Zusammenfassung Gewöhnliche Differentialrechnung

Grundlage: Eigene Aufzeichnungen aus der Vorlesung

Mario Chemnitz

3. September 2007

1 Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung

Definition 1 *Unter einer DGL erster Ordnung versteht man eine Gleichung*

$$y' = K(x, y) \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

Eine reellwertige Funktion $y(x)|_I$ heißt Lösung der obigen DGL, wenn $y(x)$ auf I stetig diff.bar ist und $y'(x) = K(x, y)$ für alle $x \in I$ gilt.

Die Menge aller Lösungen der DGL heißt allgemeine Lösung.
Eine einzelne Lösung dieser Menge wird als spezielle Lösung bezeichnet.
Bei einem AWP für die DGL ist zusätzlich noch in einem Punkt x_0 der Wert der Lösungsfunktion $y(x_0) = y_0$ vorgegeben.

Definition 2 *Eine DGL der Form*

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

heißt DGL mit trennbaren Variablen.

Unter einem Richtungsfeld versteht man die Menge aller Linienelemente (Linienelement: $[x, y, K(x, y)]$), d.h. alle Anstiege y' bzw. Richtungen, die durch Punkte (x, y) zuordenbar sind. Lösen der DGL heißt dann eine Funktion y(x) zu finden, die in das Richtungsfeld passen, d.h. für die gilt:

$$(x, y, y'(x)) \cong (x, y, K(x, y))$$

Differentialgleichungen vom Typ $y' = h\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$

1. Fall $\qquad y' = h(ax + by + c) \qquad (*)$

Ansatz: $\qquad z(x) = ax + b\,y(x) + c \quad \xrightarrow{(*)} \quad y'(x, y) = h(z)$

Sei $y(x)$ Lsg. von $(*)$. Bilden der Ableitung von $z(x)$:

$$\begin{aligned} z'(x) &= a + b\,y'(x) \\ &= a + b\,h(z(x)) \end{aligned}$$

$\rightarrow$ DGL erster Ordnung mit trennbaren Variablen $z' = f(z)$
$\rightarrow$ Lösen und Einsetzen ergibt:

$$y(x) = \frac{1}{b}\,(\,z(x) - ax - c) \qquad b \neq 0$$

$\Rightarrow$ Ist Lösung von $(*)$!

<u>2. Fall</u> $\qquad y' = h(\frac{y}{x}) \qquad x \neq 0$

Ansatz: $\qquad z(x) = \frac{y(x)}{x} \qquad$ bzw. $\qquad z(x) \cdot x = y(x)$

Sei $y(x)$ Lsg. Bilden der Ableitung von $z(x)$:

$$\begin{aligned} z'(x) \cdot x &= y'(x) \\ &= h(z(x)) \\ z'(x) &= \frac{1}{x} \cdot \Big(h(z) - z\Big) \end{aligned}$$

$\rightarrow$ DGL erster Ordnung mit trennbaren Variablen $z' = f(z)$
$\rightarrow$ Lösen und in $z(x) \cdot x = y(x)$ einsetzen. $\Rightarrow$ Lösung!

<u>3. Fall</u> $\qquad y' = h\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$

Sonderfall: $\qquad \alpha = \beta = 0 \qquad \longrightarrow \qquad$ 1. Fall

<u>3.1</u> $\qquad \begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha\, b = a\, \beta$

Wenn $\beta = 0 \quad (\alpha \neq 0) \quad \Rightarrow \quad b = 0$

$$y' = h\left(\frac{ax+c}{\alpha x+\gamma}\right) \rightarrow \textit{trivial}$$

Wenn $\alpha = 0 \quad (\beta \neq 0) \quad \Rightarrow \quad a = 0$

$$y' = h\left(\frac{by+c}{\beta y+\gamma}\right) \rightarrow \textit{trivial}$$

Wenn $\beta \neq 0$ und $\alpha \neq 0$ dann ex. λ mit $a = \lambda\alpha$, $b = \lambda\beta$

$$y' = h\left(\frac{\lambda\alpha x+\lambda\beta y+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$$

$$\begin{aligned} \textit{Ansatz:} \qquad z(x) &= \alpha x + \beta y(x) \\ z' &= \alpha + \beta \cdot y' \\ &= \alpha + \beta \cdot h\left(\frac{\lambda z + c}{z+\gamma}\right) \rightarrow \textit{trivial} \end{aligned}$$

<u>3.2</u> $\qquad \begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha\, b \neq a\, \beta$

Dann ist das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 + c &= 0 \\ \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma &= 0 \end{aligned}$$

eindeutig lösbar. $\longrightarrow$ Lösung (x_1, x_2) bestimmen!
Nun Einführung neuer Variablen: $\quad x := u + x_1, \quad y := v + x_2$

$$
\begin{aligned}
v(u) &:= y(u + x_1) - x_2 \\
\frac{dv}{du} &\overset{Kettenregel}{=} \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{du} \\
&\overset{Substitution}{=} \frac{dy}{dx} \cdot \underbrace{\frac{d(u + x_1)}{du}}_{=0} \\
&= y'(u + x_1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{dv}{du}(u) &= h\left(\frac{a(u + x_1) + b(v(u) + x_2) + c}{\alpha(u + x_1) + \beta(v(u) + x_2) + \gamma}\right) \\
&= h\left(\frac{au + bv(u)}{\alpha u + \beta v(u)}\right) \quad \overset{da}{\longrightarrow} \quad ax_1 + bx_2 + c = 0 \\
v' &= h\left(\frac{a + b\,\frac{v}{u}}{\alpha + \beta\,\frac{v}{u}}\right) \qquad u \neq 0
\end{aligned}
$$

$\longrightarrow$ (Euler) homogene DGL $\rightarrow$ 2. Fall!
1.4 aus den Aufzeichnungen fehlt!!!

Definition 3 *Eine DGL der Form*

$$y' = P(x)\,y + Q(x)\,y^n \qquad n \in \mathbb{R}$$

heißt Bernouli'sche DGL.

Vorüberlegung:

$$
\begin{aligned}
y' &= P(x)\,y + Q(x)\,y^n \qquad | : y^n \\
\underbrace{y^{-n}\,y'}_{Kettenregel} &= P(x)\,y^{1-n} + Q(x) \\
\frac{1}{1-n}\,\frac{d(y^{1-n})}{dx} &= P(x)\,y^{1-n} + Q(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Subst.: \quad z(x) &= y^{1-n} \\
z'(x) &= (1-n) \cdot P(x)\,z(x) + (1-n) \cdot Q(x)
\end{aligned}
$$

Satz 1 *Es sei* $y' = P(x)\,y + Q(x)\,y^n$ *mit* $y(x_0) = y_0 > 0$;
$P(x), Q(x)$ *stetig auf* $I (x_0 \in I)$
und $n \neq 0, 1$ *(da bereits bekannt).*
Dann besitzt das AWP genau eine Lösung auf dem Teilintervall $\tilde{I}$. $y(x)$ *ist durch* $y(x) = z(x)^{\frac{1}{1-n}}$ *auf dem größten* x_0 *enthaltenen Teilintervall* $\tilde{I}$ *definiert, auf dem* $z(x)$ *durchweg positiv ist.*
$z(x)$ *ist dabei die Lösung von* $z'(x) = (1-n) \cdot [P(x)\,z(x) + Q(x)]$ *(bei einem AWP gilt* $z(x_0) = z_0$*).*

Tipp: Die Lösung dieser DGL erfolgt i.a. über die Variation der Konstanten.

Definition 4 *Eine DGL der Form*

$$y' = f(x)\,y^2 + g(x)\,y + h(x)$$

heißt Riccati'sche DGL.

Satz 2 *Es sei $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ stetig auf I.*
Ist $y_p(x)$ eine partikuläre Lösung der Riccati'schen DGL, so erhält man alle Lösungen dieser DGL in der Form $y = y_p + u$, wobei u die allgemeine Lösung der Bernoulli'schen DGL

$$u' = [2\,f(x)\,y_p + g(x)] \cdot u + f(x)\,u^2$$

Definition 5 *Eine DGL der Form*

$$P(x,y) + Q(x,y) \cdot y' = 0$$

P(x,y), Q(x,y) stetig auf D (Def.Rechteck)
heißt <u>exakt</u>, wenn eine stetig partiell diff.bare Funktion $F(x,y)|_D$ existiert mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) &= P(x,y) \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) &= Q(x,y) \qquad\qquad (x,y) \in D \end{aligned}$$

(P,Q) heißt Potentialfeld/Gradientenfeld, wenn gilt

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{F(x_0,y) - F(x_0,y_0)}{y - y_0}$$

Satz 3 *Gegeben seien eine exakte DGL und die zugehörige Potentialfunktion F(x,y).*

(i) $y(x)$ ist eine Lsg. der DGL genau dann wenn $F(x,y(x)) = const \quad \forall x$

(ii) $x(y)$ ist eine Lsg. der DGL genau dann wenn $F(x(y),y) = const \quad \forall y$

(iii) Ist $(x_0,y_0) \in D$ und $\operatorname{grad} F(x_0,y_0) \neq (0,0)$ so ist die DGL mit dem Anfangswert $y(x_0) = y_0$ in der Def.Umgebung lösbar.

Satz 4 *$P(x,y), Q(x,y)|_D$ seien stetig partiell diff.bar.*
Die obige DGL ist exakt genau dann wenn auf D gilt

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y).$$

Sei $(x_0,y_0) \in D$ fixiert, so lässt sich eine Partialfunktion F(x,y) bestimmen als

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t,y_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,s)ds$$

Die Lösung des AWP wird dann implizit gegeben durch $F(x,y) = 0$

$$P = \frac{\partial F}{\partial x} \qquad\qquad Q = \frac{\partial F}{\partial y}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \overset{i.a.}{=} \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

<u>Rechenvariante:</u>
Bemerkung: $F(x,y) = c$ löst die DGL nur, wenn sie exakt ist!

$$\begin{aligned} G(x,y) &= \int Q(x,y)\,dy \\ F(x,y) &:= G(x,y) + \varphi(x) \\ \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial G}{\partial x}(x,y) + \varphi'(x) \overset{!}{=} P(x,y) \end{aligned}$$

→ $\varphi'(x)$ ermitteln
→ $\varphi(x)$ berechnen
→ $F(x,y)$ nach y(x) umstellen $\Longrightarrow$ Lösung!

Multiplikator-Methode:
Gesucht wird eine Funktion $M(x,y)$, sodass eine nicht-exakte DGL nach Multiplikation mit M(x,y) in eine exakte DGL bergeht.

$$\begin{array}{rcccl} & & M(x,y)\cdot P(x,y) + M(x,y)\cdot Q(x,y)\cdot y' & = 0 & \\ \dfrac{\partial(M\,P)}{\partial y} & = & \underline{\frac{\partial M}{\partial y}\cdot P + M\cdot\frac{\partial P}{\partial y} \stackrel{!}{=} \frac{\partial M}{\partial x}\cdot Q + M\cdot\frac{\partial Q}{\partial x}} & = & \dfrac{\partial(M\,Q)}{\partial x} \end{array}$$

Spezialfälle integrierender Faktoren:

Spezielle DGL	Integrierender Faktor
$\left[\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right]\cdot\frac{1}{Q(x,y)} = f(x)$	$M(x) = \exp^{\int f(x)dx}$
$\left[\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right]\cdot\frac{1}{P(x,y)} = g(y)$	$M(y) = \exp^{-\int g(y)dy}$
$\left[\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right]\cdot\frac{1}{x\,P(x,y) - y\,Q(x,y)} = h(x\cdot y)$	$M(x\cdot y) = \exp^{-\int h(t)dt}\|_{t=xy}$

2 Existenz- und Unitätssätze

Integraloperator

$y(x)$ sei eine Lösung des AWP $y(x_0) = y_0$.

$$\begin{aligned} y'(x) &= k(x, y(x)) \\ y(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} k(t, y(t))dt \qquad (Integralgleichung) \\ (\mathbb{K}\,y)(x) &:= y_0 + \int_{x_0}^{x} k(t, y(t))dt \end{aligned}$$

Und umgekehrt ist $y(x)$ eine stetige Fkt., die die gegebene Integralfunktion löst. So ist y(x) stetig diff.bar und löst das AWP.
$\mathbb{K}$ ist ein Integraloperator, der stetige (diff.bare) Funktionen wiederum zu stetigen Funktionen ableitet.

Lipschitzbedingung (bzgl. y):

$$\begin{aligned} \exists L > 0 \quad \forall (x,y), (x,\bar{y}) \in Q &= \{(x,y) : |x - x_0| \le c,\ |y - y_0| \le d\} : \\ |k(x,y) - k(x,\bar{y})| &\le L|y - \bar{y}| \end{aligned}$$

[...] Abschnitt 2 wird an dieser Stelle nicht weiter geführt!

3 Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung

Definition 1 *Eine DGL der Form*

$$y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)\cdot y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_1(x)\cdot y'(x) + p_0(x)\cdot y(x) \; = \; q(x)$$

mit $p_{n-1}(x), \ldots, p_1(x), p_0(x), q(x) \quad |_J$ *heißt* *lineare DGL n-ter Ordnung.*

Lemmata

- **Lemma 1** *Die allgemeine Lsg. der inhomogenen DGL ist gleich der Summe aus der allgemeinen Lsg. der homogene DGL und einer partikulären Lsg. der inhomogenen DGL:*

$$y_{inh}(x) = y_{homog}(x) + y_{part}(x)$$

- **Lemma 2** *Jede Linearkombination* $u(x) = c_1 u_1(x) + \cdots + c_n u_n(x)$ *von Lsg.en der homogenen DGL ist wieder eine Lsg. dieser DGL.*

- **Lemma 3** *Sind die Funktionen* $p_{n-1}(x), \ldots, p_1(x), p_0(x), q(x)$ *stetig auf* $J = [x, y]$*, so besitzt für jedes* $x_0 \in [a, b]$ *das AWP*

$$y(x_0) = y_0;\ \ldots;\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \qquad \forall (y_0, \ldots, y_0^{(n-1)}) \in \mathbb{R}^n$$

genau eine Lsg. auf $[a, b]$*.*

Homogene DGL

$$x_0 = [a, b] \qquad (y_0, \ldots, y_0^{(n-1)}) \in \mathbb{R}^n$$

AWP für die homogene DGL eindeutig lösbar.
Spezielle Anfangswerte setzen:

- x_0 fest; y_0-Tupel: $(1, 0, \ldots, 0) \quad \Longrightarrow \quad y(x_0) = 1; y'(x_0) = \ldots = y^{(n-1)}(x_0) = 0$
  Lsg. sei $v_1(x)$.
- x_0 fest; y_0-Tupel: $(0, 1, \ldots, 0) \quad \Longrightarrow \quad y'(x_0) = 1$
  Lsg. sei $v_2(x)$.

  $\vdots$
- x_0 fest; y_0-Tupel: $(0, 0, \ldots, 1) \quad \Longrightarrow \quad y^{(n-1)}(x_0) = 1$
  Lsg. sei $v_n(x)$.
  Dann ist die allgemeine (eindeutig bestimmte) Lsg. des AWP für die homogene DGL darstellbar als
  $$y(x) = y_0 \cdot v_1(x) + y_0' \cdot v_2(x) + \cdots + y_0^{(n-1)} \cdot v_n(x)$$

Inhomogene DGL
[...] Fehlt!

Definition 2 *(Wronski-Determinante)*
Die Lsg.en $u_1(x), \ldots, u_n(x)$ *der homogenen DGL heißen* *Fundamentalsystem* *(Integralbasis) falls*

$$\begin{vmatrix} u_1(x) & \cdots & u_n(x) \\ u_1'(x) & \cdots & u_n'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(x) & \cdots & u_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = W(u_1 \ldots u_n)(x) \neq 0 \qquad \forall x \in [a, b]$$

gilt. $W(u_1 \ldots u_n)(x)$ *heißt Wronski-Determinante.*

Bemerkung: $W(u_1 \ldots u_n)(x) \neq 0$ genau dann wenn $u_1(x), \ldots, u_n(x)$ linear unabhängig sind.

Satz 1 *Es seien $p_0(x); \ldots; p_{n-1}$ stetig auf $[a,b]$. Die homogene DGL besitzt dann stets ein Fundamentalsystem, dass aus n Funktionen besteht.*
Ist $u_1(x) \cdots u_n(x)$ ein solches FS, so ist jede Lsg. der homogene DGL darstellbar als

$$y_h(x) = c_1 u_1(x) + \cdots + c_n u_n(x)$$

mit geeigneten (eindeutig bestimmten) reellen Zahlen $c_1 \ldots c_n$.

Bemerkung: $n+1$ Lsg.en der homogenen DGL (n-ter Ordnung) sind stets linear abhängig .

Variation der Konstanten
Bei gegebenem FS kann eine partikuläre Lsg. einer inhomogenen DGL wie folgt bestimmt werden:
Ansatz:

$$\begin{aligned}
y_p(x) &:= c_1(x)u_1(x) + \cdots + c_n(x)u_n(x) \\
y_p'(x) &:= \underline{c_1'(x)u_1(x)} + c_1(x)u_1'(x) + \cdots + \underline{c_n'(x)u_n(x)} + c_n(x)u_n'(x) \\
y_p''(x) &:= \underline{c_1'(x)u_1'(x)} + c_1(x)u_1''(x) + \cdots + \underline{c_n'(x)u_n'(x)} + c_n(x)u_n''(x) \\
&\vdots \\
y_p^{(n)}(x) &:= \underline{c_1'(x)u_1^{(n-1)}(x)} + c_1(x)u_1^{(n)}(x) + \cdots + \underline{c_n'(x)u_n^{(n-1)}(x)} + c_n(x)u_n^{(n)}(x)
\end{aligned}$$

Bedingung:
Unterstrichene Terme fallen weg, da sie homogene Lsg. der DGL sind:

$$\begin{aligned}
c_1'(x)u_1(x) + \cdots + c_n'(x)u_n(x) &= 0 \\
c_1'(x)u_1'(x) + \cdots + c_n'(x)u_n'(x) &= 0 \\
&\vdots \\
c_1'(x)u_1^{(n-2)}(x) + \cdots + c_n'(x)u_n^{(n-2)}(x) &= 0 \\
c_1'(x)u_1^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n'(x)u_n^{(n-1)}(x) &= q(x)
\end{aligned}$$

Vorgehensweise:
Die unbekannten Funktionen sind $c_1'(x), \ldots, c_n'(x)$. Geben ist:

$$W(u_1 \ldots u_n)(x) \neq 0 \qquad \forall x \in [a,b]$$

$\hookrightarrow$ Gleichungssystem für alle x eindeutig lösbar
$\rightarrow$ $c_1'(x), \ldots, c_n'(x)$ ausrechnen
$\rightarrow$ Integrieren
$\rightarrow$ In den Ansatz einsetzen.

Cramer'sche Regel
(Bsp.: Gleichungssystem aus zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten)

$$\begin{aligned}
a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 &= b_1 \qquad | \cdot a_{22} \\
a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 &= b_2 \qquad | \cdot a_{12} \\
(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1 &= b_1 a_{22} - b_2 a_{12}
\end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{det\begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix}}{det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}$$

Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

$$\underbrace{L\,y}_{Linearer Operator} \quad := \quad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y \qquad a_j \in \mathbb{R}$$

Vorgehensweise:
Konstruktion eines Fundamentalsystems $\longrightarrow$ $W(u_1 \ldots u_n)(x) \neq 0$
Ansatz: $y(x) = e^{\lambda x}$

$$L\,y \quad \Longrightarrow \quad L[e^{\lambda x}] = P(\lambda) \cdot e^{\lambda x}$$

mit dem charakteristischen Polynom

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + \lambda a_1 + a_0$$

$L[e^{\lambda x}]$ ist genau dann Null, wenn $p(\lambda)$ gleich Null ist, d.h. $e^{\lambda x}$ ist Lsg. der homogenen DGL. (Man siehe additiv den „Fundamentalsatz der Algebra".)

Spezialfall (n=2)

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

Für das charakteristisch Polynom folgt dann:

$$P(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}$$

- 1.Fall:

$$\begin{array}{rrcll} & \frac{a_1^2}{4} - a_0 > 0 & & \lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R} & \\ & u_1(x) & = & e^{\lambda_1 x} & Erste\ Lsg.\ der\ homogenen\ DGL \\ & u_2(x) & = & e^{\lambda_2 x} & Zweite\ Lsg.\ der\ homogenen\ DGL \\ FS: & W(u_1,u_2)(x) & = & \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1) \cdot e^{(\lambda_2+\lambda_1)\cdot x} \neq 0 & \end{array}$$

- 2.Fall:

$$\begin{array}{rrcll} & \frac{a_1^2}{4} - a_0 = 0 & & \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{a_1}{2} & doppelte\ reelle\ Nullstelle \\ & u_1(x) & = & e^{\lambda_1 x} & Lsg.\ der\ homogenen\ DGL \\ & u_2(x) & = & x \cdot e^{\lambda_1 x} & Versuch \\ FS: & W(u_1,u_2)(x) & = & \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & x \cdot e^{\lambda_1 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_1 x} + \lambda_1 x \cdot e^{\lambda_1 x} \end{vmatrix} = e^{2\,\lambda_1 \cdot x} \neq 0 & \end{array}$$

- 3.Fall:

$$\frac{a_1^2}{4} - a_0 < 0 \qquad \lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{C}$$

$$\lambda_1 = a + bi \quad a = -\frac{a_1}{2}$$

$$\lambda_2 = a - bi \quad b = \sqrt{a_0 - \frac{{a_1}^2}{4}}$$

$$\begin{aligned} v_1(x) &:= e^{\lambda_1 x} = e^{(a+bi)x} \\ v_2(x) &:= e^{\lambda_2 x} = e^{(a-bi)x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_1(x) &:= \frac{1}{2}(v_1(x) - v_2(x)) && \Big| Linearkombination \\ u_2(x) &:= \frac{1}{2i}(v_1(x) + v_2(x)) && \Big| von\ v_1(x),\ v_2(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{bxi} &= cos(bx) + i\, sin(bx) \\ e^{-bxi} &= cos(bx) - i\, sin(bx) \end{aligned}$$

$$\rightarrow Addition \rightarrow Imagin\ddot{a}rteil\ entf\ddot{a}llt$$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow u_1(x) := e^{ax} cos(bx) \\ &\Longrightarrow u_2(x) := e^{ax} sin(bx) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} FS: \qquad W(u_1,u_2)(x) &= \begin{vmatrix} e^{ax}cos(bx) & e^{ax}sin(bx) \\ a\,e^{ax}cos(bx) - b\,e^{ax}sin(bx) & a\,e^{ax}sin(bx) + b\,e^{ax}cos(bx) \end{vmatrix} \\ &= e^{2\,a\cdot x} \neq 0 \end{aligned}$$

<u>Allgemeines n</u>

Spezialfall $\lambda_1 \dots \lambda_n$ seien n paarweise / verschiedene / reelle Nullstellen.

$$u_k(x) = e^{\lambda_k\, x} \qquad k = 1 \dots n$$

$$\begin{aligned} W(e^{\lambda_1\, x}, \dots, e^{\lambda_n\, x})(x) &= \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5 \\ {\lambda_1}^2 & {\lambda_2}^2 & {\lambda_3}^2 & {\lambda_4}^2 & {\lambda_5}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ {\lambda_1}^{n-1} & {\lambda_2}^{n-1} & {\lambda_3}^{n-1} & {\lambda_4}^{n-1} & {\lambda_5}^{n-1} \end{vmatrix}}_{Vandermond'scheDeterminante} \cdot e^{(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)\, x} \\ &= \prod_{n \geq k > l \geq 1} (\lambda_k - \lambda_l) \cdot e^{(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)\, x} \end{aligned}$$

Satz 2 *Es sei $p(\lambda)$ das charakteristische Polynom von $L\,y$ mit den reellen Nullstellen $\lambda_1 \dots \lambda_i$ und den konjungiert komplexen Nullstellen $z_1 (= a_1 + b_1 i), \dots, z_n$.*
Dann sind die folgenden Ausdrücke Lösungen der homogenen DGL und bilden ein Fundamentalsystem:
Mit reellen Nullstellen λ_i von $p(\lambda)$ mit der Vielfachheit l_i:

$$\begin{aligned} &e^{\lambda_1 x}, \quad x \cdot e^{\lambda_1 x}, \quad \dots, \quad x^{l_1 - 1} \cdot e^{\lambda_1 x}, \\ &\dots \\ &e^{\lambda_i x}, \quad x \cdot e^{\lambda_i x}, \quad \dots, \quad x^{l_i - 1} \cdot e^{\lambda_i x} \end{aligned}$$

Mit konjungiert komplexen Nullstellen $z_n = a_n + b_n x$ von $p(\lambda)$ mit der Vielfachheit m_n:

$$e^{a_1x}\cdot cos(b_1x),\quad e^{a_1x}\cdot sin(b_1x),\quad \ldots,\quad x^{m_1-1}\cdot e^{a_1x}\cdot cos(b_1x),\quad x^{m_1-1}\cdot e^{a_1x}\cdot sin(b_1x),$$
$$\ldots$$
$$e^{a_nx}\cdot cos(b_nx),\quad e^{a_nx}\cdot sin(b_nx),\quad \ldots,\quad x^{m_n-1}\cdot e^{a_nx}\cdot cos(b_nx),\quad x^{m_n-1}\cdot e^{a_nx}\cdot sin(b_nx)$$

Ansatzverfahren für spezielle Lösungen linearer inhomogener DGL mit konstanten Koeffizienten

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1y' + a_0y = q(x)$$

Definition 3 *Eine DGL der Form*

$$x^ny^{(n)} + x^{n-1}a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + xa_1y' + a_0y = q(x)$$

heißt Euler'sche DGL.

Bestimmung eines Fundamentalsystems:

- Erster Weg:

$$\begin{array}{rrcll} Ansatz: & y(x) & = & x^\lambda & x > 0 \\ & 0 & = & q(\lambda)\cdot x^\lambda & \end{array}$$

  $\longrightarrow$ Nullstellen von $q(\lambda)$ finden

  $\longrightarrow$ Bestimme FS!

- Zweiter Weg:

$$\begin{array}{rrcll} Substitution: & t & = & \ln x & x > 0 \\ & y(x) & = & z(\ln x) & \\ & y'(x) & = & \dot{z}(\ln x)\cdot\frac{1}{x} & \\ & y''(x) & = & \dot{z}(\ln x)\cdot -\frac{1}{x^2} + \ddot{z}(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x} & \end{array}$$

  $\longrightarrow$ Führt zu einer linearen DGL mit konstanten Koeffizienten für $z(t)$

  $\longrightarrow$ Lösen und Zurücksubstituieren!

Satz 3 *(Reduktion der Ordnung einer homogenen linearen DGL)*

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$$

Es sei $u_1(x)$ eine Lsg. der oberen DGL auf $[a, b]$ mit $u_1(x) \neq 0$ auf $[a, b]$.
Der Ansatz $y(x) = u_1(x)\cdot z(x)$ führt dann auf eine lineare DGL für $z(x)$

$$z^{(n)} + a_{n-1}(x)z^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)z' = 0$$

die durch $w = z'(x)$ in eine lineare DGL $(n-1)$-ter Ordnung berführt wird.
Sei $v_1(x), \ldots, v_{n-1}(x)$ ein Fundamentalsystem dieser DGL, so bilden die Fkt.en $u_1(x)$, $u_1(x)\int v_1(x)dx$, $\ldots$, $u_1(x)\int v_{n-1}(x)dx$ ein FS der Ausgangsgleichung.

Satz 4 *(Potenzreihenansätze)*

$$y'' + p_1(x)y' + p_0 y = 0$$

$$AWP: \qquad y(x_0) = y_0; \qquad y'(x_0) = y'_0$$

Es seien $p_1(x)$ und $p_0(x)$ in der δ-Umgebung von x_0 in eine Potenzreihe entwickelbar. Dann gilt das auch für die Lsg. der homogenen DGL zweiter Ordnung und die eindeutig bestimmte Lsg. des AWP.

$$Ansatz: \qquad y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

Hermitesches Polynom

$$H_n(x) = (-1)^n \, e^{x^2} \, \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$$

Hermitesche Funktionen

$$\Psi_n(x) := \frac{1}{\sqrt{2^n \, n! \, \sqrt{\pi}}} \, e^{-\frac{1}{2}x^2} \, H_n(x)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_m(x)\Psi_n(x)dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 1 & n = m \end{cases}$$

Legendresche DGL

$$(1-x^2)\, f'' - 2x\, f' + n(n+1)\, f = 0 \qquad n \in \mathbb{N}_0,$$

$\rightarrow$ Potenzreihe um $x_0 = 0$ mit Konvergenz 1:

$$\frac{2x}{1-x^2} = 2x \sum_{j=0}^{\infty} (x^2)^j = \sum_{j=0}^{\infty} 2x^{2j+1} \qquad |x| < 1$$

$\hookrightarrow$ Potenzreihenansatz möglich:

$$y(x) = c_0 \, u^{(g)}(x) + c_1 \, u^{(u)}(x) \qquad u^{(g)}, u^{(u)} ??? \, - \, \textit{Potenzreihen}$$

Für spezielle Werte von $n \in \mathbb{N}_0$ wird eine der beiden Potenzreihen abbrechen $\Rightarrow$ Polynom.
Darstellungsformel:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \, n!} \cdot \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \left[(x^2-1)^n \right]$$

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\, dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{2}{2n+1} & m = n \end{cases}$$

Reduzierbare Typen nichtliniearer DGLen zweiter Ordnung

Allgemeine, explizite Form: $y'' = f(x, y, y')$

Spezielle Form von y''	Ansatz / Vorgehensweise
$y'' = f(x)$	Zweifache Integration
$y'' = f(y')$	Substitution mit $z = y'(x)$ $\implies z' = f(z)$
$y'' = f(y)$	Multiplikation mit $2y'$ $\implies$ DGL mit trennbaren Variablen
$y'' = f(x, y')$	Substitution mit $z = y'(x)$
$y'' = f(y, y')$	Substitution mit $p = y'(x(y))$ $\implies \frac{dp}{dy}(y) = \frac{y''(x(y))}{p(y)}$
	DGL nach p lösen!
	Gesamtlsg. implizit gegeben durch $\int \frac{dy}{p(y)} = x + c$
$y'' = f(x, y)$	Keine allgemeinen Regeln, nur Spezialfälle!!
	Spezialfall 1: $y'' = g(x) \cdot y$
	Spezialfall 2: $y'' = h(x, \frac{y'}{y}) \cdot y$
	$\implies$ Substitution mit $v := \frac{y'}{y}$
	$\implies v' = h(x, v) - v^2$ DGL erster Ordnung

4 Rand- und Eigenwertprobleme

Satz 1 *Es seien u_1, u_2 zwei linear unabhängige Lsg.en der DGL $L\,y = 0$.*
Das Randwertproblem

$$(L\,y)(x) = q(x), \qquad (R_1\,y) = u_1, \qquad (R_2\,y) = u_2$$

ist genau dann eindeutig lösbar wenn gilt:

$$\begin{vmatrix} R_1\,u_1 & R_1\,u_2 \\ R_2\,u_1 & R_2\,u_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Satz 2 *(Seperationssatz)*

$$\begin{aligned} u(x,t) &= X(x)\,T(t) \\ \Rightarrow \qquad 0 &= a^2\,X''(x)\,T(t) - X(x)\,\ddot{T}(t) \\ & \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{\ddot{T}(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda \qquad \rightarrow \textit{unbekannte Konstante} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X'' + \lambda\,X &= 0 \\ \ddot{T} + a^2\,\lambda\,T &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X(0)\,T(t) &= 0 \\ X(l)\,T(t) &= 0 \qquad \longrightarrow \qquad \textit{Randwertproblem}! \end{aligned}$$

<u>Eigentwertprobleme</u> *(Sturm-Lionvill'sche EW-Aufgabe)*

Eine DGL der Form

$$y'' + p_1(x)\,y' + p_0(x)\,y = 0 \qquad p_1, p_0 \textit{ stetig auf } [a,b]$$

kann durch Multiplikation mit $p(x) = e^{\int p_1(x)\,dx}$ stets in die Form

$$L\,y = (p(x)\,y')' + q(x)\,y = 0$$

mit $q(x) := p(x) \cdot p_0(x)$ überführt werden.
$\Longrightarrow$ Eigenwertproblem - Gesucht sind die λ für die nicht-trivialen Lsg.en des Problems existieren:

Analysis		*Alternative Schreibweise*	*Analogie Algebra*
$L\,y + R\,y = 0$		$L\,y + \lambda\, r(x)\, y = 0$	$A\,\vec{x} - \lambda\,\vec{x} = 0$
$Da\ Ly = 0\ muss\ folgen$	$R_i\, y = 0 \quad bzw.$	$\lambda\, r(x) = 0 \quad mit\ r(x) > 0$	$det(A - \lambda\, E) = 0$

Da der Operator L symmetrisch ist, können folgende Eigenschaften vereinbart werden:

- Alle Eigenwerte sind reell, somit existieren stets reelle Eigenfunktionen
- Eigenwerte sind einfach (?)
- Eigenfunktionen zu unterschiedlichen Eigenwerten sind zueinander orthogonal ($\langle u, v\rangle = 0$)

Lineare DGL-Systeme erster Ordnung

$$\begin{aligned}
y_1' &= a_{11}\, y_1 \,+\, a_{12}\, y_2 \,+\, \cdots + a_{1n}\, y_n \,+\, Q_1(x)\\
y_2' &= a_{21}\, y_1 \,+\, a_{22}\, y_2 \,+\, \cdots + a_{2n}\, y_n \,+\, Q_2(x)\\
&\vdots\\
y_n' &= a_{n1}\, y_1 \,+\, a_{n2}\, y_2 \,+\, \cdots + a_{nn}\, y_n \,+\, Q_n(x)
\end{aligned}$$

Rechenweg:

1. Eigenwerte und Eigenvektoren der Koeffizientenmatrix $K = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ berechnen.

2. Fundamentalsystem aus den Eigenvektoren erstellen: $u_i = \Big(EV(\lambda)\Big)\, e^{\lambda x}$.

   Bei einer Vielfachheit m des Eigenwertes sind folgende Ausdrücke in die DGL einzusetzen und die Koeffizienten zu ermitteln:

$$u_{i+1} = \begin{pmatrix} ax+b \\ \vdots \\ \alpha x + \beta \end{pmatrix} e^{\lambda x};\ u_{i+2} = \begin{pmatrix} ax^2+bx+c \\ \vdots \\ \alpha x^2 + \beta x + \gamma \end{pmatrix} e^{\lambda x};\ \ldots;\ u_{i+(m-1)} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=0}^{m-1} a_k x^k \\ \vdots \\ \sum\limits_{k=0}^{m-1} \alpha_k x^k \end{pmatrix} e^{\lambda x}$$

3. Homogene Lösung: $y_{hom} = c_1 \vec{u}_1(x) + \cdots + c_n \vec{u}_n$

4. Inhomogene Lösung:
   (a) Variation der Konstanten mit dem Ansatz $y_p = \vec{c}_1(x)\vec{u}_1(x) + \cdots + \vec{c}_n(x)\vec{u}_n \quad \rightarrow$ In das DGL-System einsetzen!
   (b) Ansatzverfahren zur entsprechenden Inhomogenität $Q_i(x)$ (Spezialansätze)
   Beachte: Für den Fall „k-facher Nullstellen“ ist im Ansatz der Grad des Polynoms um k zu erhöhen und nicht nur mit x^k zu multiplizieren!