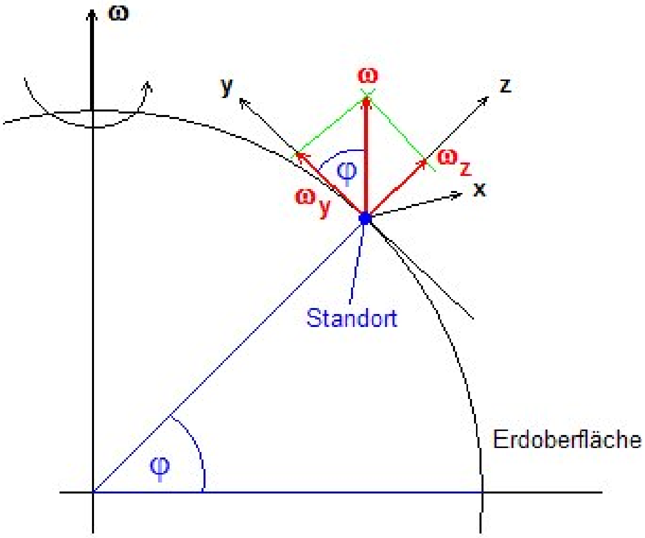
Aufgabe: *Ein Luftgewehr sei mit dem Lot exakt senkrecht nach oben ausgerichtet. Nach dem Abschuss verlässt die Kugel den Lauf mit 60 ms^{-1} Wo landet das Geschoss, wenn der Abschuss unter einer geografischer Breite φ erfolgt unter Einfluss der Corioliskraft?*

Lösung: Hier ist es dringend angeraten als erstes eine aussagekräftige Skizze zu machen:



Schon hier gibt es jede Menge Sachen falsch zu machen. Als erstes muss man beachten, dass sich die Erde von Westen nach Osten dreht (im Osten geht die Sonne auf). Der Vektor $\boldsymbol{\omega}$ zeigt also genau durch den Nordpol. An seinem Standort (geografische Breite φ) definiert man sich jetzt sinnvoller Weise ein mitrotierendendes Bezugssystem, dessen Achsen nach Osten (x-Achse), Norden (y-Achse) bzw. oben (z-Achse) zeigen. Auch hier kann man bereits einiges falsch machen, denn man muss peinlich genau darauf achten, ein *Rechtssystem* (Achsen entsprechend der Rechte-Hand-Regel) zu definieren - sonst funktionieren die Kreuzprodukte nicht und alles geht in die falsche Richtung!
Steht das Koordinatensystem können wir den Bewegungsablauf berechnen. Dazu stellen wir eine Kräftebilanz auf. Im mitrotierenden Bezugssystem wirken neben der Gravitationskraft noch die Scheinkräfte, wobei wir uns laut Aufgabenstellung auf die Corioliskraft beschränken. Die Kräftebilanz lautet dann[1]:

$$\mathbf{F}_{ges} = \mathbf{F}_{Cor} + \mathbf{F}_{Grav}$$

Nun benutzen wir die Definition der Corioliskraft[2]

$$\mathbf{F}_{Cor} = -2m\,\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$$

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = -2m \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} - m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix}$$

Nach Kürzen der Massen m müssen wir nun als erstes die Komponenten des Vektors $\boldsymbol{\omega}$ ermitteln. Aus der Skizze können wir sehen:

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega\cos\varphi \\ \omega\sin\varphi \end{pmatrix}$$

[1] zur besseren Übersichtlichkeit entfallen hier die Vektorpfeile; fette Buchstaben stehen für Vektoren, normale für Skalare

[2] Diese Formel wir in der Theoretischen Mechanik zusammen mit den anderen Scheinkräften aus der Übertragung der Bewegungsgleichung ins Nicht-Inertialsystem hergeleitet

Nun berechnen wir das Kreuzprodukt:

$$\omega \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} \dot{z}\cos\varphi - \dot{y}\sin\varphi \\ \dot{x}\sin\varphi \\ -\dot{x}\cos\varphi \end{pmatrix}$$

Die Bewegungsgleichung (in Vektorschreibweise) lautet nun:

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = -2\omega \begin{pmatrix} \dot{z}\cos\varphi - \dot{y}\sin\varphi \\ \dot{x}\sin\varphi \\ -\dot{x}\cos\varphi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix}$$

Diese entspricht dem folgenden Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \ddot{x} & = & -2\omega\left(\dot{z}\cos\varphi - \dot{y}\sin\varphi\right) \\ \ddot{y} & = & -2\omega\dot{x}\sin\varphi \\ \ddot{z} & = & 2\omega\dot{x}\cos\varphi - g \end{array}}$$

Dieses System gilt es nun zu lösen. Bevor man jedoch daran geht, diskutieren wir einige Eigenschaften und sich daraus ergebende Möglichkeiten zur Lösung:

- Das System ist verkoppelt, d.h. die Beschleunigung in eine Richtung hängt hier von Geschwindigkeiten in andere Richtungen ab. Dieser Umstand macht es recht schwierig das System zu lösen. Man kann, wie in Aufgabe 3 - Thema 7, einzelne Gleichungen solange ableiten und ineinander einsetzen bis man alle Gleichungen entkoppelt hat und auf gewöhnliche DGL zurückgeführt. Die Folge wären aber DGL's hoher Ordnung und damit automatisch von hoher Redundanz (zusätzliche Integrationskonstanten, die bestimmt werden müssen durch Konsistenz mit den anderen Gleichungen). Dieser Weg wäre hier ausgesprochen hässlich, aber gehbar, und führt zur exakten Lösung.

- Wenn man scharf hinsieht ist das DGLS eigentlich nur von der Ordnung 1 - wir müssen nur statt $\ddot{x}$ einfach $\dot{v}_x$ schreiben und statt $\dot{x}$ einfach v_x. Mit den Abkürzungen

  $$\begin{array}{rcl} a & := & 2\omega\sin\varphi \\ b & := & -2\omega\cos\varphi \end{array}$$

  können wir das DGLS in Matrixform wie folgt schreiben:

  $$\begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & 0 \\ -b & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix}$$

  Dies ist eine Matrix-Differentialgleichung (nicht erschrecken!) der Form

  $$\dot{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{C}$$

  mit einer konstanten Inhomogenität $\mathbf{C}$. Abgesehen davon dass es sich nun um Vektoren handelt können wir diesen Typ von DGL im Schlaf lösen: Erst homogene Gleichung, dann inhomogene. Dies wird für genau diesen Typ in voller mathematischer Schönheit in der Analysis II durchgeführt. Wesentlich für die Lösung der homogenen Gleichung ist die Matrix $\tilde{\mathbf{M}}$, die hier antisymmetrisch und spurfrei ist. Man kann das ganze auf ein Eigenwert/Eigenvektorproblem für $\tilde{\mathbf{M}}$ zurückführen das die Lösung relativ zügig ausspuckt aber aufwendig in der manuellen Rechnung ist. Dies verschieben wir lieber auf die Analysis II - Übungsaufgaben. Da man diese Methoden jedoch erst im zweiten Semester zur Hand hat müssen wir uns etwas anderes einfallen lassen. Und dazu benutzen wir unser physikalisches Sachverständnis...

- ... denn wir sollten einmal die Größenordnung der einzelnen Beiträge zum DGLS abschätzen. Die Erde dreht sich in 24 h einmal um sich selbst, d.h. $\omega = 7,3\ 10^{-5}\ rad/s$. Da $g \approx 10\ m/s$ und der Corioliseffekt recht schwach ist bei so niedriger Winkelgeschwindigkeit liegen zwischen den beiden Beiträgen für $\ddot{z}$ ca. 6 (!) Größenordnungen. Überhaupt werden große Beiträge nur von $\dot{z}$ und g zu erwarten sein, da der Körper sich hauptsächlich senkrecht rauf und wieder runter bewegt, nicht dagegen von $\dot{x}$ oder $\dot{y}$. Analysieren wir die Gleichungen einzeln:

$$\ddot{x} = -2\omega\left(\dot{z}\cos\varphi - \dot{y}\sin\varphi\right)$$

Dies heißt nichts anderes als dass die Beschleunigung in West-/Ostrichtung von der Geschwindigkeit in vertikaler Richtung sowie der in Nord-/Südrichtung abhängt. Da der Körper senkrecht nach oben geschossen wird, bestimmt $\dot{z}$ das wesentliche Verhalten dieser Gleichung und ist groß gegenüber der kleinen Ablenkung in Nord-/Südrichtung. Wir vernachlässigen diese in der Gleichung und erhalten

$$\ddot{x} \approx -2\omega\dot{z}\cos\varphi$$

Die Beschleunigung in Nord-/Südrichtung hängt wegen

$$\ddot{y} = -2\omega\dot{x}\sin\varphi$$

nur von der Geschwindigkeit in West-/Ostrichtung ab und nichts anderem. Sie ist also sehr klein, weil schon $\ddot{x}$ klein ist - wir können sie tatsächlich ganz vernachlässigen!

$$\ddot{y} \approx 0$$

Die Beschleunigung in vertikaler Richtung

$$\ddot{z} = 2\omega\dot{x}\cos\varphi - g$$

ist dominiert durch die Fallbeschleunigung g. Gegen diesen Beitrag ist der Term mit $\dot{x}$ wie oben schon geschildert vernachlässigbar.

$$\ddot{z} \approx -g$$

Genäherte Lösung: Zusammengefasst haben wir ein genähertes DGLS eingeführt, das wie folgt lautet:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \ddot{x} &=& -2\omega\dot{z}\cos\varphi \\ \ddot{y} &=& 0 \\ \ddot{z} &=& -g \end{array}}$$

Erfahrungsgemäß ist das „richtige“ Nähern in diesem Fall der Stolperstein der Aufgabe. Wem das nicht in den Kopf will warum man an der einen oder anderen Stelle etwas scheinbar willkürlich vernachlässigt, dem hilft vielleicht die folgende rein physikalische Interpretation.
Man muss sich den Vorgang doch so vorstellen: Man schießt etwas senkrecht nach oben. Wohin wirkt die Corioliskraft? Nach der Rechte Hand-Regel genau nach Westen! Der Körper bekommt also durch die Ablenkung (die wegen dem geringen Betrag von ω nur klein ist) eine kleine Geschwindigkeitskomponente nach Westen. Diese bewirkt wiederum eine (noch kleinere) Ablenkung nach Norden und nach unten. Dorthin wirkt aber die Erdbeschleunigung, die viele Größenordnungen größer ist. In nullter Näherung handelt es sich also um den senkrechten Wurf nach oben. Die Corioliskraft hinzugenommen heißt in erster Näherung dass der *größte* Effekt die Ablenkung nach Westen sein wird der durch $\dot{z}$ zustandekommt. Genau das spiegelt unser genähertes DGLS wieder!
Die Lösung des DGLS ist nach den Näherungen nicht mehr schwer. Als erstes lösen wir

$$\ddot{y} = 0$$

Da $y(0) = 0$ und $\dot{y}(0) = 0$ ist die Lösung einfach $y(t) = 0$, d.h. die Ablenkung in Nord-/Ostrichtung haben wir ganz „weggenähert“.
Als nächstes lösen wir

$$\begin{array}{rcl} \ddot{z} &=& -g \\ \dot{z} &=& -gt + C_1 \\ z(t) &=& -\frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2 \end{array}$$

Wegen den Anfangsbedingungen $z(0) = 0$ und $\dot{z}(0) = v_0$ ergibt sich:

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$$

Jetzt können wir $\dot{z}$ einsetzen und erhalten

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= -2\omega\cos\varphi\,(-gt + v_0) \\
\dot{x} &= -2\omega\cos\varphi\left(-\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + D_1\right) \\
x(t) &= -2\omega\cos\varphi\left(-\frac{1}{6}gt^3 + \frac{1}{2}v_0 t^2 + D_1 t + D_2\right)
\end{aligned}$$

Wegen der Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = 0$ lautet die Lösung

$$\boxed{\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\omega\cos\varphi\left(-\frac{1}{6}gt^3 + \frac{1}{2}v_0 t^2\right) \\ 0 \\ -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \end{pmatrix}}$$

Wir erkennen in z-Richtung den senkrechten Wurf wieder. Die Wurfdauer beträgt

$$t_{end} = \frac{2v_0}{g} = 12,2\ s$$

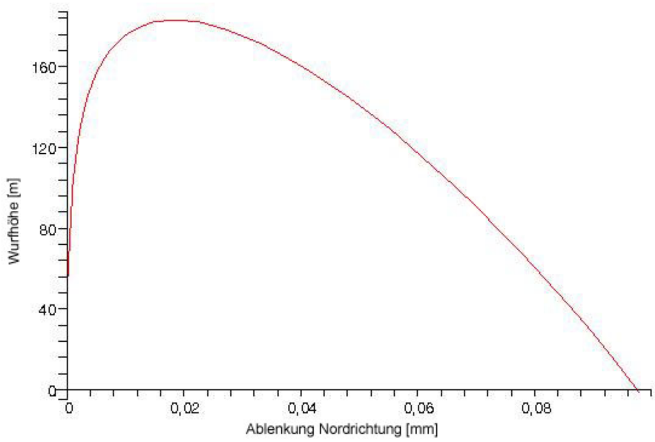
Dies eingesetzt in $x(t)$ ergibt[3]:

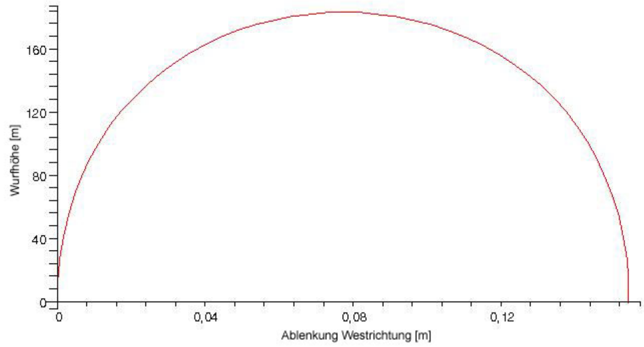
$$x(t_{end}) = -14,2\ cm$$

Das Geschoss sollte in der Näherung also 14,2 cm westlich vom Abschusspunkt versetzt ankommen.

[3] für geographische Breite $\varphi = 45°$

Exakte Lösung: Ist unser genähertes Ergebnis gut? Wenn man das Problem exakt nach der Eigenwertmethode aussrechnet, dann ergeben sich dir folgenden beiden Diagramme für die Ablenkung in West- bzw. Nordrichtung:





Unser genähertes Ergebnis für die Westablenkung liegt schon sehr nahe bei den berechneten (die Gleichung ist für t_{end} ist nur numerisch lösbar) 13.8 cm. In Nordrichtung ergibt sich eine Abweichung von der Größenordnung 100 μm (!) - wir lagen also gar nicht so schlecht das zu vernachlässigen. Insegsamt ist der 3D-Bewegungsablauf folgendermaßen (man muss genau die unterschiedlichen Maßstäbe beachten, alle Zahlen in Meter):