

Zusammenfassung Physik der Materie I

Sebastian Küfner

28. Januar 2008

Inhaltsverzeichnis

1	Allgemeingültige Beziehungen	2
2	Strahlungsgesetze	2
2.1	Kirchhoffsches Strahlungsgesetz	2
2.2	Weitere Gesetze	2
2.3	Betrachtung der Strahlung des schwarzen Körpers	3
2.3.1	Vorüberlegungen	3
2.3.2	Rayleigh-Jeans-Gesetz	3
2.3.3	Plancksches Strahlungsgesetz	3
3	Wechselwirkungen zwischen Photonen und Elektronen	4
3.1	Photoeffekt	4
3.2	Compton-Effekt	4
4	Elementare Quantenphysik	5
4.1	Eigenschaften des Photons	5
4.2	Materiewellen	5
4.3	Wellenfunktion, Wellenpakete, Unschärferelation	5
4.4	Schrödingergleichung	7
5	Atome	8
5.1	Bohrsches Atommodell	8
5.2	Quantenmechanik des H-Atoms (Skizze)	9
5.3	Schalenmodell, Periodensystem	10
5.4	Emission und Absorption elektromagnetischer Strahlung durch Atome	11
5.5	Lebensdauer von Zuständen, natürliche Linienbreite	12
5.6	Röntgenstrahlung	12
6	Einführung in die Quantenphysik	13
6.1	Eigenschaften stabiler Kerne	13
6.2	Kernmassen, Kernbausteine, Bindungsenergie	14
6.3	Tröpfchenmodell	14

1 Allgemeingültige Beziehungen

$$E = \sqrt{(mc^2)^2 + p^2c^2}$$

$$E = \hbar\omega$$

$$p = \hbar k$$

2 Strahlungsgesetze

2.1 Kirchhoffsches Strahlungsgesetz

Für abgestrahlte und aufgenommene Strahlungsleistung eines Körpers gilt:

$$\frac{dW_A}{dt} = A_\nu S_\nu dF d\Omega d\nu$$

$$\frac{dW_E}{dt} = E_\nu dF d\Omega d\nu$$

wobei

- S_ν Spektrale Strahlungsdichte
- $d\nu$ betrachtetes Frequenzintervall
- $d\Omega$ Raumwinkelement
- dF Flächenelement

Im thermodynamischen Gleichgewicht folgt mit $\frac{dW_A}{dt} = \frac{dW_E}{dt}$ Das

Kirchhoffsche Strahlungsgesetz:

$$S_\nu(\nu, T) = \frac{E_\nu}{A_\nu}$$

2.2 Weitere Gesetze

- Lambertsches Gesetz $\frac{dW}{dt} = E dF d\Omega \cos \theta$
- Stefan-Boltzmann-G. $\frac{dW}{dt} = \sigma T^4$ mit $\sigma = 5.66 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$, Folgt aus Integration des Planckschen Strahlungsgesetzes über gesamten Halbraum und $\forall \nu$
- Wiensches Verschiebungsgesetz $\lambda_{Max} T = 2.9 \cdot 10^{-3} mK = const$

2.3 Betrachtung der Strahlung des schwarzen Körpers

2.3.1 Vorüberlegungen

Es werden stehende Wellen best. Wellenlänge betrachtet. Stationäre Eigenschwingungen-
Moden des Hohlraums Für die spektrale Modendichte $n(\nu) d\nu$ (Anzahl der Moden pro m^3 im Frequenzintervall $[\nu, \nu + d\nu]$) gilt:

$$n(\nu)d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}d\nu$$

Def.: spektrale Energiedichte

$$\rho(\nu, T) d\nu = n(\nu) \bar{E}_\nu(T) d\nu$$

Wobei $\bar{E}_\nu(T) d\nu$ die mittlere Energie pro Eigenschwingung in $[\nu, \nu + d\nu]$ ist.

2.3.2 Rayleigh-Jeans-Gesetz

Setzt man die mittlere Energie des harmonischen Oszillators $\bar{E}_\nu(T) = kT$ folgt das

Rayleigh-Jeanssche Strahlungs-Gesetz

$$\rho(\nu, T) d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT d\nu$$

Problem: Ultraviolett-Katastrophe

2.3.3 Plancksches Strahlungsgesetz

Grundgedanke: Quantelung der Energie, Mindestenergie $E_{Min} = h\nu$ mit $h = 6,626 \cdot 10^{-24} Js$ Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Eigenschwingung im therm. GG die Energie $E_\nu = nh\nu$ besitzt, ist gegeben durch:

$$p(E_\nu) = \frac{e^{-\frac{nh\nu}{kT}}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{nh\nu}{kT}}}$$

Dabei gilt: $\sum_{n=0}^{\infty} p(E_\nu) = 1$ Für die mittlere Energie pro Eigenschwingung ergibt sich

$$\bar{E}_\nu = \sum_{n=0}^{\infty} nh\nu \cdot p(E_\nu) = \frac{h\nu \sum_n n e^{-\frac{nh\nu}{kT}}}{\sum_n e^{-\frac{nh\nu}{kT}}}$$

Anwendung der Summenformel der geometrischen Reihe:

$$\sum_n e^{-nx} = \frac{1}{1 - e^{-x}}$$

$$\sum_n n e^{-nx} = -\frac{d}{dx} \sum_n e^{-nx} = -\frac{d}{dx} \frac{1}{1 - e^{-x}} = \frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2}$$

liefert mit der Substitution $x = \frac{h\nu}{kT}$:

$$\bar{E}_\nu = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

Damit ergibt sich die spektrale Energiedichte zum **Planckschen Strahlungsgesetz**:

$$\rho(\nu, T) d\nu = \frac{8\pi\nu^3 h}{c^3} \cdot \frac{d\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

3 Wechselwirkungen zwischen Photonen und Elektronen

3.1 Photoeffekt

Treffen Photonen auf eine Metalloberfläche, gilt die Bilanzgleichung:

$$eU_{max} = h\nu - \phi$$

Um Elektron auszulösen, muss gelten $h\nu \geq \phi$ wobei

$h\nu$	Energie des Photons
ϕ	Austrittsarbeit
eU_{max}	kin. Energie des Elektrons

3.2 Compton-Effekt

Beschreibung eines elastischen Stoßes zwischen Elektron und Photon (Stoßwinkel θ).

- Energieerhaltung $h\nu_0 = h\nu_s + E_{Kin}$ mit $E_{Kin} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2$
- Impulserhaltung $\hbar \vec{k}_0 = \hbar \vec{k}_s + \vec{p}_e$ mit $\vec{p}_e = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

Unter Verwendung des Cosinussatzes folgt

$$\lambda_s = \lambda_0 + 2 \cdot \frac{h}{m_0 c} \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

4 Elementare Quantenphysik

4.1 Eigenschaften des Photons

1. Energie $E = \hbar\omega = h\nu$
2. Impuls $p = mc = \frac{E}{c^2} \cdot c = \frac{\hbar\omega}{c^2} \cdot c = \hbar k$
3. Ruhemasse $m_0 = 0$:

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

$$E^2 - p^2 c^2 = (\hbar\omega)^2 - (c\hbar k)^2 = \hbar(\omega^2 - (ck)^2) = 0 = (m_0 c^2)^2$$

Da $\omega = kc$

$$\Rightarrow m_0 = 0$$

Zusammenfassung:

Welle	Photon	Verknüpfung
Wellenvektor \vec{k}	Impuls \vec{p}_{ph}	$\vec{p}_{ph} = \hbar\vec{k}$
Kreisfrequenz ω	Energie E_{ph}	$E_{ph} = \hbar\omega$
Drehimpuls $J_z = \pm \frac{E}{\omega}$	Spin s_z	$s_z = \pm \hbar$

4.2 Materiewellen

Experimentelle Befunde, z.B. Beugung von Elektronen nur mit Wellenmodell erklärbar. Daher Ausweitung des Gültigkeitsbereiches von $\vec{p} = \frac{h}{\lambda} = \hbar\vec{k}$ mit $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ und $E = h\nu = \hbar\omega$ auf Teilchen.
De Broglie-Wellenlänge für Materiewellen:

$$\lambda_B = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2mE_{kin}}}$$

4.3 Wellenfunktion, Wellenpakete, Unschärferelation

Beschreibung eines Teilchens der Masse m , Geschwindigkeit v , Richtung x . Dann ist die Wellenfkt. der Materiewelle gegeben durch:

$$\psi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)} = Ae^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)}$$

Die Phasengeschwindigkeit ergibt sich aus der Geschw. des Max. von ψ : Das Max liegt bei $kx - \omega t = 0 \Rightarrow \psi(x) = A$ Damit folgt

$$\frac{d}{dt}(kx - \omega t) = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar k}{2m} = v_{Phase}$$

Dispersion: $\frac{dv_{Phase}}{d\omega} = \frac{1}{k} \neq 0 \Rightarrow$ Teilchengeschwindigkeit ungleich Phasengeschv. der Materiewelle. Teilchengeschwindigkeit: $v_T = \frac{p}{m} = \frac{\hbar k}{m}$ Damit folgt

$$v_{Phase} = \frac{1}{2}v_T$$

Spezialfall EM-Welle: $k = \frac{\omega}{c} \Rightarrow v_{Phase} = c \Rightarrow \frac{dv_{Phase}}{d\omega} = 0$ (keine Dispersion)

klassische Teilchen zu Zeit t am Ort x lokalisierbar. Ebene Welle besitzt ortsunabhängige Amplitude, ist also über gesamten Raum ausgebreitet. Zur Lokalisierung der Materiewellen: Konstruktion von Wellenpaketen.

Beschreibung eines lokalen Teilchens durch Wellenpaket bestehend aus kontinuierlich beitragenden harmonischen Wellen.

$$\psi(x, t) = \int_k dk A(k) e^{i(kx - \omega t)}$$

Wobei A die Verteilungsfunktion der Wellenzahl darstellt. Das Max. bewegt sich mit der Gruppengeschwindigkeit $v_g = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k_0}$ Mit

$$\omega = \frac{E}{\hbar} = \frac{p^2}{2\hbar m} = \frac{\hbar k^2}{2m} \text{ folgt } v_g = \frac{d\omega}{dk} = \hbar k m = \frac{p}{m} = v_T$$

Definition: Wahrscheinlichkeit $W(x, t)dx$, dass sich Teilchen zur Zeit t im Ortsintervall $[x, x + dx]$ befindet, ist gegeben durch:

$$W(x, t)dx = |\psi(x, t)|^2 dx$$

unter der Normierungsbedingung $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x, t)|^2 dx = 1$.

Wählt man für A(k) eine Gaussverteilung lässt sich aus der Standardabweichung dieser ableiten, dass:

$$\Delta x = \sigma_x$$

$$\Delta p = \sigma_p$$

Mit $\sigma_x \cdot \sigma_p = \frac{1}{2}$ $p = \hbar k$ und $\sigma_k = \frac{\sigma_p}{\hbar}$ folgt die **Heisenbergsche Unschärferelation:**

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{1}{2}\hbar$$

zeitliche Stabilität von Wellenpaketen, Auseinanderlaufen:

Die Unschärfe der Gruppengeschwindigkeit ist gegeben durch $\Delta v_G = \frac{1}{m} \Delta p_T = \frac{1}{m} \frac{\hbar}{2\Delta x_0}$, Δx_0 - ursprüngliche Breite des Wellenpaketes.

Damit ergibt sich die Unsicherheit der Ortsbestimmung zu

$$\Delta x(t) = \Delta v_G t = \frac{\hbar}{m\Delta x_0} t$$

Unbestimmtheitsrelation für Energie und Zeit:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{1}{2} \hbar$$

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = pc$$

$$\Delta p = \Delta E c^{-1}$$

$$\Delta x \Delta E c^{-1} \geq \frac{1}{2} \hbar \quad c = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \Delta E \Delta t \geq \frac{1}{2} \hbar$$

4.4 Schrödingergleichung

Bewegungsgleichung für die Ausbreitung von Materiewellen

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \cdot \Delta \psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r}, t) \psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

Die Lösungen sind i.A. komplexe harmonische Wellenfunktionen:

$$\psi(\vec{r}, t) = e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$

Ist die potentielle Energie V nicht explizit zeitabhängig, ergibt sich aus der Separation $\psi(\vec{r}, t) = \phi(\vec{r}) e^{i\omega t}$.

einsetzen in obige Gleichung reduziert diese mit $E = \hbar\omega$ auf die **zeitfreie Schrödingergleichung**:

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \cdot \Delta \phi(\vec{r}) + V(\vec{r}) \phi(\vec{r}) = E \phi(\vec{r})$$

zeitunabhängige Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte: $|\phi(\vec{r})|^2$

Normierung: $\int_{-\infty}^{\infty} d^3r |\phi(\vec{r})|^2 = 1$

5 Atome

5.1 Bohrsches Atommodell

Bohrsche Postulate:

1. Elektronen bewegen sich auf diskreten Bahnen mit Energie E_n ; stationäre Bahnen d.h. stabile Bahnen
2. Bewegung der Elektronen Strahlungsfrei, charakteristische Frequenzen beim Bahnwechsel: $\nu = \frac{E_{n_2} - E_{n_1}}{h}$
3. Bahndrehimpuls eines Elektrons in einem stationären Zustand nimmt diskrete Werte an: $mvr = n\hbar$

Folgerungen:

Gleichsetzung von Zentrifugal- und Radialkraft liefert für die Energie eines Elektrons auf einer best. Bahn:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r} \Rightarrow T = \frac{1}{2}|V|$$

und damit $E = -\frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r}$

Für die Frequenz der emittierten Strahlung beim Bahnwechsel folgt:

$$\nu = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{h} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Der Radius der Kreisbahn ergibt sich aus dem dritten Postulat:

Bahngeschw. des Elektrons: $v = \frac{n\hbar}{mr}$

Einsetzen in $T = \frac{1}{2}|V|$ (V-Coulomb-Potential) liefert

$$r = n^2 4\pi\epsilon_0 \frac{\hbar}{mze^2}$$

Damit folgt für die Frequenz

$$\nu = Z^2 \frac{me^4}{(4\pi\hbar)^3 \epsilon_0^2} \left(\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2} \right)$$

Umfang der Bohrschen Bahn:

- Bewegtes Elektron als Materiewelle betrachten
- Stabile Bahn: Ausbildung einer stehenden Welle

Damit ergibt sich:

$$mvr = n\hbar \quad \text{3.BohrschesPostulat}$$

$$p = mv\hbar k = \frac{h}{\lambda} \Rightarrow \frac{h}{\lambda} r = n\hbar$$

$$\Rightarrow n\lambda = 2\pi r$$

5.2 Quantenmechanik des H-Atoms (Skizze)

Annahmen

- Proton im Kern in Ruhe
- Elektron bewegt sich mit $T = \frac{p^2}{2m}$ um Kern
- Potentielle Energie des Elektrons: $V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$

Das Verhalten wird beschrieben durch die zeitfreie Schrödingergleichung:

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \cdot \Delta\phi(\vec{r}) + V(\vec{r})\phi(\vec{r}) = E\phi(\vec{r})$$

Separationsansatz in Kugelkoordinaten liefert eine Beschreibung über diskrete Zustände in Form von Quantenzahlen:

- Hauptquantenzahl r : $n = 1, 2, 3, \dots$
- Bahndrehimpulsquantenzahl θ : $l = 0, 1, \dots, n - 1$
- magnetische Quantenzahl φ : $m_l = -l, -l + 1, \dots, l$

Bahndrehimpuls des Elektrons

$$|\vec{L}| = \sqrt{l(l+1)}\hbar$$

m_l bestimmt die Komponenten von \vec{L} . Bei einem B-Feld in z-Richtung ergibt sich $l_z = m_l\hbar$, speziell für das H-Atom mit $l = 2 \Rightarrow m_l = -2 \dots 2 \Rightarrow |\vec{l}| = \sqrt{6}\hbar$ **Energieniveaus der Elektronen**

$$E_n = -\frac{Z^2 E_0}{n^2} \quad \text{mit} \quad E_0 = 13.6\text{eV}$$

Magnetische Momente, Elektronenspin

Einführung einer weiteren Quantenzahl $m_s \in \{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}$ aufgrund experimenteller Befunde (Stern-Gerlach-Versuch). Feinstrukturaufspaltung von Atomen in äusseren Magnetfeldern

Für ein Elektron mit Eigendrehimpuls (Spin \vec{s}) gilt $|\vec{s}| = \sqrt{s(s+1)}\hbar$

Die z-Komponente des Spins ist: $s_z = m_s\hbar$ Damit existieren 2 Einstellmöglichkeiten des Elektronenspins bzgl. eines äusseren B-Feldes (daher Feinstrukturaufspaltung.)

Bahndrehimpuls und Spin mit magnetischen Momenten verknüpft. Das magn.

Moment einer rotierenden Ladung ergibt sich zu: $\vec{\mu} = \frac{q}{2m_q}\vec{l}$

Speziell für ein Elektron: $q = -e \quad m_q = m \quad \Rightarrow \vec{\mu} = \frac{q}{2m_q}\vec{l}$

Für das H-Atom: $|\vec{\mu}| = \frac{e}{2m}|\vec{l}| = \frac{e}{2m}\sqrt{l(l+1)}\hbar$

Spin-Bahn-Kopplung, Feinstrukturaufspaltung

Koordinatenursprung in Elektron legen. Damit bewegt sich der Kern und Erzeugt B-Feld. Ein Elektron mit den Quantenzahlen n und l kann nun je nach Einstellung des Spins 2 verschiedene Energien besitzen. (Feinstrukturaufspaltung):

$$E_{n,l,s} = E_n - \vec{\mu}_s \vec{B}_l = E_n - \frac{\mu_0 Z e^2}{8\pi m^2 r^3} \underbrace{\vec{s} \cdot \vec{l}}_{SBK}$$

Einführung eines Gesamtdrehimpulses:

$$\vec{j} = \vec{l} + \vec{s} \quad \text{mit} \quad |\vec{j}| = \sqrt{j(j+1)}\hbar$$

$$\vec{l} \cdot \vec{s} = \frac{1}{2}\hbar [j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)]$$

Damit:

$$E_{n,l,s} = E_n + \frac{a}{2} [j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)]$$

Wobei $a = \frac{\mu_0 Z e^2 \hbar^2}{8\pi m^2 r^3}$ Spin-Bahn-Kopplungskonstante

Die Energiewerte $E_{n,l}$ spalten sich je nach Spineinstellung auf in Komponenten $j = l \pm \frac{1}{2}$

5.3 Schalenmodell, Periodensystem

Zustand eines Elektrons gekennzeichnet durch die Quantenzahlen:

- $n = 1, 2, 3, \dots$
- $l \quad 0 \leq l \leq n - 1 \quad n \text{ Werte}$
- $m_l \quad -l, \dots, l \quad (2l + 1) \text{ Werte}$
- $m_s \quad m_s = \pm \frac{1}{2} \quad 2 \text{ Werte}$

Anzahl der zu n gehörenden Zustände: $\sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = n^2$ Unter Hinzunahme des Spins wird dies zu $2n^2$.

Pauli-Prinzip:

- Durch n, l, m_l, m_s beschriebener Zustand kann höchstens von einem Elektron besetzt werden.
- Zustand n, l, m_l kann höchstens von 2 Elektronen besetzt werden, die sich dann in m_s unterscheiden müssen.

5.4 Emission und Absorption elektromagnetischer Strahlung durch Atome

Beim Übergang von Elektronen von einem Zustand auf den nächst höheren gilt:

$$h\nu = E_{n2} - E_{n1}$$

Spektroskopische Befunde:

- nicht jede mögliche Frequenz als Spektrallinie vorhanden
- unterschiedliche Intensitäten der Spektrallinien \Rightarrow unterschiedliche Übergangswahrscheinlichkeiten
- keine streng monochromatische Strahlung sondern Verteilung um Mittelfrequenz

Mögliche Übergänge zwischen 2 Energieniveaus $E_{n2} \geq E_{n1}$ (N bezeichnet die Anzahl an Elektronen im jeweiligen Zustand) :

1. **spontane Emission:**

$$\left(\frac{dN_2}{dt}\right)_s = -A_{21}N_2$$

A_{21} Rate der spontanen Emission, Einstein-A-Koeffizient

2. **induzierte Emission:**

$$\left(\frac{dN_2}{dt}\right)_t = -B_{21}N_2$$

B_{21} abhängig von Intensität der einfallenden Welle abhängig:

$$B_{21} = \sigma_{21}F$$

Wobei F - Photonenfluss der Welle, Zahl der Photonen pro Zeit und Fläche und σ_{21} - Querschnitt für induzierte Emission

3. induzierte Absorption:

$$\left(\frac{dN_1}{dt}\right)_A = -B_{12}N_2 \quad B_{12} = \sigma_{21}F$$

5.5 Lebensdauer von Zuständen, natürliche Linienbreite

Betrachtung des Überganges $E_i \rightarrow E_j$

Zahl der nach E_j in dt Übergehenden Zustände:

$$dN_i = -A_{ij}N_i dt$$

Für mehrere j : $dN_i = -A_i N_i dt$ wobei $A_i = \sum_j A_{ij}$

Integration liefert die **zeitabhängige Besetzungsdichte**:

$$N_i(t) = N_i(0)e^{-A_i t}$$

mittlere Lebensdauer des Zustandes E_i :

$$\tau_i = \frac{1}{A_i}$$

Nach $t = \tau_i$ ist die Besetzung des i -ten Zustandes auf $\frac{1}{e}$ des Anfangswertes abgesunken.

natürliche Linienbreite:

$$\begin{aligned} \Delta E \Delta t &\approx \hbar \quad \Delta t = \tau_i \quad \Delta E = \hbar \Delta \omega \\ \Rightarrow \Delta \omega &= \frac{1}{\tau_i} \end{aligned}$$

Verbreiterung der Spektrallinien: Doppler-Verbreiterung in Folge thermischer Schwingungen der Atome:

$$\Delta \omega_0 = \frac{\omega_{ik}}{c} \sqrt{\frac{1}{m} (8k_B T \ln 2)}$$

5.6 Röntgenstrahlung

Ww energiereicher Elektronen mit Hüllenelektronen, dadurch stimulierte Emission (Bremsstrahlung) im Bereich $\lambda = (0.01 \dots 1) nm$

Absorption beim Durchgang durch Materie (Dicke d)

Intensität der transmittierten Strahlung:

$$I = I_0 e^{-\alpha d}$$

$\alpha = n\sigma_a$ - Absorptionskoeffizient

n - Teilchenanzahldichte der Absorberatome, $n\sigma_a$ Absorptionsquerschnitt, experimenteller Befund: $\sigma_a = cZ^4 \lambda^3$

Absorptionsmechanismen: Photoeffekt, Compton-Effekt, Paarbildung
Energiewerte der Absorptionskanten Transmissionsspektrums ergibt sich nach dem Gesetz von Mosley:

$$\nu_k = ck_n (Z - 1)^2$$

Damit ist die Frequenz eines Röntgenquants beim Übergang zwischen den Zuständen i und k

$$\nu_{ik} = R_y (Z - \sigma)^2 \left(\frac{1}{n_k^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

Beugung von Röntgenstrahlung

Bei Reflexion von Röntgenstrahlung an Kristallebenen mit Netzebenenabstand d gilt für die Maxima der Intensität (elastische Streuung):

$$2d \sin \theta = m\lambda$$

6 Einführung in die Quantenphysik

6.1 Eigenschaften stabiler Kerne

Streuexperimente

1. Rutherford (elastische Streuung der Elektronen in reinem Coulombfeld); Rutherfordscher Wirkungsquerschnitt:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_R = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{16\pi\epsilon_0 E} \right)^2 \left(\frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \right)$$

2. Elektronenstreuung an Kernen (Mottscher Wirkungsquerschnitt), Berücksichtigung des Spins von Elektro un Kern

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_M = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_R \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

3. wegen räumlicher Ausdehnung der Kerne (keine Pkt-Ladg.) Modifikation

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{exp} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_M \cdot |F(q)|^2$$

mit $F(q)$ als Formfaktor $F(\theta) = Z^{-1} \int d^3r \rho_p(r) \exp(i \frac{\vec{q}\vec{r}}{\hbar})$ und
 $q = 2mv \sin \frac{\theta}{2}$

6.2 Kernmassen, Kernbausteine, Bindungsenergie

Bausteine

1. Massenzahl $A = Z + N$
2. Z Anzahl Protonen
3. N Anzahl Neutronen

Die Kernmasse ist kleiner als die Summe der Einzelmassen N und Z . Massendefekt, es gilt $E_B = \Delta mc^2 = Zm_H + Nm_H - Zm_P - Nm_N)c^2$ mit E_B Bindungsenergie und m_H Masse des Wasserstoffatoms

6.3 Tröpfchenmodell

Annahmen:

- Konstante Ladungsdichte im Kerninneren
- Kernkräfte abgesättigt, kurzreichweitig
- Kern - inkompressible Flüssigkeit

Bindungsenergie setzt sich aus 5 Bestandteilen zusammen:

Summand	Wert
Kondensationsenergie	$E_B^{(1)} = a_V \cdot A$
Oberflächenenergie	$E_B^{(2)} = a_S \cdot A^{\frac{2}{3}}$
Coulomb Energie	$E_B^{(3)} = a_C \cdot Z^2 A^{-\frac{1}{3}}$
Asymmetrieenergie	$E_B^{(4)} = \frac{-a_A (Z - \frac{A}{2})^2}{A}$

Die letzte Komponente, die Paarungsenergie, ist gegeben durch:

$$E_B^{(5)} = \begin{cases} +\delta & \text{gg} \\ 0 & \text{ug und gu} \\ -\delta & \text{uu} \end{cases}$$

mit $\delta \approx a_P A^{-\frac{1}{2}}$ Es folgt

$$E_B = \sum_{i=1}^5 E_B^{(i)}$$

Zerfall instabiler Kerne

zerfallsarten

- Emission von α Teilchen $\frac{4}{2}\alpha$

- β Umwandlungen $\pm_1\beta$
- Kernspaltung
- Emission EM-Strahlung

Ziel: niedrigst möglichen Energiezustand erreichen

Zerfallsgesetze

Anzahl der Zerfälle pro Sekunde - Aktivität:

$$A = -\frac{dN}{dt} = \lambda N$$

Damit $A(t) = \lambda N_0 e^{-\lambda t}$ Weiterhin

- Halbwertszeit $t_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\lambda}$
- mittlere Lebensdauer $N(\tau) = \frac{N_0}{e} \Rightarrow \tau = \frac{1}{\lambda}$
- Unschärferelation $\Delta E \Delta t \approx \hbar$ Damit ergibt sich für die Zerfallsbreite Γ eines instabilen Zustandes

$$\Gamma = \Delta E = \frac{\hbar}{\tau} = \hbar \lambda$$