Satz: Deformationssatz

Sei f holomorph in Gebiet $\mathbb{G}$; $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ seien einfach geschlossene, positiv orientierte Kurven in $\mathbb{G}$. $\mathcal{K}_1$ liege im Innengebiet von $\mathcal{K}_2$, das Ringgebiet zwischen $\mathcal{K}_1$ und $\mathcal{K}_2$ gehöre zu $\mathbb{G}$. Dann gilt:

$$\boxed{\int\limits_{\mathcal{K}_1} f(z)dz = \int\limits_{\mathcal{K}_2} f(z)dz}$$

Def.: F ist Stammfunktion von f in $\mathbb{G}$, wenn $F' = f$ in $\mathbb{G}$. Für eine Stammfunktion gilt:

$$\int\limits_{\mathcal{K}(z_1 \to z_2)} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1)$$

Ist das Gebiet $\mathbb{G}$ nicht einfach zusammenhängend, kann die Stammfunktion global mehrdeutig sein. (Beispiel: Stammfunktion zu $f(z) = \frac{1}{z}$)

1.5 Die Cauchyschen Integralformeln

Es sei f holomorph im einfach zusammenhängenden Gebiet $\mathbb{G}$ und es sei $z \in \mathbb{G}$. Dann gilt:

$$\boxed{\oint\limits_{z^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = 2\pi i\, f(z)}$$

Satz: Die Cauchysche Nebenformel

Es sei f holomorph im einfach zusammenhängenden Gebiet $\mathbb{G}$ und es sei $z \in \mathbb{G}$. Dann gilt:

$$\boxed{\oint\limits_{z^+} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi = \frac{2\pi i}{n!}\, f^{(n)}(z)}$$

Satz: Integral vom Cauchyschen Typ

Sei $\mathcal{K}$ positiv orientierte, einfach geschlossene, stückweise glatte Kurve und ϕ eine stetige Funktion auf $\mathcal{K}$. Dann wird im Innengebiet von $\mathcal{K}$ durch

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{K}} \frac{\phi(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

eine holomorphe Funktion f definiert. Ihre Ableitungen berechnen sich durch

$$\boxed{f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\mathcal{K}} \frac{\phi(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi}$$

Satz von Morera

Sei das Gebiet $\mathbb{G}$ einfach zusammenhängend, das Wegintegral einer Funktion f auf $\mathbb{G}$ sei Wegunabhängig. Dann ist f holomorph in $\mathbb{G}$.

Satz von Liouville

Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.

Satz: Fundamentalsatz der Algebra

Jedes Polynom $P_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^{n-k}$, $a_0 \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$ hat mindestens eine Nullstelle.

Satz: Mittelwerteigenschaft

Sei f holomorph in $\mathbb{G}$ und für $r > 0$ gelte $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\} \subseteq \mathbb{G}$:

$$\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt}$$

Satz: Maximumsprinzip

Wenn für die holomorphe Funktion f die reellwertige Funktion $|f(z)|$ in $\mathbb{G}$ ihr Maximum annimmt, muss f konstant sein.

1.6 Reihenentwicklung

Potenzreihen

$f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, $a_n, z, z_0 \in \mathbb{C}$ konvergent in z^* und $0 < q < |z^* - z_0|$, dann $f(z)$ absolut und gleichmäßig konvergent in $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq q\}$.

Satz: Identitätssatz für Potenzreihen

Stimmen die durch die Potenzreihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$ definierten Funktionen f und g in einer gegen z_0 konvergenten Folge von Punkten z_n mit $z_n \neq z_0$ aus beiden Konvergenzkreisen überein, dann müssen die Koeffizienten a_n und b_n paarweise gleich sein.

Theorem: Taylor

Sei f holomorph in $\mathbb{G}$, $z_0 \in \mathbb{G}$, $r = \sup\{r' > 0 : \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r'\} \subseteq \mathbb{G}\}$, dann gilt:

$$\boxed{\forall z \in \{z : |z - z_0| < r\} : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ mit } a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{z^+} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi}$$

Satz: Identitätssatz für holomorphe Funktionen

Seien f und g auf einfach zusammenhängendem Gebiet $\mathbb{G}$ holomorph und (z_n) eine Folge in $\mathbb{G}$ mit $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \wedge z_n \neq z_0 \forall n \in \mathbb{N}$, dann gilt:

$$\boxed{f(z_n) = g(z_n)\, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f = g}$$

Laurentreihen

$f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$

Satz: Identitätssatz für Laurentreihen

Wenn $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$ für $r < |z - z_0| < R$, dann:

$$\boxed{a_n = b_n\, \forall n \in \mathbb{N}}$$

Theorem: Laurent-Entwicklung

Eine im Kreisring $\mathbb{G} = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$ holomorphe Funktion f lässt sich darstellen in der Form:

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ mit } a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z - z_0| = \rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \text{ mit } r < \rho < R}$$

1.7 Isolierte Singularitäten

Def.: z_0 ist eine isolierte Singularität von f, wenn

1. $\exists R > 0 : f$ in $\mathbb{G} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R\}$ holomorph
2. $\nexists f'(z_0)$.

Def.: Das Residuum einer isolierten Singularität z_0 von f wird definiert als:

$$\mathrm{Res}(f(z), z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{z_0^+} f(z) dz$$

Bem.: $\mathrm{Res}(f(z), z_0) = a_{-1}$ mit a_{-1} Koeffizient der Laurent-Reihe von f an der Stelle z_0 entwickelt und kann dementsprechend bei Polstellen m-ter Ordnung wie folgt berechnet werden:

$$\boxed{\mathrm{Res}(f(z), z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - z_0)^m f(z)\right]}$$

Residuensatz

Das Gebiet $\mathbb{G}$ sei einfach zusammenhängend und $\mathcal{K}$ sei eine stückweise glatte, einfach geschlossene, positiv orientierte Kurve in $\mathbb{G}$ und f holomorph in $\mathbb{G}$ mit n Ausnahmen z_k (isolierte Singularitäten) im Innengebiet von $\mathcal{K}$. Dann:

$$\boxed{\oint_{\mathcal{K}} f(z)dz = 2\pi i \sum_{n=1}^{k} \operatorname{Res}(f(z), z_k)}$$

Anwendungen der Funktionentheorie

Satz: Es seien P und Q Polynome vom Grad p bzw. q, $z_1, \ldots, z_n$ seien die Nullstellen von Q in der oberen Halbebene, reelle Nullstellen habe Q nicht.

1. Wenn $p \leq q - 2$:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}dx = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z_i\right)}$$

2. Wenn $p < q$:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}e^{ix}dx = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}e^{iz}, z_i\right)}$$

Satz: Die Funktion $f(z) = g\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)$ sei holomorph in $|z| \leq 1$ bis auf Singularitäten $z_1, \ldots, z_n$ mit $|z_k| < 1$. Dann gilt für $h(z) = \frac{f(z)}{z}$:

$$\boxed{\int_{0}^{2\pi} g(\cos(t), \sin(t))dt = 2\pi \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(h(z), z_k)}$$

Satz: Es seien P und Q Polynome vom Grad p bzw. q, es sei $p < q$. $z_1, \ldots, z_n$ seien die Nullstellen von Q, keine der Nullstellen liege auf der positiven reellen Achse. Dann gilt für $0 < \alpha < 1$:

$$\boxed{\int_{0}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}x^{\alpha-1}dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi\alpha i}} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}z^{\alpha-1}, z_k\right)}$$

2 Metrische Räume

2.1 Der Metrische Raum

Def.: Ein <u>metrischer Raum</u> $[\mathbb{E}, d]$ ist eine nichtleere Menge $\mathbb{E}$ und eine Abbildung $d : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{R}^+$, die Metrik genannt wird, mit den folgenden Eigenschaften:

1. $d(x, y) = d(y, x)\, \forall x, y \in \mathbb{E}$
2. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)\, \forall x, y, z \in \mathbb{E}$ (1. Dreiecksungleichung)
3. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

Def.: Ein <u>normierter</u> Raum $[\mathbb{E}, || \cdot ||]$ ist ein linearer Raum $\mathbb{E}$ und eine Abbildung $|| \cdot || : \mathbb{E} \to \mathbb{R}^+$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. $||\lambda x|| = |\lambda|\, ||x||\, \forall x \in \mathbb{E}$, $\lambda \in \mathbb{R}$
2. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||\, \forall x, y \in \mathbb{E}$ (1. Dreiecksungleichung)
3. $||x|| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$

2.2 Konvergenz und Stetigkeit

Def.: Eine Folge von Elementen (x_n) eines metrischen Raumes $[\mathbb{E}, d]$ <u>konvergiert</u> gegen $x \in \mathbb{E}, d$, wenn:

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \; (d(x_n, x) < \epsilon \, \forall n > n_0)$$

x heißt Grenzwert der Folge (x_n): $x = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$

Def.: Eine Folge von Elementen (x_n) eines metrischen Raumes $[\mathbb{E}, d]$ ist eine <u>Cauchy-Folge</u>, wenn:

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \; (d(x_n, x_m) < \epsilon \, \forall n, m > n_0)$$

Def.: Ein metrischer Raum ist <u>vollständig</u>, wenn jede Cauchy-Folge dort auch konvergiert.

Def.: Eine Abbildung f von einem metrischen Raum $[\mathbb{E}_1, d_1]$ in einen anderen metrischen Raum $[\mathbb{E}_2, d_2]$ ist <u>stetig</u> in $x_0 \in \mathbb{E}_1$, wenn:

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \; (d_1(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(x_0)) < \epsilon)$$

Satz: Eine Abbildung $f : \mathbb{E}_1 \to \mathbb{E}_2$ ist genau dann in $x_0 \in \mathbb{E}_1$ stetig, wenn für jede Folge (x_n) mit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ gilt:

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)}$$

2.3 Offene und abgeschlossene Mengen

Schreibweise: Für $x \in \mathbb{E}$ und $\epsilon > 0 : U_\epsilon(x) := \{y \in \mathbb{E} : d(x, y) < \epsilon\}$

Def.: Eine Teilmenge $\mathbb{M} \subseteq \mathbb{E}$ ist <u>offen</u>, wenn:

$$\forall x \in \mathbb{M} \, \exists \epsilon > 0 : \; U_\epsilon(x) \subseteq \mathbb{M}$$

Eine Teilmenge $\mathbb{M} \subseteq \mathbb{E}$ ist <u>abgeschlossen</u>, wenn $\mathbb{E} \setminus \mathbb{M}$ offen ist.

Satz: Eine Folge (x_n) in $\mathbb{E}$ konvergiert genau dann gegen $x0 \in \mathbb{E}$, wenn für alle offenen Teilmengen $\mathbb{U}$ mit $x_0 \in \mathbb{U}$:

$$\boxed{\exists n_0 \in \mathbb{N} : \; \forall n > n_0}$$

Satz: Eine Abbildung $f : \mathbb{E}_1 \to \mathbb{E}_2$ ist genau dann stetig, wenn $f^{-1}(\mathbb{M}) := \{x \in \mathbb{E}_1 : f(x) \in \mathbb{M}\}$ für jede offene Teilmenge $\mathbb{M}$ von $\mathbb{E}_2$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{E}_1$ ist.

Def.: Die <u>abgeschlossene Hülle</u> $\overline{\mathbb{M}}$ einer Teilmenge $\mathbb{M}$ eines metrischen Raumes $[\mathbb{E}, d]$ ist der Durchschnitt aller abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{E}$, die $\mathbb{M}$ umfassen.

$$\boxed{\begin{aligned} \overline{\mathbb{M}} \quad &= \quad \{x \in \mathbb{E} : \; \forall \epsilon > 0 \; \exists x_\epsilon \in \mathbb{M} : \; d(x_\epsilon, x) < \epsilon\} \\ &= \quad \{x \in \mathbb{E} : \; \exists (x_n) \in \mathbb{M} : \; \lim_{n \to \infty} x_n = x\} \end{aligned}}$$

Def.: Eine Teilmenge $\mathbb{M}$ von $\mathbb{E}$ ist <u>dicht</u> in $\mathbb{E}$, wenn $\overline{\mathbb{M}} = \mathbb{E}$

Def.: Ein metrischer Raum heißt <u>separabel</u>, wenn er eine abzählbare, dichte Teilmenge hat.

2.4 Der Banachsche Fixpunktsatz

Def.: $x \in \mathbb{E}$ ist <u>Fixpunkt</u> einer Abbildung $\mathbf{K} : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$, wenn $\mathbf{K}(x) = x$

Def.: Eine Abbildung $\mathbf{K} : \mathbb{E}_1 \to \mathbb{E}_2$ heißt Kontraktion, wenn eine Zahl $0 \leq q < 1$ existiert, so dass für $x, y \in \mathbb{E}_1$:

$$d(\mathbf{K}x, \mathbf{K}y) \leq d(x, y)$$

Der Banachsche Fixpunktsatz

Jede Kontraktion $\mathbf{K}$ in einem vollständigen metrischen Raum $\mathbb{E}$ hat genau einen Fixpunkt x. Dieser lässt sich approximieren durch eine Folge von Elementen $x_n := \mathbf{K}^n x_0$, wobei x_0 beliebig gewählt wird. Es gilt die Fehlerabschätzung $d(x_n, x) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_0, x)$.

3 Funktionen von mehreren Variablen

3.1 Differentiation

Def.: Es sei $\mathbb{D}$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Die Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^m$ ist im Punkt $x^0 \in \mathbb{D}$ differenzierbar, wenn eine lineare Abbildung $f'(x^0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ existiert, für die gilt:

$$\lim_{x \to x^0} \frac{f(x) - f(x^0) - f'(x^0)(x - x^0)}{d(x, x^0)} = \vec{0}$$

Satz: Sei $\mathbb{D}$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und $x^0 \in \mathbb{D}$. Wenn die partiellen Ableitungen erster Ordnung in x^0 stetig sind, ist die Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar mit:

$$\boxed{f'(x^0) = \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x^0) \right)_{k,j} \quad \text{(Jacobi-Matrix)}}$$

Die Determinante der Jacobi-Matrix wird Jacobi-Determinante genannt. Die einzelnen Zeilen der Matrix entsprechen den Gradienten der Funktionen $f_1, \ldots, f_m$.

Satz: Kettenregel

Wenn die Funktionen $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ im Punkt $x^0 \in \mathbb{R}^k$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ im Punkt $y^0 = g(x^0) \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar sind, gilt:

$$\boxed{(f \circ g)'(x^0) = f'(g(x^0)) * g'(x^0)}$$

3.2 Implizite Funktionen

Satz: Auflösungssatz

Für die Funktion $F(x, y) : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$ mit $x \in \mathbb{R}^m$ und $y \in \mathbb{R}^n$ gelte $F(x^0, y^0) = \vec{0}$. Die quadratische Matrix $\frac{\partial F}{\partial y} := \left(\frac{\partial F_k}{\partial y_j} \right)_{k,j}$ sei in einer Umgebung von (x^0, y^0) stetig von (x, y) abhängig und im Punkt (x^0, y^0) invertierbar. Dann existieren positive Zahlen ρ, σ, so dass zu jedem $x \in B_\rho(x^0) := \{x \in \mathbb{R}^m : d(x, x^0) \leq \rho\}$ genau ein $y \in B_\sigma(y^0) := \{y \in \mathbb{R}^n : d(y, y^0) \leq \sigma\}$ mit $F(x, y) = \vec{0}$ existiert. Die dadurch auf $B_\rho(x^0)$ definierte Funktion $y = f(x)$ ist dort stetig. Wenn außerdem die Matrix der partiellen Ableitungen $\frac{\partial F}{\partial x} := \left(\frac{\partial F_k}{\partial x_j} \right)_{k,j}$ in $B_{\rho'}(x^0) \subseteq B_\rho(x^0)$ stetig ist, ist f dort stetig differenzierbar mit:

$$\boxed{f'(x) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}, \text{ also } \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial F_i}{\partial y_k} + \frac{\partial F_j}{\partial x_k} = 0 \ \forall j, k}$$

Satz: Lokale Umkehrbarkeit

$x = g(y)$ sei in einer Umgebung von y^0 stetig differenzierbar, die Matrix $g'(y^0) = \frac{dx}{dy}$ sei invertierbar, dann ist in einer Umgebung von $x^0 = g(y^0)$ die Umkehrfunktion $y = g^{-1}(x)$ erklärt und dort stetig differenzierbar mit

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1}}$$

3.3 Mehrdimensionale Taylor-Reihen

Satz: Differentiale höherer Ordnung

Die Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ habe in einer Umgebung von $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ stetige partielle Ableitungen bis zur k-ten Ordnung und es sei $g(t) = f(x^0 + t \cdot x^1)$. Dann ist $g(t)$ bei $t = 0$ k mal stetig differenzierbar und es gilt:

$$\boxed{g^{(k)}(0) = \sum_{k_1+\ldots+k_n=k} \frac{k!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_n!} \cdot \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot \partial x_n^{k_n}}(x^0) \cdot (x_1^1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x_n^1)^{k_n}}$$

Satz: Taylor

Wenn die Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ in $U_\rho(x^0)$ stetige partielle Ableitungen bis zur $k-1$-ten Ordnung hat, dann existiert zu jedem $x \in U_\rho(x^0)$ eine Zahl $0 < \Theta < 1$, so dass gilt:

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) \quad = & \sum_{k_1+\ldots+k_n \leq k} \left[\frac{1}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_n!} \cdot \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot \partial x_n^{k_n}}(x^0) \cdot \prod_{i=1}^{n}(x_i - x_i^0)^{k_i}\right] \\ + & \sum_{k_1+\ldots+k_n=k+1} \left[\frac{1}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_n!} \cdot \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot \partial x_n^{k_n}}(x^0 + \Theta \cdot (x - x^0)) \cdot \prod_{i=1}^{n}(x_i - x_i^0)^{k_i}\right] \end{aligned}}$$

3.4 Relative Extrema

Def.: Sei $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, $x^0 \in \mathbb{D}$ mit $\exists \rho > 0 : \; U_\rho(x^0) \subseteq \mathbb{D}$. Die Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ hat in x^0 ein <u>relatives (lokales) Minimum (Maximum)</u>, wenn:

$$\exists \delta > 0 \text{ mit } f(x) \gtreqless f(x^0) \; \forall x \in U_\rho(x^0)$$

Satz: notwendige Bedingung

Sei f differenzierbar in x^0 und habe dort lokales Extremum. Dann gilt:

$$\boxed{(\text{grad } f)(x^0) = \vec{0}}$$

Def.: Eine symmetrische quadratische Matrix $\mathbf{A}$ ist <u>positiv (negativ) definit</u>, wenn

$$< x, \mathbf{A}x > = x^{\mathrm{T}}\mathbf{A}x \gtrless 0 \; \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$$

Def.: Eine symmetrische quadratische Matrix $\mathbf{A}$ ist <u>positiv (negativ) semidefinit</u>, wenn

$$< x, \mathbf{A}x > = x^{\mathrm{T}}\mathbf{A}x \gtreqless 0 \; \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$$

Satz $\mathbf{A}$ ist genau dann positiv (negativ) semidefinit, wenn alle Eigenwerte von $\mathbf{A}$ positiv (negativ) sind.

Folgerung: hinreichende Bedingung

Wenn $(\text{grad } f)(x^0) = \vec{0}$ und alle Eigenwerte der Matrix $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}\right)_{i,k}$ positiv (negativ) sind, hat f an der Stelle x^0 ein relatives Minimum (Maximum).

3.5 Relative Extrema unter Nebenbedingungen

Satz $f(x_1, \ldots, x_n)$ und $g_s(x_1, \ldots, x_n)$ mit $s = 1, \ldots, m$ und $m < n$ seien in einer Umgebung von $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ stetig differenzierbar und im Punkt x^0 gelte:

$$\det \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_k}\right)_{i,k \in 1,\ldots,m} = 0$$

Für $\gamma_j(x_{m+1}, \ldots, x_n),\ j = 1, \ldots, n$ gelte in einer Umgebung von $(x_{m+1}^0, \ldots, x_n^0)$:

$$g_s(\gamma_1(x_{m+1}, \ldots, x_n), \ldots, \gamma_m(x_{m+1}, \ldots, x_n), x_{m+1}, \ldots, x_n) = 0$$

Dann gilt im Punkt $(x_{m+1}^0, \ldots, x_n^0)$ für

$$F(x_{m+1}, \ldots, x_n) = f(\gamma_1(x_{m+1}, \ldots, x_n), \ldots, \gamma_m(x_{m+1}, \ldots, x_n), x_{m+1}, \ldots, x_n)$$

genau dann $\frac{\partial F}{\partial x_k} = 0$ für $k = m+1, \ldots, n$, wenn Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ existieren, so dass im Punkt x^0:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{s=1}^{m} \lambda_s \frac{\partial g_s}{\partial x_i} = 0\ \forall i \in 1, \ldots, n}$$

3.6 Mehrfache Integrale

$$\boxed{\begin{aligned} & \int_\Omega \cdots \int f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \\ = & \int_{\Omega'} \cdots \int f(x_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, x_n(y_1, \ldots, y_n)) \left| \det \left(\frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)}\right) \right| dy_1 \cdots dy_n \end{aligned}}$$

3.7 Kurvenintegrale in $\mathbb{R}^n$

Kurvenintegral 1. Art

Für eine stückweise glatte Kurve $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ mit Parameterdarstellung $x : [a, b] \to \mathcal{K}$, injektiv bis auf endlich viele Ausnahmen, stetig, stückweise stetig differenzierbar mit $x'(t) \neq \vec{0}\ \forall t \in [a, b], f : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ stückweise stetig ist das Kurvenintegral erster Art definiert als:

$$\int_{\mathcal{K}} f ds = \int_a^b f(x(t)) |x'(t)| dt$$

Kurvenintegral 2. Art

Für eine stückweise glatte Kurve $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ mit Parameterdarstellung $x : [a, b] \to \mathcal{K}$, injektiv bis auf endlich viele Ausnahmen, stetig, stückweise stetig differenzierbar mit $x'(t) \neq \vec{0}\ \forall t \in [a, b], f : \mathcal{K} \to \mathbb{R}^n$ stückweise ist das Kurvenintegral zweiter Art definiert als:

$$\int_{\mathcal{K}} \vec{f} d\vec{s} = \int_a^b < f(x(t)), x'(t) > dt$$

3.8 Oberflächenintegrale

Flächeninhalt gekrümmter Flächen

Sei Fläche F in Projektion gegeben: $\mathbb{F} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \mathbb{F}^*,\ z = f(x,y)\}$ mit f stetig differenzierbar, d.h. f_x, f_y stetig. Der Flächennormalenvektor ist gegeben durch

$$\vec{n} = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}$$

Damit ergibt sich der Flächeninhalt zu

$$\iint\limits_{\mathbb{F}^*} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dxdy$$

Ist die Fläche in Parameterdarstellung gegeben: $r : \Gamma \leftrightarrow \mathbb{F},\ \vec{r}(u,v)$, stetig differenzierbar. Tangentenvektoren $\partial_u := \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = (x_u, y_u, z_u)$ und $\partial_v := \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (x_v, y_v, z_v)$. Dann Normalenvektor gegeben durch $\partial_u \times \partial_v$. Für seinen Betrag gilt:

$$\begin{aligned} |\partial_u \times \partial_v| &= \sqrt{E \cdot G - F^2} \text{ mit} \\ E &= < \partial_u, \partial_u > \\ F &= < \partial_u, \partial_v > \\ G &= < \partial_v, \partial_v > \end{aligned}$$

Oberflächenintegral 1. Art

Sei die Oberfläche gegeben wie oben und eine auf ihr stetige Funktion f. Dann ist das Oberflächenintegral erster Art definiert als:

$$\begin{aligned} \iint\limits_{\mathbb{F}} f ds &= \iint\limits_{\mathbb{F}^*} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dxdy \\ &= \iint\limits_{\Gamma} \sqrt{E \cdot G - F^2} dudv \\ &= \iint\limits_{\mathbb{F}^*} \frac{1}{D} \sqrt{E \cdot G - F^2} dxdy \\ & \quad \text{mit } D = \det \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} \\ \left| \iint\limits_{\mathbb{F}} f ds \right| &\leq \iint\limits_{\mathbb{F}} |f| ds \leq \sup |f| \iint\limits_{\mathbb{F}} ds = \sup |f| \cdot A \end{aligned}$$

Oberflächenintegral 2. Art

Für ein stetiges Vektorfeld $\vec{F}(\vec{r})$ ist das Oberflächenintegral zweiter Art definiert als:

$$\begin{aligned} \iint\limits_{\mathbb{F}} \vec{F} d\vec{A} &= \iint\limits_{\Gamma} < \vec{F}, \partial_u \times \partial_v > dudv \\ &= \iint\limits_{\Gamma} \det \begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} dudv \end{aligned}$$

3.9 Integralsätze

Integralsatz von Gauß

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ eine beschränkte, abgeschlossene Teilmenge mit stückweise glatter Oberfläche $\partial\Omega$, $\vec{n}$ der äußere Normaleneinheitsvektor auf $\partial\Omega$, $\vec{F}(\vec{r})$ ein auf Ω stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt:

$$\boxed{\iint\limits_{\partial\Omega} \vec{F} d\vec{A} = \iiint\limits_{\Omega} \mathrm{div}\vec{F} dV}$$

Integralsatz von Stokes

Sei $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ eine stückweise Glatte, beschränkte Fläche mit stückweise glatter Randkurve $\partial\mathcal{S}$, orientiert nach rechte-Hand-Regel und $\vec{F}(\vec{r})$ ein auf $\mathcal{S}$ stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt:

$$\boxed{\oint\limits_{\partial\mathcal{S}} \vec{F} d\vec{r} = \iint\limits_{\mathcal{S}} \mathrm{rot}\vec{F} d\vec{A}}$$

4 Gewöhnliche Differentialgleichungen

4.1 Anfangswertaufgabe

Satz Sei f definiert in $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ und dort stetig:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \phi'(x) = f(x, \phi(x)) \\ \phi(x_0) = y_0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \phi(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, \phi(\xi)) d\xi}$$

Def.: Eine auf dem Intervall $[a, b]$ reellwertige Funktion f erfüllt eine <u>Lippschitz-Bedingung</u>, wenn eine positive Zahl L existiert, so dass:

$$|f(x) - f(x')| \leq L|x - x'| \; \forall x, x' \in [a, b]$$

Lokaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz (Picard-Lindelöf)

Die Funktion $f(x, y)$ sei in $\mathbb{D} = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b] \subseteq \mathbb{R}^2$ stetig und durch $f(x, y) < C$ beschränkt und erfülle eine Lippschitz-Bedingung der Form $|f(x, y) - f(x, y')| \leq L|y - y'|$ für $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$ und $y, y' \in [y_0 - b, y_0 + b]$. Wenn nun gilt $a \cdot c \leq b$ und $a \cdot L < 1$, dann gibt es auf $[x_0 - a, x_0 + a]$ genau eine Funktion ϕ mit $\phi'(x) = f(x, \phi(x)) \wedge \phi(x_0) = y_0$.

Methode der sukzessiven Approximation

Für die Anfangswertaufgabe $y' = f(x, y), \; y_0 = y(x_0)$ ist eine Folge ϕ_n von Funktionen wie folgt festgelegt, die gegen eine Lösung konvergiert:

$$\boxed{\phi_0 = y_0, \; \phi_{n+1} = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, \phi_n(\xi)) d\xi}$$

4.2 Elementare Lösungsmethode

Trennung der Variablen

Die Differentialgleichung habe die Form $y' = f(x, y) = g(x) * h(y), \; g, \; h$ jeweils auf einem Intervall und damit $f(x, y)$ auf einem Rechteck stetig und beschränkt. Sei $h(y) \neq 0 \; \forall(y)$. Dann ist die eindeutige Lösung der Anfangswertaufgabe gegeben durch:

$$\boxed{\int\limits_{y_0}^{\phi(x)} \frac{d\eta}{h(\eta)} = \int\limits_{x_0}^{x} g(\xi) d\xi}$$

Exakte Differentialgleichungen

Sei die Differentialgleichung gegeben als $y' = -\frac{g(x,y)}{h(x,y)}$ mit $h(x,y) \neq 0$, g, h stetig differenzierbar und es gelte $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial x}$, also dass $(g, h) = \operatorname{grad} F$. Dann lässt sich die Differentialgleichung formulieren als $g(x,y) + h(x,y)\, y' = 0$, dann gilt:

1. Die durch $F(x, \phi(x)) = C$ definierte Funktion $\phi(x) = y$ erfüllt die Differentialgleichung
2. Jede Lösung der Differentialgleichung hat die Eigenschaft $F(x, \phi(x)) = C$