

Elektrodynamik  
FSU Jena - WS 2007/2008  
- Notizen -

Stilianos Louca

19. Februar 2008

---

## Inhaltsverzeichnis

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Elektrostatik</b>  | <b>4</b>  |
| 1.1      | Das Coulombsche Gesetz . . . . .                            | 4         |
| 1.1.1    | Kraftfeld einer Ladungsverteilung . . . . .                 | 4         |
| 1.1.2    | Elektrostatistisches Feld einer Ladungsverteilung . . . . . | 4         |
| 1.1.3    | Das Gaussche Durchflutungsgesetz . . . . .                  | 4         |
| 1.1.4    | Übergangsbedingungen . . . . .                              | 5         |
| 1.1.5    | Das elektrostatische Potential . . . . .                    | 5         |
| 1.1.6    | Innere Energie einer Ladungsverteilung . . . . .            | 5         |
| 1.1.7    | Wechselwirkungsenergie von Ladungsverteilungen . . . . .    | 6         |
| 1.1.8    | Der Dipol . . . . .   | 6         |
| 1.2      | Multipolentwicklung . . . . .                               | 6         |
| 1.2.1    | Energieberechnung mittels Multipolentwicklung . . . . .     | 7         |
| 1.2.2    | Kraftberechnung mittels Multipolentwicklung . . . . .       | 7         |
| 1.2.3    | Drehmoment mittels Multipolentwicklung . . . . .            | 7         |
| 1.2.4    | Folgerungen für Dipol . . . . .                             | 7         |
| 1.3      | Das Randwertproblem der Elektrostatik . . . . .             | 8         |
| 1.3.1    | Formulierung des Problems . . . . .                         | 8         |
| 1.3.2    | 1. Grundaufgabe: Das Dirichlet-Randwertproblem . . . . .    | 8         |
| 1.3.3    | 2. Grundaufgabe . . . . .                                   | 9         |
| 1.3.4    | Energie und Kraft . . . . .                                 | 10        |
| 1.3.5    | Greensche Funktion . . . . .                                | 10        |
| 1.3.6    | Kondensatoren . . . . .                                     | 11        |
| 1.4      | Elektrostatik in Dielektrika . . . . .                      | 11        |
| 1.4.1    | Polarisation . . . . .                                      | 11        |
| 1.4.2    | Dielektrische Verschiebung . . . . .                        | 12        |
| 1.4.3    | Materialgleichungen . . . . .                               | 12        |
| 1.4.4    | Übergangsbedingungen an Materialgrenzen . . . . .           | 13        |
| 1.4.5    | Energie in dielektrischen Medien . . . . .                  | 13        |
| 1.4.6    | Kraftdichte in dielektrische Medien . . . . .               | 14        |
| 1.5      | Potentialberechnung in Isolatoren . . . . .                 | 14        |
| 1.5.1    | Die Poissongleichung . . . . .                              | 14        |
| 1.5.2    | Methode der Greenschen Funktion . . . . .                   | 15        |
| 1.5.3    | Raumladungsfreie Probleme . . . . .                         | 15        |
| <b>2</b> | <b>Magnetostatik</b>  | <b>16</b> |
| 2.1      | Strom & Magnetfeld . . . . .                                | 16        |
| 2.1.1    | Das Ohmsche Gesetz . . . . .                                | 16        |
| 2.1.2    | Kontinuitätsgleichung . . . . .                             | 16        |
| 2.1.3    | Übergangsbedingungen an Grenzflächen . . . . .              | 16        |
| 2.1.4    | Das Magnetfeld stationärer Ströme . . . . .                 | 17        |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 2.1.5    | Kraftwirkung des Magnetfelds . . . . .                              | 17        |
| 2.2      | Die Maxwellgleichungen in der Magnetostatik . . . . .               | 17        |
| 2.2.1    | Differenzielle Formulierung . . . . .                               | 18        |
| 2.2.2    | Integrale Formulierung . . . . .                                    | 18        |
| 2.3      | Das Vektorpotential . . . . .                                       | 19        |
| 2.3.1    | Die Eichtransformation . . . . .                                    | 19        |
| 2.3.2    | Bestimmung des Vektorpotentials . . . . .                           | 19        |
| 2.4      | Multipolentwicklung des Vektorpotentials . . . . .                  | 19        |
| 2.4.1    | Allgemeine Definition der Multipolmomente . . . . .                 | 19        |
| 2.4.2    | Die wichtigsten Momente einer Stromverteilung . . . . .             | 20        |
| 2.5      | Magnetostatik in Materie . . . . .                                  | 20        |
| 2.5.1    | Die Magnetisierung . . . . .  | 20        |
| 2.5.2    | Das $\vec{H}$ -Feld . . . . .                                       | 21        |
| 2.5.3    | Materialgleichungen . . . . .                                       | 21        |
| 2.5.4    | Übergangsbedingungen an Grenzflächen . . . . .                      | 22        |
| 2.5.5    | Raumladungsfreie Probleme . . . . .                                 | 22        |
| 2.6      | Energie des magnetostatischen Feldes . . . . .                      | 22        |
| 2.6.1    | Allgemeine Formulierung . . . . .                                   | 22        |
| 2.6.2    | Spezialfall: Dünne Leiter im Vakuum . . . . .                       | 23        |
| 2.7      | Kräfte im äußeren Magnetfeld . . . . .                              | 23        |
| 2.7.1    | Kleine Stromverteilungen . . . . .                                  | 23        |
| 2.7.2    | Leiterschleife im äußeren Magnetfeld . . . . .                      | 24        |
| 2.7.3    | Der Maxwellsche Spannungstensor . . . . .                           | 24        |
| <b>3</b> | <b>Langsam veränderliche Felder</b> . . . . .                       | <b>25</b> |
| 3.0.4    | Erläuterung: langsam veränderliche Felder . . . . .                 | 25        |
| 3.1      | Das Induktionsgesetz . . . . .                                      | 25        |
| 3.1.1    | Ruhende Systeme . . . . .   | 25        |
| 3.1.2    | Bewegte Inertialsysteme . . . . .                                   | 25        |
| 3.2      | Bestimmung der Felder . . . . .                                     | 25        |
| 3.2.1    | Die Maxwellgleichungen bei langsam veränderlichen Feldern . . . . . | 25        |
| 3.2.2    | Die Potentialgleichungen . . . . .                                  | 26        |
| 3.3      | Wechselstromtechnik . . . . .                                       | 26        |
| 3.3.1    | Kirchhoffsche Regeln . . . . .                                      | 26        |
| 3.3.2    | Additionstheoreme für Widerstände und Kapazitäten . . . . .         | 27        |
| 3.3.3    | Schwingungen . . . . .  | 27        |
| 3.3.4    | Leistung und Energie im Stromkreis . . . . .                        | 28        |
| <b>4</b> | <b>Das vollständige System der Maxwellgleichungen</b> . . . . .     | <b>29</b> |
| 4.1      | Das System der Maxwellgleichungen . . . . .                         | 29        |
| 4.1.1    | Die Maxwellgleichungen im Vakuum . . . . .                          | 29        |
| 4.1.2    | Die Maxwellgleichungen in Medien . . . . .                          | 29        |
| 4.1.3    | Ströme und Kontinuitätsgleichungen . . . . .                        | 29        |
| 4.2      | Zeitabhängige Felder . . . . .                                      | 30        |
| 4.2.1    | Die Response-Funktion . . . . .                                     | 30        |
| 4.2.2    | Übergang in den Frequenzraum . . . . .                              | 30        |
| 4.2.3    | Die Maxwellgleichungen im Fourierraum . . . . .                     | 31        |
| 4.2.4    | Übergangsbedingungen an Grenzen zweier Medien . . . . .             | 31        |
| 4.3      | Die elektrodynamischen Potentiale . . . . .                         | 31        |
| 4.3.1    | Potentiale . . . . .  | 31        |
| 4.3.2    | Eichtransformationen . . . . .                                      | 31        |
| 4.4      | Die Wellengleichungen im Vakuum . . . . .                           | 32        |
| 4.4.1    | Homogene Wellengleichung . . . . .                                  | 32        |
| 4.4.2    | Inhomogene Wellengleichung . . . . .                                | 32        |
| 4.5      | Energiesatz der Elektrodynamik . . . . .                            | 33        |
| 4.5.1    | Vakuum und lineare, isotrope, nicht dispersive Medien . . . . .     | 33        |
| 4.5.2    | Dispersive & absorptive Medien - Monochromatische Felder . . . . .  | 34        |
| 4.5.3    | Dispersive & absorptive Medien - Enge Spektren . . . . .            | 35        |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 4.6      | Der Impulssatz der Elektrodynamik . . . . .        | 35        |
| 4.6.1    | Die Kraftdichte . . . . .                          | 35        |
| 4.6.2    | Der Maxwellsche Spannungstensor . . . . .          | 35        |
| 4.6.3    | Impulsbilanz . . . . .                             | 36        |
| <b>5</b> | <b>Elektromagnetische Wellen</b>                   | <b>37</b> |
| 5.1      | Vakuum . . . . .                                   | 37        |
| 5.1.1    | Potentialgleichungen . . . . .                     | 37        |
| 5.1.2    | Feldgleichungen . . . . .                          | 38        |
| 5.2      | Transparente, homogene Medien . . . . .            | 38        |
| <b>6</b> | <b>Herleitung der wichtigsten Sätze</b>            | <b>39</b> |
| 6.1      | Kontinuitätsgleichung . . . . .                    | 39        |
| 6.1.1    | Lokale Ladungserhaltung . . . . .                  | 39        |
| 6.1.2    | Globale Ladungserhaltung . . . . .                 | 39        |
| 6.2      | Energie beim Dirichlet Randwertproblem . . . . .   | 39        |
| 6.2.1    | Bei vorgegebenen Potentialen auf Leitern . . . . . | 39        |
| 6.3      | Drehmoment im äußeren Magnetfeld . . . . .         | 40        |
| 6.3.1    | Stromdurchflossene Leiterschleife . . . . .        | 40        |
| 6.4      | Der Poyntingsche Satz . . . . .                    | 40        |
| 6.4.1    | Vakuum . . . . .                                   | 40        |
| 6.5      | Wellengleichung . . . . .                          | 41        |
| 6.5.1    | Homogen - Vakuum . . . . .                         | 41        |
| 6.5.2    | Inhomogen - Vakuum . . . . .                       | 42        |

# 1 Elektrostatik

## 1.1 Das Coulombsche Gesetz

### 1.1.1 Kraftfeld einer Ladungsverteilung

Auf eine Ladung  $q$  am Ort  $\vec{r}$  wirkt durch Ladungen  $q_1, \dots, q_n$  an den Orten  $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n$  die elektrostatische Kraft

$$\vec{F}_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

bzw. für eine kontinuierliche Ladungsverteilung  $\rho(\vec{r})$  im Volumen  $V$

$$\vec{F}_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

### 1.1.2 Elektrostatisches Feld einer Ladungsverteilung

Man definiert das elektrische Feld  $\vec{E}(\vec{r})$  am Ort  $\vec{r}$  als den Quotienten

$$\vec{E}(\vec{r}) = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}_q}{q}$$

Somit ist:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

### 1.1.3 Das Gausssche Durchflutungsgesetz

Aus oberer Definition folgt die 1. Maxwell Gleichung

$$\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

und ferner das Gausssche Durchflutungsgesetz für ein beliebiges, die Ladung  $Q$  umschließendes Volumen  $V$

$$\frac{Q}{\epsilon_0} = \int_V \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} dV = \int_V \operatorname{div} \vec{E} dV = \int_{\partial V} \vec{E} d\vec{A}$$

**Beispiel: Homogen geladene Kugelschale:** Betrachten eine homogen geladene Kugelschale der Ladungsdichte  $\rho_0$  und Radien  $R_1 < R_2$ . Aufgrund von Symmetriegründen ist das Feld im Außen- und Innenraum kugelsymmetrisch. Somit ist  $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\vec{e}_\rho$  und ferner:

$$Q_r = \epsilon_0 \cdot \int_{\partial V} \vec{E}(\vec{r}) d\vec{A} = \epsilon_0 E(r) \cdot \int_{\partial V} \vec{e}_\rho d\vec{A} = 4\pi r^2 \epsilon_0 E(r) \rightarrow E(r) = \frac{Q_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

wobei

$$Q_r = \int_V \rho_0 dV$$

die von der gedachten Kugel mit dem Radius  $r$  umschlossene Ladung ist. Somit folgt:

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\rho_0 (R_2^3 - R_1^3)}{3\epsilon_0 r^2} & : r > R_2 \\ \frac{\rho_0 (r^3 - R_1^3)}{3\epsilon_0 r^2} & : r \in [R_1, R_2] \\ 0 & : r < R_1 \end{cases}$$

### 1.1.4 Übergangsbedingungen

Oberflächenladungsdichte  $\eta(\vec{r})$  auf der Fläche  $A$  bewirkt Unstetigkeit der Normalkomponente:

$$E_2^n(\vec{r}) - E_1^n(\vec{r}) = \frac{\eta(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

Tangentialkomponente bleibt unverändert!

### 1.1.5 Das elektrostatische Potential

Es zeigt sich, dass  $\text{rot } \vec{E}(\vec{r}) = 0$  ist. Somit existiert eine skalare Funktion  $\Phi(\vec{r})$  so dass  $\vec{E} = -\text{grad } \Phi(\vec{r})$  ist. Dabei ist es bis auf eine additive Konstante  $\Phi_0$  festgelegt. Es folgt aus der 1. Maxwell Gleichung die Poisson-Gleichung für das elektrostatische Potential:

$$\Delta\Phi(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

Bei vorgegebenen  $\vec{E}$ -Feld berechnet sich  $\Phi$  gemäß

$$\Phi(\vec{r}) = \Phi(\vec{r}_0) + \int_{x_0}^x E^x(\xi, y_0, z_0) d\xi + \int_{y_0}^y E^y(x, \xi, z_0) d\xi + \int_{z_0}^z E^z(x, y, \xi) d\xi$$

Aus einer Ladungsverteilung  $\rho$  in einem Volumen  $V \subset \mathbb{R}^3$  ist das Potential  $\Phi(\vec{r})$  gegeben durch

$$\Phi(\vec{r}) = \Phi_0 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \cong \Phi_0 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

Durch Gradientenbildung ergibt sich das  $\vec{E}$ -Feld.

### 1.1.6 Innere Energie einer Ladungsverteilung

Kontinuierliche Ladungsverteilung (ohne Punktladungen!):

$$W = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \int_V \frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV dV'$$

Ladungen im Feld:

$$W = \frac{1}{2} \cdot \int_V \varphi(\vec{r})\rho(\vec{r}) dV$$

Reines Feld (ohne Singularitäten!):

$$\sigma(\vec{r}) := \frac{\varepsilon_0}{2} E^2(\vec{r}) : \text{lokale Energiedichte} \quad , \quad W = \int_V \frac{\varepsilon_0}{2} E^2(\vec{r}) dV$$

Diskrete Ladungsverteilung (innere Energie der Punktladungen nicht betrachtet!):

$$W = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

### 1.1.7 Wechselwirkungsenergie von Ladungsverteilungen

Kontinuierliche Verteilung im äußeren Feld:

$$W = \int_V \rho(\vec{r}) \varphi_a(\vec{r}) dV, \quad \varphi_a : \text{äußeres Feld}$$

Wechselwirkungsenergie zwischen zwei Ladungsverteilungen  $\rho_l$  und  $\rho_a$ :

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_{V_l} \int_{V_a} \frac{\rho_l(\vec{r}) \rho_a(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV dV'$$

Wechselwirkungsenergie zwischen zwei Punktladungen  $q_1, q_2$ :

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

### 1.1.8 Der Dipol

Dipolmoment zweier Ladungen  $q, -q$  im Abstand  $\vec{a}$ : definiert als  $\vec{p} = q\vec{a}$ .

Übergang zum Punktdipol am Ort  $\vec{r}_d$ :  $a \rightarrow 0, q \rightarrow \infty$  so dass  $p$  konstant bleibt, ergibt Potential:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_d)}{|\vec{r} - \vec{r}_d|^3} = -\frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0} \cdot \text{grad}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_d|}$$

Also für Punktdipol im Ursprung:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p \cos \vartheta}{r^2}$$

Somit elektrostatische Feld des Punktdipols:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} (\vec{p} \cdot \text{grad}) \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{3(\vec{r} \cdot \vec{p}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{P}}{r^3} \right]$$

Ladungsdichte eines Punktdipols:

$$\rho(\vec{r}) = -\vec{p} \cdot \text{grad}_{\vec{r}} \delta(\vec{r})$$

## 1.2 Multipolentwicklung

Mit dem Multipolmoment

$$Q_{k_1 \dots k_n}^n = 4\pi\epsilon_0 (-1)^n \cdot \int_V \rho(\vec{r}') r'^{2n+1} \frac{\partial^n G_0(\vec{r}')}{\partial x_{k_1} \partial x_{k_2} \dots \partial x_{k_n}} dV$$

einer Ladungsverteilung  $\rho(\vec{r})$  als Tensor  $n$ -ter Stufe, erhält man das Elektrostatische Potential  $\Phi(\vec{r})$  als

$$\Phi(\vec{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q^n(\vec{r}, \dots, \vec{r})}{n! r^{2n+1}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q_{k_1 \dots k_n}^n}{n! r^{2n+1}} x_{k_1} \dots x_{k_n}$$

Interpretation:

a) Moment 0. Stufe: Ladung:

$$Q^0 = \int_V \rho(\vec{r}') dV'$$

Für hinreichende große Entfernung also

$$\Phi^0(\vec{r}) \rightarrow \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

b) Moment 1. Stufe: Dipolmoment

$$Q_i^1 =: P_i = \int_V \rho(\vec{r}') x'_i dV' \sim \vec{P} = \int_V \rho(\vec{r}') \vec{r}' dV'$$

Dipolpotential:

$$\Phi^1(\vec{r}) \rightarrow \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

c) Moment 2. Stufe: Quadrupolmoment

$$Q_{ij}^2 =: D_{ij} = \int_V \rho(\vec{r}') (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) dV' \sim \hat{D} = \int_V dV \rho(\vec{r}') \begin{pmatrix} 3x^2 - r^2 & 3xy & 3xz \\ 3yx & 3y^2 - r^2 & 3yz \\ 3zx & 3zy & 3z^2 - r^2 \end{pmatrix}$$

Aus Definition folgt:  $\hat{D}$  symmetrischer Tensor. Quadrupolpotential:

$$\Phi^2(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{D}(\vec{r}, \vec{r})}{2r^5} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{D_{ij} x_i x_j}{2r^5}$$

Für hinreichend große Entfernungen von der Ladungsverteilungen:

$$\varphi(\vec{r}) \approx \Phi^0(\vec{r}) + \Phi^1(\vec{r}) + \Phi^2(\vec{r})$$

Zylindersymmetrische Ladungsverteilungen besitzen nur ein Dipolmoment in Richtung der Symmetrieachse. Kugelsymmetrische Ladungsverteilungen besitzen kein Dipolmoment, und auch keine Momente höherer Ordnung!

### 1.2.1 Energieberechnung mittels Multipolentwicklung

Eng begrenzte Ladungsverteilung  $\rho$  im äußeren Feld  $\varphi_a, \vec{E}_a$ :

$$W = Q\varphi_a(\vec{r}) - \vec{P} \cdot \vec{E}_a(\vec{r}) - \frac{1}{6} D_{ij} \frac{\partial E_i}{\partial x_j}(\vec{r}) + \dots$$

### 1.2.2 Kraftberechnung mittels Multipolentwicklung

Eng begrenzte Ladungsverteilung  $\rho$  im äußeren Feld  $\vec{E}_a$ :

$$\vec{F}(\vec{r}) = Q\vec{E}_a(\vec{r}) + [\vec{P} \cdot \text{grad}] \vec{E}_a(\vec{r}) + \dots$$

### 1.2.3 Drehmoment mittels Multipolentwicklung

Eng begrenzte Ladungsverteilung  $\rho$  im äußeren Feld  $\vec{E}_a$ :

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{P} \times \vec{E}_a(\vec{r}) + \dots$$

### 1.2.4 Folgerungen für Dipol

Energie eines Dipols  $\vec{P}$  im äußeren Feld

$$W = -\vec{p} \cdot \vec{E}_a(\vec{r})$$

Minimal falls  $\vec{p} \parallel \vec{E}$ .

Kraft auf Dipol:

$$\vec{F} = [\vec{p} \cdot \text{grad}] \vec{E}_a(\vec{r})$$

Drehmoment im äußeren Feld:

$$\vec{p} \times \vec{E}_a(\vec{r})$$

Energie eines induzierten Dipols:

$$W = -\frac{1}{2} (\vec{p} \cdot \vec{E})$$

## 1.3 Das Randwertproblem der Elektrostatik

### 1.3.1 Formulierung des Problems

Betrachten  $N$  ideale Leiter  $L_i$  und externe Ladungsverteilung  $\rho(\vec{r})$ . Zu berechnen: Potential  $\Phi(\vec{r})$ .  
Wissen:

- $\Phi$  konstant bzw.  $\vec{E} = 0$  innerhalb der Leiter.
- Leiteroberflächen sind Äquipotentialflächen.
- Feldlinien stehen senkrecht auf Leiteroberfläche.
- Ladungen befinden sich alle auf der Oberfläche des Leiters, somit Oberflächenladungsdichte  $\eta$ .
- Aus

$$(\vec{n} \cdot \vec{E}) = \frac{\eta(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

folgt für das Potential an der Oberfläche des Leiters

$$\eta(\vec{r}) = -\epsilon_0 \frac{\partial \Phi_a(\vec{r})}{\partial n} \Big|_{\partial L_i}$$

- Außerhalb der Leiter gilt die Poissongleichung:

$$\Delta \Phi(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

### 1.3.2 1. Grundaufgabe: Das Dirichlet-Randwertproblem

**Gegeben:**

- Leiter  $L_i$  und Potentiale  $U_i$  auf Leitern.
- Externe Ladungsverteilung  $\rho(\vec{r})$  außerhalb der Leiter.

**Suchen:**

- Potential  $\Phi(\vec{r})$
- Oberflächenladungsdichte  $\eta(\vec{r})$  auf den Leiteroberflächen.
- Gesamtladung  $Q_i$  auf den Leitern.

**Lösungsweg:**

- Berechnung der Greenschen Funktion  $G(\vec{r}, \vec{r}')$  für den Außenraum  $V$ . Dabei ist Greensche Funktion so dass:

$$-\epsilon_0 \Delta G(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

$$\vec{r} \in \partial L_i \rightarrow G(\vec{r}, \vec{r}') = 0$$

- Berechnung des Potentials nach:

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}) &= \int_V G(\vec{r}, \vec{r}') \Delta \Phi(\vec{r}') dV' - \epsilon_0 \int_{\partial V} \Phi(\vec{r}') \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} dA' \\ &= \int_V G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') dV' + \sum_i U_i \cdot \underbrace{\int_{\partial L_i} (-\epsilon_0) \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} dA'}_{\Gamma_i(\vec{r})} \\ &= \Phi_\rho(\vec{r}) + \sum_i U_i \cdot \Gamma_i(\vec{r}) \end{aligned}$$



mit den allein von der Geometrie des Systems abhängigen *Geometriefaktoren*  $\Gamma_i(\vec{r})$ . Es gilt:  $\Gamma_i(\partial L_i) = 1$  und  $\Delta\Gamma(\vec{r}) = 0$ .

**Bemerke:**

- Normalableitung  $\frac{\partial}{\partial n'}$  in den Leiter hinein gerichtet!
- Potential  $\Phi(\vec{r})$  setzt sich zusammen aus externen Potential  $\Phi_\rho(\vec{r})$  und den durch die Potentiale der Leiter erzeugten Potentialen.
- Beitrag der induzierten Ladungen steckt schon in  $\Phi_\rho(\vec{r})$

c) Berechnung der Oberflächenladungsdichte  $\eta_i(\vec{r})$  gemäß

$$\eta_i(\vec{r}) = -\varepsilon_0 \frac{\partial\Phi(\vec{r})}{\partial n_i} \Big|_{\partial L_i} = -\varepsilon_0 \int_V \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n_i} \rho(\vec{r}') dV' + \sum_j U_j \cdot \varepsilon_0^2 \int_{\partial L_j} \frac{\partial^2 G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n_i \partial n'_j} dA'$$

**Bemerke:** Normalableitung  $\frac{\partial}{\partial n_i}$  vom Leiter heraus gerichtet!

d) Berechnung der Ladungen  $Q_i$  auf den Leitern:

$$Q_i = \int_{\partial L_i} \eta_i(\vec{r}) dA$$

### 1.3.3 2. Grundaufgabe

**Bekannt:**

- Externe Ladungsverteilung  $\rho_e(\vec{r})$ .
- Gesamtladungen  $Q_i = \int_{L_i} \eta_i(\vec{r}) dA$  auf Leitern.

**Verwenden:**

- Greensche Funktion  $G(\vec{r}, \vec{r}')$  der Anordnung.
- Geometriekoeffizienten

$$\Gamma_i(\vec{r}) = -\varepsilon_0 \int_{\partial L_i} \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'_i} dA'$$

**Gesucht**

- Potential  $\Phi(\vec{r})$  außerhalb der Leiter.
- Flächenladungsdichten  $\eta_i(\vec{r})$
- Potentiale auf Leitern  $\varphi_i$ .

**Lösung:**

- Berechnung des externen Potentials

$$\Phi_\rho(\vec{r}) = \int_V G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') dV'$$

- Berechnung der von der Raumladung induzierten Ladung

$$Q_j^{ind} = \int_{\partial L_j} \eta_j^{ind}(\vec{r}) dA = -\varepsilon_0 \int_{\partial L_j} \frac{\partial\Phi_\rho(\vec{r})}{\partial n_j} dA = -\varepsilon_0 \int_{\partial L_j} \int_V \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n_j} \rho(\vec{r}') dV' dA$$

c) Berechnung der *Kapazitätskoeffizienten*  $C_{ij}$ :

$$C_{ij} := -\varepsilon_0 \int \frac{\partial \Gamma_i(\vec{r})}{\partial L_j} dA = \varepsilon_0^2 \int \int \frac{\partial^2 G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n_j \partial n'_i} dA' dA$$

$\uparrow \quad \uparrow$   
 $(a) \quad (b)$

(a) : Aus dem Leiter heraus gerichtet

(b) : In den Leiter hinein gerichtet

d) Wegen

$$Q_j = Q_j^{ind} + \sum_i U_i C_{ij}$$

folgt

$$U_i = \sum_j C_{ij}^{-1} (Q_j - Q_j^{ind})$$

e) Da jetzt Potentiale  $U_i$  auf Leitern bekannt, hat man das Problem auf das Dirichlet Randwertproblem zurückgeführt. Somit kann man  $\Phi(\vec{r})$  und  $\eta_i(\vec{r})$  berechnen.

### 1.3.4 Energie und Kraft

**Verwenden:**

- Potential  $\Phi(\rho)$  im Außenfeld.
- Kapazitätskoeffizienten  $C_{ij}$

**Vorgegeben:**

a) Potentiale  $U_j$  auf den Leitern. Dann:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho(\vec{r}) \Phi_\rho(\vec{r}) dV + \frac{1}{2} \sum_{i,j} C_{ij} U_i U_j$$

Beweis: Siehe 6.2.1.

b) Gesamtladungen  $Q_i$ . Dann:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho(\vec{r}) \Phi(\vec{r}) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} C_{ij}^{-1} Q_i Q_j$$

Kraft auf Ladungsverteilung ergibt sich als  $\vec{F} = -\text{grad } W$ .

### 1.3.5 Greensche Funktion

Eigenschaften der Greenschen Funktion:

- Hat nur was mit der Geometrie zu tun!
- Symmetrie:  $G(\vec{r}, \vec{r}') = G(\vec{r}', \vec{r})$
- $-\varepsilon_0 \Delta G(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r}, \vec{r}')$
- $G(\partial L_i, \vec{r}') = 0$

Wichtige Greensche Funktionen:

- Halbebene  $x > 0$

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r} - \tilde{\vec{r}}|} \right], \quad \tilde{\vec{r}} = \begin{pmatrix} -x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Geometrikoeffizient:

$$\Gamma(\vec{r}) = \begin{cases} 1 & : x \geq 0 \\ -1 & : x < 0 \end{cases}$$

- Kugel mit dem Radius  $R$

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{R}{r'} \cdot \frac{1}{|\vec{r} - \frac{R^2}{r'^2} \vec{r}'|} \right]$$

Geometrikoeffizient:

$$\Gamma(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{R}{r} & : r \geq R \\ 0 & : r < R \end{cases}$$

Kapazitätskoeffizient:

$$C = 4\pi\epsilon_0 R$$

### 1.3.6 Kondensatoren

Ladung  $Q$ , Spannung  $U$ , Kapazität  $C$ :

$$Q = CU$$

Wichtige Kapazitäten:

- a) Plattenkondensator: Fläche  $A$ , Plattenabstand  $d$ .

$$C_P = \frac{A\epsilon_0}{d}$$

- b) Kugelkondensator: Innerer Radius  $a$ , äußerer Radius  $b$ .

$$C_K = \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{b - a}$$

## 1.4 Elektrostatik in Dielektrika

### 1.4.1 Polarisation

Betrachten ein Medium, das unter Einfluss eines äußeren Feldes polarisiert werden kann. Somit entsteht eine Dipoldichte:

$$\vec{P}_d(\vec{r}) := \sum_i \vec{p}_i \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$$

Somit Dipolpotential:

$$\Phi_d(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \vec{P}_d(\vec{r}') \cdot \text{grad}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

Führen ein: mittlere Dipoldichte:

$$\vec{P}(\vec{r}) := \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \vec{P}_d(\vec{r} + \vec{r}') dV'$$

eines minimalen *Volumenelements*  $\Delta V$  am Ort  $\vec{r}$  und erhalten für das mittlere Dipol-Potential am Ort  $\vec{r}$ :

$$\langle \Phi_d(\vec{r}) \rangle = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \vec{P}(\vec{r}') \cdot \text{grad}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\partial V} \frac{\vec{P}(\vec{r}) \cdot d\vec{A}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\text{div}_{\vec{r}'} \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

Durch Identifizierung

$$\rho_p(\vec{r}) = -\operatorname{div} \vec{P} \quad , \quad \eta_p(\vec{r}) = \vec{P}(\vec{r}) \cdot \vec{n}$$

als Polarisationsladungen erhält man

$$\langle \varphi_d(\vec{r}) \rangle = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\partial V} \frac{\eta_p(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dA' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_p(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

### Bemerkungen:

- Polarisationsladungen sind die Senken des Polarisationsfeldes  $\operatorname{div} \vec{P}(\vec{r}) = -\rho_p(\vec{r})$
- Polarisationsladungen treten zusätzlich zu den externen oder freien Ladungen auf.
- Quellen des  $\vec{E}$ -Feldes sind alle Ladungen.

$$\epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} = \rho_p + \rho_e$$

- Es gilt stets

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0$$

so dass man immer noch schreiben kann

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \Phi$$

- Die Gesamte induzierte Ladung des Dielektrikums verschwindet:

$$Q_p = - \int_V \operatorname{div} \vec{P}(\vec{r}) dV + \int_{\partial V} \vec{P}(\vec{r}) d\vec{A} = - \int_{\partial V} \vec{P}(\vec{r}) d\vec{A} + \int_{\partial V} \vec{P}(\vec{r}) d\vec{A} = 0$$

### 1.4.2 Dielektrische Verschiebung

Wegen Polarisationsladungen gilt jetzt:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_p + \rho_e}{\epsilon_0}$$

mit externer Ladungsdichte  $\rho_e$  und Polarisationsladungsdichte  $\rho_p$ .

Führen neues Feld ein: die *dielektrische Verschiebung*:

$$\vec{D}(\vec{r}) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) + \vec{P}(\vec{r})$$

für die gilt:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} + \operatorname{div} \vec{P} = \rho_p + \rho_e - \rho_p = \rho_e$$

### 1.4.3 Materialgleichungen

Allgemein Polarisation vom  $\vec{E}$ -Feld abhängig:

$$\vec{P} = \vec{P}(\vec{E})$$

Betrachten lineare, isotrope Medien:

$$\vec{P} \sim \vec{E}$$

und führen die elektrische Suszeptibilität  $\chi$  ein:

$$\vec{P}(\vec{r}) = \epsilon_0 \chi(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r})$$

Somit ergibt sich:

$$\vec{D}(\vec{r}) = \epsilon_0 (1 + \chi(\vec{r})) \vec{E}(\vec{r}) = \epsilon_0 \epsilon(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r})$$

mit der statischen Dielektrizitätskonstante (*relative Permittivität*)

$$\epsilon(\vec{r}) := 1 + \chi(\vec{r})$$

### Bemerke:

- Der Ausdruck

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon(\vec{r}) \vec{E}$$

gilt nur im statischen Fall, für lineare, isotrope Medien!

- $\varepsilon(\vec{r})$  ist eine das Material bzw. den Ort beschreibende skalare Funktion.

#### 1.4.4 Übergangsbedingungen an Materialgrenzen

Unabhängig von der jeweiligen Materialgleichung gilt

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_e \rightsquigarrow D_{n_a}(\vec{r}) - D_{n_i}(\vec{r}) = \eta_e(\vec{r})$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0 \rightsquigarrow E_{t_a}(\vec{r}) = E_{t_i}(\vec{r})$$

Für lineare, isotrope Medien insbesondere:

$$\varepsilon_0 \varepsilon_a E_{n_a}(\vec{r}) - \varepsilon_0 \varepsilon_i E_{n_i}(\vec{r}) = \eta_e(\vec{r})$$

$$- \varepsilon_0 \varepsilon_a \frac{\partial \Phi_a(\vec{r})}{\partial n} + \varepsilon_0 \varepsilon_i \frac{\partial \Phi_i(\vec{r})}{\partial n} = \eta_e(\vec{r})$$

$$\frac{D_{t_a}}{\varepsilon_a} = \frac{D_{t_i}}{\varepsilon_i}$$

**Bemerke:**

- Potential  $\Phi$  immer stetig!
- Tangentialkomponente des  $\vec{E}$ -Feldes stetig an Grenzflächen.
- Tangentialkomponente des  $\vec{D}$ -Feldes unstetig an Grenzflächen.
- Normalkomponente des  $\vec{D}$ -Feldes sind nur stetig wenn keine  $\eta_e$  vorhanden ist.

Speziell für  $\eta_e = 0$ :

$$D_{n_a} = D_{n_i}$$

und für lineare, isotrope Medien:

$$\varepsilon_a E_{n_a}(\vec{r}) = \varepsilon_i E_{n_i}(\vec{r})$$

$$\varepsilon_a \frac{\partial \Phi_a(\vec{r})}{\partial n} = \varepsilon_i \frac{\partial \Phi_i(\vec{r})}{\partial n}$$

#### 1.4.5 Energie in dielektrischen Medien

Bei gegebenem  $\vec{E}$ - und  $\vec{P}$ -Feld ist Gesamtenergie allgemein gegeben durch

$$W = W_\rho + W_p = \frac{1}{2} \left[ \varepsilon_0 \int_{\mathbb{R}^3} \vec{E}^2(\vec{r}) dV + \int_{\mathbb{R}^3} \vec{P}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}) dV \right] = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{D}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}) dV$$

bzw.

$$W = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \Phi(\vec{r}) \cdot \rho_e(\vec{r}) dV$$

wobei  $\Phi$  sowohl von  $\rho_e$  als auch von  $\rho_p$  erzeugt wird!

**Beachte:** Enthält gesamte Energie, inklusive Energie um Dipole zu spannen und ins Feld zu bringen!

In linearen, isotropen Medien gilt insbesondere:

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \varepsilon(\vec{r}) \cdot \vec{E}^2 dV$$

### 1.4.6 Kraftdichte in dielektrische Medien

Betrachten nur lineare Response:

$$\vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon_0 \varepsilon(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r})$$

und allgemein  $\rho_e, \rho_p$ .

**Annahmen:**

- Verschiebung & Deformation, aber keine Dilatation!
- Stetiges  $\varepsilon(\vec{r})$

Kraftdichte ergibt sich als

$$\vec{f}(\vec{r}) = \rho_e \vec{E}(\vec{r}) - \frac{\varepsilon_0}{2} \vec{E}^2 \text{grad} \varepsilon(\vec{r})$$

**Bemerkungen:**

- Im Falle von homogenen Medien  $\varepsilon : \text{const}$  ergibt sich die normale Coulomb-Kraft  $\vec{f} = \rho_e \vec{E}$ , d.h. Polarisationsladungen spielen keine Rolle!
- Abgesehen von  $\rho_e$ , ist  $\vec{f}$  antiparallel zu  $\text{grad} \varepsilon$ . Starke Dielektrika verdrängen also schwache Dielektrika.

Für stückweise stetiges  $\varepsilon(\vec{r})$  erhalten:

$$\vec{f}(\vec{r}) = \text{div} \hat{T}(\vec{r}) = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \cdot \vec{e}_i$$

mit dem Maxwell'schen Spannungstensor

$$T_{ij} = E_i D_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E_k D_k$$

Also Kraft auf Volumen  $V$ :

$$\vec{F} = \int_V \vec{f}(\vec{r}) dV = \int_V \text{div} \hat{T}(\vec{r}) dV = \int_{\partial V} \hat{T}(\vec{r}) \cdot d\vec{A}$$

Somit um Kraft auf Körper  $K$  im Vakuum zu berechnen, suchen beliebiges Volumen  $V \supset K$  aus und verwenden obige Formel!

**Bemerke:** Im linearen Fall ist  $\hat{T}$  symmetrisch.

## 1.5 Potentialberechnung in Isolatoren - Lineare, Isotrope Medien

### 1.5.1 Die Poissongleichung

Wegen  $\text{rot} \vec{E} = 0$  führen auch hier ein:  $\vec{E} = -\text{grad} \Phi$  und verwenden

$$\text{div} \vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon_0 \text{div} [\varepsilon(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r})] = \rho_e(\vec{r})$$

Inhomogene Medien:

$$\Delta \Phi(\vec{r}) + \frac{1}{\varepsilon(\vec{r})} \text{grad} \varepsilon(\vec{r}) \cdot \text{grad} \Phi(\vec{r}) = -\frac{\rho_e(\vec{r})}{\varepsilon_0 \varepsilon(\vec{r})}$$

Allgemein zu kompliziert!

Betrachten daher homogene Medien:  $\varepsilon : \text{const}$ , also

$$\varepsilon_0 \varepsilon \text{div} \vec{E}(\vec{r}) = \rho_e(\vec{r}) \rightsquigarrow \Delta \Phi(\vec{r}) = -\frac{\rho_e(\vec{r})}{\varepsilon_0 \varepsilon} \rightsquigarrow \Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

Lösung mit bekannten Methoden, nur  $\varepsilon_0 \rightarrow \varepsilon_0 \varepsilon$ .

Stückweise konstantes  $\varepsilon$ :

$$\Delta \Phi_i(\vec{r}) = -\frac{\rho_e^i(\vec{r})}{\varepsilon_0 \varepsilon_i}$$

Beachtung der Übergangsbedingungen an den Grenzflächen!

### 1.5.2 Methode der Greenschen Funktion

#### Problemstellung:

- $N$  Dielektrika  $V_i$  mit den Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon_i$ .
- Externe Ladungsdichte  $\rho_e$  allgemein in jedem Dielektrikum.
- Natürliche Randbedingungen und Übergangsbedingungen.

#### Lösung:

a) Bestimmung der Greenschen Funktion  $G(\vec{r}, \vec{r}')$  die in jedem Dielektrikum unterschiedlich ist:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = G_i(\vec{r}, \vec{r}') \text{ für } \vec{r} \in V_i, \text{ so dass } -\varepsilon_0 \varepsilon_i \Delta G_i(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

mit den Übergangsbedingungen an Grenzflächen:

- $G(\cdot, \vec{r}')$  ist stetig.
- $\varepsilon_i \frac{\partial G_i}{\partial n}$  ist stetig, d.h.

$$\varepsilon_1 \frac{\partial G_1(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n} = \varepsilon_2 \frac{\partial G_2(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n} \Big|_{\vec{r} \in \partial V_1 \cap \partial V_2}$$

b) Integrierung

$$\Phi(\vec{r}) = \int_V dV' \rho_e(\vec{r}') G_i(\vec{r}, \vec{r}') \quad : \vec{r} \in V_i$$

### 1.5.3 Raumladungsfreie Probleme

Für  $\rho_e = 0$  und gegebener Polarisation  $\vec{P}(\vec{r})$  ist Potential  $\Phi(\vec{r})$  gegeben durch:

$$\Phi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \int_V \frac{\text{div } \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\partial V} \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot d\vec{A}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Daraus  $\vec{E}$ - und  $\vec{D}(\vec{r})$  Feld:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad } \Phi(\vec{r}) \quad , \quad \vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) + \vec{P}(\vec{r})$$

**Beachte:** Polarisation nicht vom  $\vec{E}$ -Feld hervorgerufen!

## 2 Magnetostatik

Statische Magnetische und Elektrische Felder.

### 2.1 Strom & Magnetfeld

#### 2.1.1 Das Ohmsche Gesetz

Betrachten Ladungsträger der Ladung  $q$ , Teilchendichte  $N$  und Masse  $m$  in einem Medium die der Bewegungsgleichung

$$m \left( \ddot{\vec{r}} + \gamma \dot{\vec{r}} \right) = q \vec{E}(\vec{r})$$

genügen. Diese Ladungsbewegung entspricht einem elektrischen (konduktions-) Strom

$$\vec{j} = \underbrace{\frac{Nq^2}{m\gamma}}_{\sigma} \cdot \vec{E}$$

Oberer Zusammenhang ist das *Ohmsche Gesetz* mit  $\sigma$  als Leitfähigkeit. Man definiert ferner den Strom  $I$  durch eine Fläche

$$I = \int_A \vec{j}(\vec{r}) \cdot d\vec{A}$$

Für dünne Leiter (homogene Stromverteilung) der Fläche  $A$ , Länge  $l$  und angesetzter Spannungsdifferenz  $V$  folgt für den den Querschnitt durchfließenden Strom

$$I = \frac{V}{R}, \quad R = \frac{l}{\sigma A}$$

#### 2.1.2 Kontinuitätsgleichung

Für beliebige Ladungsverteilungen  $\rho(\vec{r}, t)$  und Ströme  $\vec{j}(\vec{r}, t)$  gilt die Kontinuitätsgleichung (lokale Ladungserhaltung)

$$\operatorname{div} \vec{j}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0$$

In der Statik ist somit

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0$$

Dieser Zusammenhang gilt für alle Ströme und Ladungen:

$$\rho \leftrightarrow \vec{j}, \quad \rho_e \leftrightarrow \vec{j}_e, \quad \rho_p \leftrightarrow \vec{j}_p$$

**Bemerke:** Für lineare, isotrope Medien, folgt für den statischen Fall mit  $\sigma, \varepsilon : \text{const}$ :

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0 \rightarrow \rho_e = 0$$

#### 2.1.3 Übergangsbedingungen an Grenzflächen

Betrachten den Strom  $\vec{j}$  durch eine Grenzfläche zwischen zwei Medien  $\varepsilon_1, \sigma_1$  und  $\varepsilon_2, \sigma_2$ . Im statischen Fall ist  $\operatorname{div} \vec{j} = 0$ , was die Stetigkeit der Normalenkomponente des Stromes  $j_n$  impliziert! Wegen  $D_{n_2} - D_{n_1} = \eta_e$  erhält man ferner

$$\left( \frac{\varepsilon_2}{\sigma_2} - \frac{\varepsilon_1}{\sigma_1} \right) j_n = \frac{\eta_e}{\varepsilon_0}$$



### 2.1.4 Das Magnetfeld stationärer Ströme

Führen die magnetische Induktion  $\vec{B}$  ein, dass durch stationäre Ströme erzeugt wird, gemäß:

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\vec{j}(\vec{s}) \times (\vec{r} - \vec{s})}{|\vec{r} - \vec{s}|^3} dV \cong \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \frac{d\vec{s} \times (\vec{r} - \vec{s})}{|\vec{r} - \vec{s}|^3}$$

Obere Formulierung wird das *Biot-Savartsche Gesetz* genannt.

### 2.1.5 Kraftwirkung des Magnetfelds

Die Kraftdichte die auf eine (bewegte) Ladungsverteilung vom Magnetfeld ausgeübt wird, ist gegeben durch

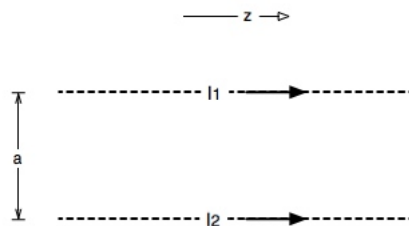
$$\vec{f}(\vec{r}) = \vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}) : \text{Lorentzkraft}$$

Somit ergibt sich die Kraft zwischen zwei stromdurchflossene, dünne Leiterschleifen  $S_1, S_2$  als

$$\vec{F}_1 = \int_{S_1} I_1 \cdot d\vec{s}_1 \times \vec{B}_2(\vec{s}_1) d\vec{s}_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \cdot \int_{S_1} \int_{S_2} \frac{d\vec{s}_1 \times [d\vec{s}_2 \times (\vec{s}_1 - \vec{s}_2)]}{|\vec{s}_1 - \vec{s}_2|^3}$$

**Bemerke:** Die Lorentzkraft wirkt immer senkrecht zur Stromrichtung und errichtet daher keine Arbeit!

**Beispiel:** Zwei parallele, unendlich lange Leiter im Abstand  $a$  in Richtung der  $z$ -Achse, jeweils an den Stellen  $(x_1, y_1) = (0, 0)$  und  $(x_2, y_2) = (a, 0)$ .



Wollen die Kraft ausrechnen, die zwischen zwei gegenüberliegenden Leiterelementen der Länge  $l$  wirkt:

$$\begin{aligned} \vec{F}_2 &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \cdot \int_0^l \int_0^l \frac{\vec{e}_z \times [\vec{e}_z \times ((s_2 - s_1)\vec{e}_z + a\vec{e}_x)]}{[(s_2 - s_1)^2 + a^2]^{\frac{3}{2}}} ds_1 ds_2 \\ &= -\frac{a\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \cdot \underbrace{\int_0^l \int_0^l \frac{ds_1 ds_2}{[(s_2 - s_1)^2 + a^2]^{\frac{3}{2}}}}_{\geq 0} \cdot \vec{e}_x \end{aligned}$$

Aus oberem Integral ist ersichtlich:

- Sind die Ströme gleichgerichtet, so ziehen sich die Drähte an.
- Sind die Ströme entgegengerichtet, so stoßen sich die Drähte ab.
- Die Kraft wirkt senkrecht auf die Drähte.

## 2.2 Die Maxwellgleichungen in der Magnetostatik

Voraussetzungen:

- $\dot{\rho} = \dot{j} = 0$
- $\dot{\vec{E}} = \dot{\vec{B}} = 0$

### 2.2.1 Differenzielle Formulierung

Wegen

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \operatorname{rot}_{\vec{r}} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

ist ersichtlich dass  $\vec{B}$  ein Wirbelfeld ist. Somit ist

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{B}(\vec{r}) = 0}$$

Ferner gilt das *Amperésche* oder *Oerstedtsche* Gesetz:

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r})}$$

**Bemerke:**

- Das Magnetfeld (magnetische Induktion) ist für stationäre Ströme ein verwirbeltes, quellenfreies Feld.
- Für das elektrische Feld gilt stets:

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}) = 0 \quad , \quad \operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}}$$

### 2.2.2 Integrale Formulierung

Für eine stromdurchflossene Fläche  $\mathcal{A}$  gilt:

$$\int_{\partial \mathcal{A}} \vec{B}(\vec{r}) d\vec{s} = \mu_0 \int_{\mathcal{A}} \vec{j}(\vec{r}) d\vec{A} = \mu_0 I_{\mathcal{A}}$$

Für ein Volumen  $V$  ferner

$$\int_V \operatorname{div} \vec{B}(\vec{r}) dV = \int_{\partial V} \vec{B}(\vec{r}) d\vec{A} = 0$$

**Tip:** Erste Gleichung (Amperésches Gesetz) sehr nützlich für Probleme hoher Symmetrie, bei denen zum Beispiel  $\vec{B} \cdot d\vec{s} : \text{const}$  auf einer Strecke  $\partial \mathcal{A}$  ist.

**Beispiele:**

- Magnetfeld eines unendlichen, stromdurchflossenen Zylinders (Radius  $R$ , Stromdichte im Inneren :  $\vec{j} = j_0 \vec{e}_z$ ):

$$\vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} \mu_0 j_0 \frac{r}{2} \cdot \vec{e}_\varphi & : r < R \\ \mu_0 \frac{I}{2\pi r} \cdot \vec{e}_\varphi & : r \geq R \end{cases}$$

- Magnetfeld einer stromdurchflossenen, langen Spule mit  $n$  Windungen, der Länge  $l$ . Die Symmetrieachse der Spule sei die  $z$ -Achse und die Windungsrichtung in diesem Kontext sei rechtshändig. Somit ist im Inneren

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 n I}{l} \cdot \vec{e}_z$$

und außerhalb für  $l \rightarrow \infty$

$$\vec{B}(\vec{r}) = 0$$

## 2.3 Das Vektorpotential

Wegen  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$  führen das *Vektorpotential*  $\vec{A}$  ein:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \operatorname{rot} \vec{A}$$

**Bemerke:**  $\vec{A}$  bis auf ein Gradientenfeld eindeutig bestimmt!

### 2.3.1 Die Eichtransformation

Grundgleichung für  $\vec{A}$ :

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r}) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}) - \Delta \vec{A}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r})$$

Doch Wahlfreiheit

$$\vec{A}' := \vec{A} + \operatorname{grad} \varphi$$

lässt  $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{rot} \vec{A}'$  unverändert! Also suchen ein  $\vec{A}'$  so dass:

$$\operatorname{div} \vec{A}' = 0 \rightarrow \operatorname{div} \vec{A} + \Delta \varphi = 0 : \text{Coulomb Eichung}$$

Für ein gegebenes  $\vec{A}$  ist diese Poissongleichung für  $\varphi(\vec{r})$  lösbar, so dass es solch ein  $\vec{A}'$  geben kann. Bekommen also:

$$\Delta \vec{A}(\vec{r}) = -\mu_0 \vec{j}(\vec{r})$$

wobei wir wieder zurücknennen  $\vec{A}' \rightarrow \vec{A}$ . Obere stellt eine Poissongleichung für jede Komponente dar.

### 2.3.2 Bestimmung des Vektorpotentials

Natürliche Randbedingungen: Wie in Elektrostatik  $\rightarrow$  Greensche Funktion

$$-\mu_0 \Delta G(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \rightsquigarrow G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Somit Lösung gleich aufschreiben als

$$\vec{A}(\vec{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} G(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \vec{j}(\vec{r}') dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

Lösung erfüllt automatisch Eichtransformation:

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0$$

für endliche Stromverteilungen!

## 2.4 Multipolentwicklung des Vektorpotentials in der Magnetostatik

### 2.4.1 Allgemeine Definition der Multipolmomente

Analog zur Elektrostatik, führen auch hier für endliche Stromverteilungen die Multipolmomente

$${}_n J_{k_1 \dots k_n}^i := \frac{4\pi}{\mu_0} (-1)^n \int_V j_i(\vec{r}') r'^{2n+1} \frac{\partial^n G_0(\vec{r}')}{\partial x_{k_1} \dots \partial x_{k_n}} dV'$$

als Tensoren  $n$ -ter Stufe ein. Der Index "i" deutet auf die Komponente von  $\vec{j}$  an! Somit ist  $\vec{A}$  entwickelbar gemäß

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{{}_n J_{k_1, \dots, k_n}^i}{n! r^{2n+1}} \cdot x_{k_1} \cdot \dots \cdot x_{k_n} \cdot \vec{e}_i$$

## 2.4.2 Die wichtigsten Momente einer Stromverteilung

a) Monopolpotential:

$$\vec{A}_m(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \cdot \int_V \vec{j}(\vec{r}') dV'$$

Doch wegen  $\text{div } \vec{j} = 0$  ist  $j_i = \text{div}(x_i \cdot \vec{j})$  und somit

$$A_m^i = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \cdot \int_V \text{div} [x_i \vec{j}(\vec{r}')] dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \cdot \int_{\partial V} x_i \vec{j}(\vec{r}') d\vec{A}' = 0$$

da  $\vec{j}$  am Rand  $\partial V$  verschwindet. **Es existieren also keine magnetischen Monopole!**

b) Dipolpotential:

$$\vec{A}_d(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \int_V \vec{j}(\vec{r}') \cdot (\vec{r} \cdot \vec{r}') dV' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{r}}{r^3} \times \frac{1}{2} \int_V [\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')] dV'$$

Führen somit magnetisches Dipolmoment  $\vec{m}$  ein

$$\vec{m} := \frac{\mu_0}{2} \int_V [\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')] dV'$$

und erhalten für das Dipolpotential

$$\boxed{\vec{A}_d(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}}$$

Das Dipolfeld ergibt sich so als

$$\vec{B}_d(\vec{r}) = \text{rot } \vec{A}_d(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{3\vec{r} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{m}) - r^2 \vec{m}}{r^5}$$

**Fazit:** In einiger Entfernung von der Stromverteilung beschreibt das Dipolpotential das gesamte Potential ausreichend gut.

**Beispiel:** Kreisstrom in dünnen Drähten: Übergang  $\vec{j}(\vec{r}') dV' \rightarrow Id\vec{s}'$ . Dipolmoment einer beliebigen, in einer Ebene liegenden, stromdurchflossenen Schleife, gegeben durch

$$\vec{m} = \mu_0 I \vec{A}$$

wobei  $\vec{A} = A\vec{n}$  der Flächennormalenvektor ist.

## 2.5 Magnetostatik in Materie

### 2.5.1 Die Magnetisierung

Analog zur Elektrostatik, auch hier mikroskopische magnetische Dipole (molekulare Ströme), mit dem Dipolfeld

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\vec{m} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Führen die Dipoldichte

$$\vec{M}_m(\vec{r}) = \sum_i \vec{m}^i \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

und die mittlere Dipoldichte (Magnetisierung)

$$\vec{M}(\vec{r}) = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \vec{M}_m(\vec{r} + \vec{r}') dV'$$

ein, und erhalten so das mittlere Dipolpotential definiert als

$$\langle \vec{A}_m(\vec{r}) \rangle = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \vec{A}_m(\vec{r} + \vec{r}') dV'$$

durch:

$$\langle \vec{A}_m(\vec{r}) \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'$$

Für die Magnetisierung folgt

$$\boxed{\text{rot } \vec{M}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{j}_m(\vec{r})}$$

Die Wirbel des Magnetisierungsfeldes sind die molekularen Ströme.

### 2.5.2 Das $\vec{H}$ -Feld

Führen das Hilfsfeld

$$\boxed{\vec{H}(\vec{r}) := \frac{1}{\mu_0} [\vec{B}(\vec{r}) - \vec{M}(\vec{r})]}$$

ein für das gilt

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}_e, \quad \text{div } \vec{H} = -\frac{1}{\mu_0} \text{div } \vec{M}(\vec{r})$$

wobei jetzt  $\vec{j}_e$  die externen Ströme seien. Dabei gilt:

- Die Wirbel des  $\vec{H}$ -Feldes sind die makroskopischen Ströme.
- Die Quellen des  $\vec{H}$ -Feldes sind die Senken des  $\vec{M}$ -Feldes.
- Das  $\vec{B}$ -Feld ist stets quellenfrei.

### 2.5.3 Materialgleichungen

Allgemein nicht linearer Zusammenhang

$$\vec{M} = \vec{M}(\vec{B})$$

Betrachten jedoch linearen Zusammenhang:

$$\vec{M}(\vec{r}) = \frac{\chi_m}{1 + \chi_m} \vec{B}(\vec{r}) \rightarrow \vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{\mu \mu_0} \vec{B}(\vec{r})$$

mit der magnetischen Suszeptibilität  $\chi_m$  und der relativen (magnetischen) Permeabilität  $\mu := 1 + \chi_m$ . Somit folgt für konstantes  $\mu$  die Poissongleichung

$$\boxed{\Delta \vec{A}(\vec{r}) = -\mu \mu_0 \vec{j}_e(\vec{r})}$$

Somit alle bekannten Lösungswege anwendbar:  $\mu_0 \rightarrow \mu \mu_0$ :

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu \mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}_e(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

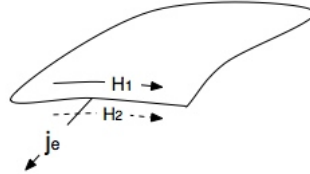
## 2.5.4 Übergangsbedingungen an Grenzflächen

Betrachten stückweise konstantes  $\mu$ . Wegen  $\text{div } \vec{B} = 0$  folgt

$$B_n(\vec{r}) \text{ stetig}$$

Wegen  $\text{rot } \vec{H}(\vec{r}) = \vec{j}_e(\vec{r})$  folgt

$$H_2^t(\vec{r}) - H_1^t(\vec{r}) = j_e^{OF}(\vec{r})$$



**Bemerkung:** Da Oberflächenströme meist 0 ist  $H^t$  meist auch stetig.

## 2.5.5 Raumladungsfreie Probleme

Betrachten vorgegebene Magnetisierung  $\vec{M}$  und  $\vec{j}_e$ . Dann ist

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}_e = 0 \quad , \quad \text{div } \vec{H} = -\frac{\text{div } \vec{M}}{\mu_0}$$

Führen deshalb skalares Potential  $\varphi_m$  ein:

$$\vec{H} = -\text{grad } \varphi_m \quad \rightarrow \quad \Delta \varphi_m(\vec{r}) = \frac{\text{div } \vec{M}(\vec{r})}{\mu_0}$$

Also analoge Lösungsmethoden zu Elektrostatik mit vorgegebener Raumladung:  $\varepsilon_0 \rightarrow \mu_0$  ,  $\rho(\vec{r}) \rightarrow -\text{div } \vec{M}$ . Somit für differenzierbare Magnetisierungen:

$$\varphi_m(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\mu_0} \int_V \frac{\text{div}_{\vec{r}'} \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' = -\frac{1}{4\pi\mu_0} \text{grad}_{\vec{r}} \int_V \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

**Bemerkung:** Für große Entfernungen ist  $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \approx \frac{1}{r}$  so dass sich ergibt

$$\varphi_m(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\mu_0} \cdot \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{r^3} \quad , \quad \vec{m} := \int_V \vec{M}(\vec{r}') dV'$$

was genau einem Dipolfeld entspricht!

Für nicht differenzierbare Magnetisierungen, z.B. an Grenzflächen, in Analogie zur Elektrostatik in Dielektrika:

$$\varphi_m(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\mu_0} \int_V \frac{\text{div}_{\vec{r}'} \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' + \frac{1}{4\pi\mu_0} \int_{\partial V} \frac{\vec{M}(\vec{r}') \cdot d\vec{A}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

## 2.6 Energie des magnetostatischen Feldes oder einer stationären Stromverteilung

### 2.6.1 Allgemeine Formulierung

**Annahme:** Lineare Response:

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{\mu\mu_0} \vec{B}(\vec{r})$$

Feldenergie:

$$W = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{B}(\vec{r}) \cdot \vec{H}(\vec{r}) dV$$

Energie in Strömen und Potential:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \vec{A}(\vec{r}) \cdot \vec{j}_e(\vec{r})$$

bzw.

$$W = \frac{\mu_0}{8\pi} \int_V \int_V \frac{\vec{j}_e(\vec{r}') \cdot \vec{j}_e(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV dV'$$

### 2.6.2 Spezialfall: Dünne Leiter im Vakuum

Betrachten  $n$  dünne Leiter  $S_i$ , durchflossen durch die Ströme  $I_i$ . Mit den Gegeninduktionskoeffizienten

$$L_{ij} := \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_i} \int_{S_j} \frac{d\vec{s}_i d\vec{s}_j}{|\vec{s}_i - \vec{s}_j|}, \quad i \neq j$$

und Selbstinduktionskoeffizienten

$$L_{ii} := \frac{\mu_0}{4\pi I^2} \int_{V_i} \int_{V_i} \frac{\vec{j}_i(\vec{r}) \cdot \vec{j}_i(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' dV$$

ist die Energie gegeben durch

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i,j} L_{ij} I_i I_j$$

**Andere Darstellung:** Mit dem magnetischen Fluss

$$\Phi_i = \int_{F_i} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = \sum_j L_{ij} I_j$$

durch die  $i$ -te Schleife, ist

$$W = \frac{1}{2} \sum_i \Phi_i I_i$$

## 2.7 Kräfte im äußeren Magnetfeld

### 2.7.1 Kleine Stromverteilungen

**Vorgegeben:**

- Vakuum.
- Endliche Stromverteilung  $\vec{j}$  im Volumen  $V$ .
- Magnetfeld  $\vec{B}_a(\vec{r})$  in  $V$ : etwa konstant im gesamten  $V$ , so dass Näherung gilt:

$$\vec{B}_a(\vec{r} + \vec{r}') \approx \vec{B}_a(\vec{r}) + (\vec{r}' \cdot \text{grad}_{\vec{r}}) \vec{B}_a(\vec{r})$$

Kraftdichte:

$$\vec{f}(\vec{r}) = \vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}_a(\vec{r})$$

Mit dem magnetischen Moment

$$\vec{m}_r := \frac{\mu_0}{2} \int_V \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r} + \vec{r}') dV'$$

ergibt sich die Gesamtkraft als:

$$\vec{F}(\vec{r}) \approx \frac{1}{\mu_0} (\vec{m}_r \cdot \text{grad}_{\vec{r}}) \vec{B}_a(\vec{r}) = \frac{1}{\mu_0} \underset{*}{\vec{B}'_a(\vec{r})} \cdot \vec{m}_r = \frac{1}{\mu_0} \text{grad} [\vec{m}_r \cdot \vec{B}_a(\vec{r})] \quad , \quad (*) : \text{Ableitung}$$

Wegen  $\vec{F}(\vec{r}) = -\text{grad } W$  ist die Energie gegeben durch

$$W \approx -\frac{1}{\mu_0} \vec{m}_r \cdot \vec{B}_a(\vec{r})$$

Außerdem Drehmoment:

$$\vec{M}_r \approx \frac{1}{\mu_0} \vec{m}_r \times \vec{B}_a(\vec{r})$$

**Bemerkung:** Ergebnisse entsprechen Energie, Kraft und Drehmoment auf einen magnetischen Dipol in einem magnetostatischen Feld.

### 2.7.2 Leiterschleife im äußeren Magnetfeld

**Vorgegeben:**

- Konstantes äußeres Magnetfeld  $\vec{B}$
- Geschlossene Leiterschleife  $S$ , in der ein stationärer Strom  $I$  fließt.

**Gesucht:** Auf die Schleife wirkendes Drehmoment  $\vec{M}$ .

**Lösung 1:** Mit dem magnetischen Dipolmoment

$$\vec{m} := \frac{\mu_0 I}{2} \int_S \vec{s} \times d\vec{s}$$

ist

$$\vec{M} = \frac{1}{\mu_0} \vec{m} \times \vec{B}$$

**Lösung 2:** Aus der Definition des Drehmoments und der Lorentzkraft folgt direkt

$$\vec{M} = I \cdot \int_S \vec{s} \times (d\vec{s} \times \vec{B})$$

Beide Methoden liefern das gleiche Ergebnis. Zum Beweis siehe 6.3.1.

### 2.7.3 Der Maxwell'sche Spannungstensor - Magnetische Anteil

**Vorgegeben:**

- Magnetfeld  $\vec{B}$
- Lineare Response:  $\vec{B} = \mu(\vec{r})\mu_0\vec{H}$

Mit dem Maxwell'schen Spannungstensor

$$T_{ij}^m = (B_i H_j) - \frac{\delta_{ij}}{2} \cdot \vec{B} \cdot \vec{H}$$

erhält man die Kraftdichte

$$\vec{f} = \frac{\partial T_{ij}^m}{\partial x_j} \cdot \vec{e}_i = \text{div } \hat{T}^m$$

und somit die Gesamtkraft auf ein Volumen  $V$

$$\vec{F}(\vec{r}) = \int_{\partial V} \hat{T}^m \cdot d\vec{A}$$



### 3 Langsam veränderliche Felder

#### 3.0.4 Erläuterung: langsam veränderliche Felder

Betrachten als *langsam veränderlich* Felder für die gilt

$$\left| \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right| \ll |\vec{j}|$$

Für harmonisch, mit der Kreisfrequenz  $\omega$  oszillierende Felder im Dielektrikum  $\varepsilon$  der Leitfähigkeit  $\sigma$  also

$$\frac{\omega \varepsilon_0 \varepsilon}{\sigma} \ll 1$$

#### 3.1 Das Induktionsgesetz

##### 3.1.1 Ruhende Systeme

**Beobachtung:** Änderung des magnetischen Feldes verwirbelt elektrisches Feld  $\rightarrow$  induzierte Ströme:

$$\text{rot } \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t)$$

Somit Faradaysches Induktionsgesetz:

$$\int_{\partial \mathcal{O}} \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r} = -\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{O}} \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{A} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \Phi(t) := \int_{\mathcal{O}} \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{A}$$

für eine beliebige Fläche  $\mathcal{O}$ . Speziell für stromdurchflossene Leiterschleife

$$U_{ind} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

Für  $N$  Leiterschleifen, mit Induktionskoeffizienten  $L_{ij}$ :

$$\Phi_i = \sum_j L_{ij} I_j \rightarrow U_i^{ind} = -\frac{d}{dt} \sum_j L_{ij} I_j$$

**Bemerke:**  $L_{ij}$  und  $I_j$  können beide Zeitabhängig sein!

##### 3.1.2 Bewegte Inertialsysteme

Inertialsystem bewegt sich mit Relativgeschwindigkeit  $\vec{v}$  bzgl. der Felder. Dann ist im bewegten System

$$\text{rot} \left[ \vec{E} - \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}, t) \right] = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t)$$

Ist  $\vec{E}'$  das  $\vec{E}$ -Feld im ruhenden System, so ist

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}'(\vec{r}, t) + \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}, t)$$

#### 3.2 Bestimmung der Felder

##### 3.2.1 Die Maxwellgleichungen bei langsam veränderlichen Feldern

Allgemein in Medien:

$$\text{rot } \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t) \qquad \text{div } \vec{D}(\vec{r}, t) = \rho_e(\vec{r}, t)$$

$$\text{rot } \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{j}_e(\vec{r}, t) \qquad \text{div } \vec{B}(\vec{r}, t) = 0$$

### 3.2.2 Die Potentialgleichungen

Führen auch hier Vektorpotential  $\vec{A}$  ein:

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \text{rot } \vec{A}(\vec{r}, t)$$

so dass

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{A} \rightarrow \text{rot} \left[ \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right] = 0$$

gilt, und man somit auch ein skalares Potential  $\Phi$  einführen kann:

$$\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} = -\text{grad } \Phi$$

Durch diese beiden Potentiale sind die homogenen Maxwellgleichungen automatisch gesichert! Man erhält durch direkte Manipulation die DGL

$$\Delta \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} - \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{A}$$

$$\Delta \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \mu_0 \vec{j}$$

Durch die Transformation

$$\vec{A}' := \vec{A} + \text{grad } \Psi, \quad \Phi' = \Phi - \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

ändert sich nichts für die Felder  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$ , und es zeigt sich dass immer die so genannte Coulomb Eichung möglich ist:

$$\text{div } \vec{A} \stackrel{!}{=} 0$$

Man erhält so unter oberer Eichung die Poissongleichungen

$$\Delta \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

die identisch sind mit den Gleichungen der Statik. Die Potentiale und somit auch die Felder folgen also adiabatisch den Quellen und Wirbeln.

## 3.3 Wechselstromtechnik

### 3.3.1 Kirchhoffsche Regeln

Betrachten langsam veränderliche (niederfrequente) Ströme in Leitern  $L_i$ .

**Knotenregel** Die Summe aller in und aus einem Leiter-Knoten fließenden Ströme ist 0:

$$\sum_k I_k = 0$$

Folgt aus Kontinuitätsgleichung.

**Maschenregel:** Die Summe aller in einem Leiterkreis abfallenden bzw. ansteigenden Spannungen  $U_k$  ist 0:

$$\sum_k U_k = 0$$

**Bemerkung:**

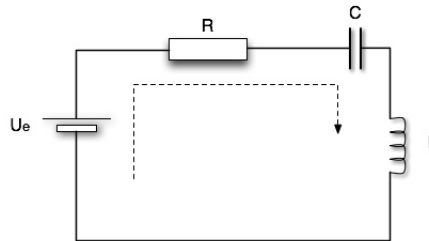
- Im Leiterkreis konsistent eine *Zählrichtung* anwenden und alles auf diese Richtung beziehen!
- Strom  $I$  fließt in Richtung Spannungsabfall!
- Spannungsanstieg am Widerstand:  $U_R = -IR$
- Spannungsanstieg am Kondensator:  $U_C = -\frac{Q}{C}$

- Spannungsanstieg an Induktion:  $U_i = -L\dot{I}$

**Besser formuliert:** In einem Leiterkreis  $S$  ist:

$$\int_{\partial S} \vec{E}(\vec{s}) d\vec{s} = U_{ind} = -\frac{d}{dt}\Phi = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B}(\vec{r}) d\vec{A} = -\frac{d}{dt} \sum_i L_i I_i$$

Betrachten dazu folgenden Stromkreis:



Bzgl. der illustrierten Umlaufrichtung ist:

$$\underbrace{\int_{U_e} \vec{E} d\vec{r}}_{-U_e} + \underbrace{\int_R \vec{E} d\vec{r}}_{U_R=IR} + \underbrace{\int_C \vec{E} d\vec{r}}_{U_C=\frac{Q}{C}} = -L\frac{dI}{dt} \rightarrow IR + \frac{Q}{C} + L\frac{dI}{dt} = U_e$$

wobei  $I$  der bzgl. dieser Richtung fließende Strom ist.

### 3.3.2 Additionstheoreme für Widerstände und Kapazitäten

**Widerstände:**

- Parallele Schaltung:

$$\frac{1}{R} = \sum_i \frac{1}{R_i}$$

- Reihenschaltung:

$$R = \sum_i R_i$$

**Kapazitäten:**

- Parallele Schaltung:

$$C = \sum_i C_i$$

- Reihenschaltung:

$$\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i}$$

### 3.3.3 Schwingungen

In einfachen Schleifen mit Spannungsquellen  $U_l$ , Induktionen  $L_k$ , Widerständen  $R_j$  und Kapazitäten  $C_i$  ergeben sich meist lineare Differentialgleichungen vom Typ

$$\sum_k L_k \ddot{I} + \sum_j R_j \dot{I} + \sum_i \frac{Q_i}{C_i} = \underbrace{\sum_l U_l}_{\text{Innhomogenität}} \rightarrow \sum_k \ddot{I} + \sum_j R_j \dot{I} + \sum_i \frac{I}{C_i} = \sum_l \dot{U}_l$$

bzw. gekoppelte Varianten  $\rightarrow$  Lösbar durch  $e$ -Ansatz  $\rightarrow$  periodische Lösungen (Schwingungen) oder exponentielles Verhalten (meist Abklingen).

Bei periodischer Inhomogenität, speziell harmonischer Erregung der Frequenz  $\omega \rightarrow$  suchen quasistationäre Lösung  $\rightarrow$  machen periodischen Ansatz vom Typ  $I(t) = I_0 e^{i\omega t}$  und gehen damit in die DGL ein.

**Methode der Impedanzen:** Betrachten harmonisch erregten Stromkreis, mit Erregungsspannung  $U = U_0 \cos(\omega t)$ . Problem: Berechnung der quasistationären Lösung.

Verallgemeinern den Begriff des Widerstandes zu den so genannten Impedanzen  $Z \in \mathbb{C}$ :

- Ohmscher Widerstand:  $R \rightarrow R$
- Induktivität:  $L \rightarrow i\omega L$
- Kapazität:  $C \rightarrow -\frac{i}{\omega C}$

Erweitern (gesuchten) Strom  $I$  in einem Stromkreis zum komplexen Strom

$$I = I_0 e^{i\omega t}, \quad I, I_0 \in \mathbb{C}$$

und Spannungsquelle (Erregung)

$$U = U_0 e^{i\omega t}, \quad U, U_0 \in \mathbb{C}$$

**Bemerkung:**  $U_0$  und  $I_0$  enthalten Anfangsphase!

Ausgehend vom Ohmschen Gesetz  $\rightarrow$  Verallgemeinerung:

$$I_0 = \frac{U_0}{Z}$$

wobei  $Z$  die *Gesamtimpedanz* des Stromkreises ist und nach den gleichen Regeln berechnet wird wie bei normalen Ohmschen Widerständen! Der Betrag  $|Z|$  wird auch Scheinwiderstand genannt. Der wirkliche Strom  $I^r$  ergibt sich schließlich als

$$I^r = \Re \{ I_0 e^{i\omega t} \}$$

### 3.3.4 Leistung und Energie im Stromkreis

Allgemein:

- Von der Quelle abgegebene Leistung:  $P_Q = UI$
- An Ohmschen Widerständen verbrauchte Leistung:  $P_R = I^2 R$
- Zum Aufbau (und Abbau) der Felder verbrauchte Leistung:  $P_F = P_Q - P_R$

In harmonischen Schwingungen:

- Scheinleistung:  $P_s = \sqrt{U^2} \cdot \sqrt{I^2} = \frac{1}{2} U_0 I_0$
- Wirkleistung:  $P_w = \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos(\Delta\varphi) = \bar{P}_R$
- Blindleistung:  $P_b = \frac{1}{2} U_0 I_0 \sin(\Delta\varphi) = \sqrt{P_s^2 - P_w^2}$

Energie in Komponenten:

- In Kapazitäten:

$$W_C = \frac{CU^2}{2} : \text{elektrische Energie}$$

- In Induktivitäten:

$$W_L = \frac{LI^2}{2} : \text{magnetische Energie}$$

Energiebilanz:

$$\frac{d}{dt} W_L(t) + \frac{d}{dt} W_C(t) = U_{ext} I(t) - RI^2(t)$$

## 4 Das vollständige System der Maxwellgleichungen

### 4.1 Das System der Maxwellgleichungen

#### 4.1.1 Die Maxwellgleichungen im Vakuum

Quellen der Felder:

$$\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\rho(\vec{r}, t)}{\varepsilon_0} \quad , \quad \operatorname{div} \vec{B}(\vec{r}, t) = 0$$

Wirbel der Felder:

$$\operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t) \quad , \quad \operatorname{rot} \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(\vec{r}, t)$$

#### 4.1.2 Die Maxwellgleichungen in Medien

Quellen der Felder:

$$\operatorname{div} \vec{D}(\vec{r}, t) = \rho_e(\vec{r}, t) \quad , \quad \operatorname{div} \vec{B}(\vec{r}, t) = 0$$

Wirbel der Felder:

$$\operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t) \quad , \quad \operatorname{rot} \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{j}_e(\vec{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}(\vec{r}, t)$$

wobei  $\vec{j}_e = \vec{j}_{conv} + \vec{j}_{cond}$  die makroskopische Stromdichte ist, und

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \left[ \vec{B}(\vec{r}, t) - \vec{M}(\vec{r}, t) \right] \quad , \quad \vec{D}(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{P}(\vec{r}, t)$$

**Bemerkung:** Natürlich gelten die Maxwellgleichungen des Vakuums *auch* in Medien. Doch sind dabei alle Ströme und Ladungen zu betrachten.

#### 4.1.3 Ströme und Kontinuitätsgleichungen

Ladungen:

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho_e(\vec{r}, t) + \rho_p(\vec{r}, t)$$

Ströme:

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{j}_e(\vec{r}, t) + \vec{j}_m(\vec{r}, t) + \vec{j}_p(\vec{r}, t)$$

mit  $\vec{j}_m$ ,  $\vec{j}_p$  als den molekularen bzw. Polarisationsströmen. Es gilt

$$\vec{j}_p(\vec{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \vec{P}(\vec{r}, t) \qquad \vec{j}_{conv}(\vec{r}, t) = [\vec{v} \cdot \operatorname{grad} \rho_e(\vec{r}, t)] \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

$$\operatorname{div} \vec{j}_{cond}(\vec{r}, t) = \operatorname{div} \vec{j}_m(\vec{r}, t) = 0 \qquad \underbrace{\operatorname{div} \vec{j}_{conv}(\vec{r}, t)}_{\operatorname{div} \vec{j}_e(\vec{r}, t)} + \frac{\partial}{\partial t} \rho_e(\vec{r}, t) = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{j}_p(\vec{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \rho_p(\vec{r}, t) = 0$$

## 4.2 Zeitabhängige Felder

### 4.2.1 Die Response-Funktion

**Betrachten:**

- Medium reagiert nicht momentan auf Veränderungen der Felder.
- Medium reagiert auf Felder unterschiedlicher Frequenzen unterschiedlich.
- Medium hat **lokale, lineare Response-Funktion**  $\vec{R}(\vec{r}, t)$ : Verhalten der Polarisation  $\vec{P}(\vec{r}, t)$  bei einer Erregung

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{e} \cdot \delta(t)$$

- Somit ist Reaktion des Mediums für allgemeine Erregungen gegeben durch die Faltung

$$\vec{P}(\vec{r}, \cdot) = R(\vec{r}, \cdot) * \vec{E}(\vec{r}, \cdot) \rightarrow \vec{P}(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} R(\vec{r}, \tau) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t - \tau) d\tau$$

**Bemerke:** Allgemeines Prinzip der linearen Systeme!

- Fordert man Kausalität, so ist  $R(\vec{r}, t) = 0$  für  $t < 0$ , also

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 \int_0^{\infty} R(\vec{r}, \tau) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t - \tau) d\tau$$

### 4.2.2 Übergang in den Frequenzraum

Aus der Mathematik weis man über die Fouriertransformation der Faltung:

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g)$$

Nennen für ein beliebiges Feld  $\vec{F}$ :

$$\vec{F}_f(\vec{r}, \omega) := \mathcal{F} \left[ \vec{F}(\vec{r}, \cdot) \right] (\omega)$$

und führen die (allgemein komplexe) Suszeptibilitätsfunktion des Materials ein

$$\chi(\vec{r}, \omega) := \mathcal{F} [R(\vec{r}, \cdot)] (\omega)$$

so dass wir erhalten

$$\vec{P}_f(\vec{r}, \omega) = \varepsilon_0 \chi(\vec{r}, \omega) \cdot \vec{E}_f(\vec{r}, \omega) \rightarrow \vec{D}_f(\vec{r}, \omega) = \varepsilon_0 \underbrace{[1 + \chi(\vec{r}, \omega)]}_{\varepsilon(\vec{r}, \omega)} \cdot \vec{E}_f(\vec{r}, \omega)$$

mit der komplexen dielektrischen Funktion  $\varepsilon(\vec{r}, \omega)$ . Durch Rücktransformation erhält man dann:

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \mathcal{F}^{-1} \left[ \varepsilon_0 \varepsilon(\vec{r}, \omega) \cdot \vec{E}_f(\vec{r}, \omega) \right]$$

Analog geht man auch für die Leitfähigkeit  $\sigma$  vor:

$$\vec{j}_f(\vec{r}, \omega) = \sigma_f(\vec{r}, \omega) \cdot \vec{E}_f(\vec{r}, \omega)$$

**Bemerkung:**

- $\Re \{ \varepsilon(\omega) \} \rightarrow$  Dispersion
- $\Im \{ \varepsilon(\omega) \} \rightarrow$  Absorption
- Beide Größen hängen im allgemeinen zusammen

### 4.2.3 Die Maxwellgleichungen im Fourierraum

Wirbel der Felder:

$$\text{rot } \vec{E}_f(\vec{r}, \omega) = i\omega \vec{B}_f(\vec{r}, \omega)$$

$$\text{rot } \vec{H}_f(\vec{r}, \omega) = -i\omega \vec{D}_f(\vec{r}, \omega) + \vec{j}_f(\vec{r}, \omega) \cong [-i\omega \varepsilon_0 \varepsilon(\vec{r}, \omega) + \sigma_f(\vec{r}, \omega)] \cdot \vec{E}_f(\vec{r}, \omega)$$

### 4.2.4 Übergangsbedingungen an Grenzen zweier Medien

Zwischen zwei Medien  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  ist:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \rightsquigarrow E_t(\vec{r}, t) : \text{stetig}$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho_e \rightsquigarrow D_n^2(\vec{r}, t) - D_n^1(\vec{r}, t) = \eta_e(\vec{r}, t)$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}_e \rightsquigarrow H_t^2(\vec{r}, t) - H_t^1(\vec{r}, t) = j_e^{OF}(\vec{r}, t)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \rightsquigarrow B_n(\vec{r}, t) : \text{stetig}$$

Speziell für  $\eta_e(\vec{r}, t) = 0$  ist  $D_t(\vec{r}, t)$  stetig, so dass folgt

$$\varepsilon_1(\vec{r}, \omega) E_n^1(\vec{r}, \omega) = \varepsilon_2(\vec{r}, \omega) E_n^2(\vec{r}, \omega)$$

## 4.3 Die elektrodynamischen Potentiale und die Eichtransformationen

### 4.3.1 Potentiale

Analog zu vorhin, führen auch hier Vektorpotential  $\vec{A}$  und skalares potential  $\Phi$  ein:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\text{grad } \Phi(\vec{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{r}, t) \quad , \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \text{rot } \vec{A}(\vec{r}, t)$$

so dass automatisch die homogenen Maxwellgleichungen

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \quad , \quad \text{div } \vec{B} = 0$$

erfüllt sind.

### 4.3.2 Eichtransformationen

Die Potentiale  $\vec{A}$  und  $\Phi$  sind nicht eindeutig bestimmt. Die Transformation

$$\Phi'(\vec{r}, t) := \Phi(\vec{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) \quad , \quad \vec{A}'(\vec{r}, t) := \vec{A}(\vec{r}, t) + \text{grad } \Psi(\vec{r}, t)$$

lässt für beliebiges  $\Psi(\vec{r}, t)$  physikalische Felder  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  invariant.

## 4.4 Die Wellengleichungen im Vakuum

### 4.4.1 Homogene Wellengleichung

Für  $\vec{j}(\vec{r}, t) = 0$  und  $\rho(\vec{r}, t) = 0$  ergeben sich sofort die Wellengleichungen

$$\Delta \vec{E}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}(\vec{r}, t) = 0$$

$$\Delta \vec{B}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B}(\vec{r}, t) = 0$$

mit  $c^2 := \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$ .

Grundlösungen sind ebene Wellen:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}, \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

für die notwendigerweise gilt:

$$\vec{E} \perp \vec{k} \perp \vec{B} \perp \vec{E}$$

Wellen im Vakuum sind somit Transversalwellen!

**Beweis:** Siehe 6.5.1

### 4.4.2 Inhomogene Wellengleichung

Einarbeitung der inhomogenen Maxwellgleichungen ergibt die gekoppelten, inhomogenen Wellengleichungen

$$\square \vec{A}(\vec{r}, t) - \text{grad} \left[ \text{div} \vec{A}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\vec{r}, t) \right] = -\mu_0 \vec{j}(\vec{r}, t)$$

$$\square \Phi(\vec{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \left[ \text{div} \vec{A}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\vec{r}, t) \right] = -\frac{\rho(\vec{r}, t)}{\epsilon_0}$$

→ Mittels geeigneter Eichtransformationen (Abschnitt 4.3.2) zu entkoppeln!

**Beweis:** Siehe 6.5.2.

**Lorentzzeichnung:** Fordern

$$\text{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\vec{r}, t) \stackrel{!}{=} 0$$

so dass sich die entkoppelten Wellengleichungen

$$\Delta \vec{A}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A}(\vec{r}, t) = -\mu_0 \vec{j}(\vec{r}, t)$$

$$\Delta \Phi(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi(\vec{r}, t) = -\frac{\rho(\vec{r}, t)}{\epsilon_0}$$

ergeben, deren Lösungen gegeben sind durch die *retardierten* Potentiale

$$\Phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$



**Bemerke:** Retardierten Potentiale resultieren aus Kausalität!

**Coulomb Eichung** Führen die Eichung

$$\operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}, t) \stackrel{!}{=} 0$$

ein und erhalten aus den ursprünglichen (gekoppelten) Wellengleichungen, für das skalare Potential

$$\Delta \Phi(\vec{r}, t) = -\frac{\rho(\vec{r}, t)}{\varepsilon_0} \rightarrow \Phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

und für das Vektorpotential die DGL

$$\square \vec{A}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \operatorname{grad} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\vec{r}, t) = -\mu_0 \vec{j}(\vec{r}, t)$$

Diese ist eigentlich entkoppelt, da  $\Phi$  bekannt ist. Jedoch ergibt sich durch direktes einsetzen von  $\Phi$ , Berücksichtigung der Kontinuitätsgleichung, und der Entwicklung

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{j}_L(\vec{r}, t) + \vec{j}_T(\vec{r}, t)$$

wobei  $\operatorname{div} \vec{j}_T = \operatorname{rot} \vec{j}_L = 0$  ist, schließlich die Wellengleichung

$$\square \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}_T(\vec{r}, t)$$

Dabei ist  $\vec{j}_L$  der so genannte *longitudinale* und  $\vec{j}_T$  der *transversale* Stromanteil. Somit ergeben sich die Lösungen der Wellengleichung unter der Coulomb Eichung, als

$$\Phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\vec{j}_T\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

**Bemerkungen:**

- Der transversale Stromanteil ist nicht geometrisch zu deuten, sondern lediglich im Kontext zu verstehen, dass jedes Vektorfeld in ein Wirbelfeld und ein Gradientenfeld zerlegt werden kann! Es ist:

$$\vec{j}_T(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \operatorname{rot}_{\vec{r}} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

- Lösungen sind verträglich mit der Coulomb Eichung, denn:

$$0 = -\mu_0 \operatorname{div} \vec{j}_T(\vec{r}, t) = \operatorname{div} \left[ \square \vec{A}(\vec{r}, t) \right] = \square \operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}, t)$$

## 4.5 Energiesatz der Elektrodynamik - Der Poyntingsche Satz

### 4.5.1 Vakuum und lineare, isotrope, nicht dispersive Medien

**Voraussetzungen:**

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \varepsilon(\vec{r})\varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t), \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu(\vec{r})\mu_0} \vec{B}(\vec{r}, t)$$

Definieren den *Poynting Vektor*

$$\vec{S}(\vec{r}, t) := \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{H}(\vec{r}, t)$$

und erhalten den Poyntingschen Satz im Vakuum

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} + \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} \right) + \vec{j}_e \cdot \vec{E} = - \operatorname{div} \vec{S}$$

**Beweis:** Siehe Abschnitt 6.4.1.

**Interpretation:** Mit der elektromagnetischen Feldenergiedichte

$$w_e := \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} + \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$$

und der mechanisch verrichteten Arbeit

$$\frac{\partial w_k}{\partial t} = \vec{j}_e \cdot \vec{E}$$

stellt der Poyntingsche Satz eine Energiebilanz des Systems  $V$  dar:

$$\frac{\partial}{\partial t} (W_e + W_k) = - \operatorname{div} \vec{S} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} (W_m + W_e) = - \int_{\partial V} \vec{S} \, d\vec{A}$$

Hier ist  $W_k$  die kinetische bzw. mechanische (insofern keine anderen Kräfte auf die Teilchen wirken) Energie des Systems, und  $\vec{S}$  stellt somit die Energiestromdichte der Felder dar.

#### 4.5.2 Dispersive & absorptive Medien - Monochromatische Felder

**Voraussetzungen:**

$$\varepsilon(\vec{r}, \omega), \mu(\vec{r}, \omega)$$

Für monochromatische Felder

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \Re \left\{ \vec{E}_f(\vec{r}, \omega_0) e^{i\omega_0 t} \right\}, \quad \vec{H}(\vec{r}, t) = \Re \left\{ \vec{H}_f(\vec{r}, \omega_0) e^{i\omega_0 t} \right\}$$

ist es notwendig, bei Energiebetrachtungen die zeitliche Mittelung

$$\langle \vec{E}^2(\vec{r}, t) \rangle = \frac{1}{2} \left| \vec{E}_f(\vec{r}, \omega_0) \right|^2, \quad \langle \vec{H}^2(\vec{r}, t) \rangle = \frac{1}{2} \left| \vec{H}_f(\vec{r}, \omega_0) \right|^2,$$

der Felder zu betrachten. Es folgt aus obigen Voraussetzungen, der Poyntingsche Satz in dispersiven Medien:

$$\frac{\omega_0}{2} \left[ \Im \left\{ \vec{E}_f^* \cdot \vec{P}_f \right\} + \Im \left\{ \vec{H}_f^* \cdot \vec{M}_f \right\} \right] + \langle \vec{j}_e \cdot \vec{E} \rangle = - \operatorname{div} \langle S \rangle$$

Speziell für lineare Medien

$$\varepsilon(\vec{r}, \omega), \mu(\vec{r}, \omega)$$

ist

$$\vec{P}_f^*(\vec{r}, \omega) = \varepsilon_0 \chi_e(\vec{r}, \omega) \vec{E}_f^*(\vec{r}, \omega), \quad \vec{M}_f^*(\vec{r}, \omega) = \mu_0 \chi_m(\vec{r}, \omega) \vec{H}_f^*(\vec{r}, \omega)$$

Im Falle  $\vec{j}_e = 0$  geht der Satz in die Form

$$\operatorname{div} \langle S \rangle = - \frac{\omega_0}{2} \left[ \varepsilon_0 \Im \left\{ \varepsilon(\vec{r}, \omega_0) \right\} \left| \vec{E}_f(\vec{r}, \omega_0) \right|^2 + \mu_0 \Im \left\{ \mu(\vec{r}, \omega_0) \right\} \left| \vec{H}_f(\vec{r}, \omega_0) \right|^2 \right]$$

über.

**Bemerkungen:**

- Lokale Energieverluste/-gewinne (Senken/Quellen von  $\langle S \rangle$ ) hängen mit  $\Im \varepsilon$ ,  $\Im \mu$  zusammen.
- Bereiche mit  $\Im \varepsilon, \Im \mu \rightarrow 0 \rightsquigarrow$  Transparenzgebiete.

### 4.5.3 Dispersive & absorptive Medien - Enge Spektren

Voraussetzungen:

$$\varepsilon(\vec{r}, \omega), \mu(\vec{r}, \omega), \vec{j}(\vec{r}, t) = 0$$

Betrachten Felder mit langsam veränderlichen Amplituden

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \Re \left\{ \vec{E}_0(\vec{r}, t) e^{i\omega_0 t} \right\}$$

mit engen Spektren

$$\vec{E}_0(\vec{r}, t) = \int_{\Delta\omega} \vec{E}_{0f}(\vec{r}, \omega) e^{i\omega t} d\omega \sim \vec{E}_f(\vec{r}, \omega) = \vec{E}_{0f}(\vec{r}, \omega - \omega_0)$$

Dann lautet der Poyntingsche Satz unter Näherungen:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle w(\vec{r}, t) \rangle = -\operatorname{div} \langle \vec{S}(\vec{r}, t) \rangle - \varepsilon_0 \omega_0 \Im \{ \varepsilon(\vec{r}, \omega_0) \} \langle \vec{E}^2(\vec{r}, t) \rangle + \mu_0 \omega_0 \Im \{ \mu(\vec{r}, \omega_0) \} \langle \vec{H}^2(\vec{r}, t) \rangle$$

mit der zeitlich gemittelten Energiedichte

$$\langle w(\vec{r}, t) \rangle = \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{\partial [\omega_0 \Re \{ \varepsilon(\vec{r}, \omega_0) \}]}{\partial \omega_0} \langle \vec{E}^2(\vec{r}, t) \rangle + \frac{\mu_0}{2} \frac{\partial [\omega_0 \Re \{ \mu(\vec{r}, \omega_0) \}]}{\partial \omega_0} \langle \vec{H}^2(\vec{r}, t) \rangle$$

**Bemerke:**

- Im Transparenzgebiet ist

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle w(\vec{r}, t) \rangle = -\operatorname{div} \langle \vec{S}(\vec{r}, t) \rangle$$

- Bei zu vernachlässigender Dispersion ist

$$\langle w(\vec{r}, t) \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \Re \{ \varepsilon(\vec{r}, \omega_0) \} \langle \vec{E}^2(\vec{r}, t) \rangle + \frac{1}{2} \mu_0 \Re \{ \mu(\vec{r}, \omega_0) \} \langle \vec{H}^2(\vec{r}, t) \rangle$$

## 4.6 Der Impulssatz der Elektrodynamik

**Annahme:** Feld und sich bewegende Ladung im Vakuum.

### 4.6.1 Die Kraftdichte

Allgemein gegeben durch

$$\vec{f}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{j}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t)$$

### 4.6.2 Der Maxwellische Spannungstensor

Mit  $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$  und  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$  ist der Maxwellische Spannungstensor des elektromagnetischen Feldes im Vakuum definiert als Tensor 2. Stufe:

$$T_{ij}(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 E_i E_j + \mu_0 H_i H_j - \delta_{ij} w(\vec{r}, t)$$

mit der Energiedichte

$$w(\vec{r}, t) = \frac{\varepsilon_0}{2} \vec{E}^2 + \frac{\mu_0}{2} \vec{H}^2$$

### 4.6.3 Impulsbilanz

Die Impulsdichte des elektromagnetischen Feldes im Vakuum ist gegeben durch

$$\vec{p}_e(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \vec{S}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{H}(\vec{r}, t)$$

Somit Impuls des gesamten Feldes:

$$\vec{P}_e(t) = \int_V \vec{p}_e(\vec{r}, t) dV$$

Bilanz für mechanische Impulsdichte  $\vec{p}_m(\vec{r}, t)$ :

$$\dot{\vec{p}}_m(\vec{r}, t) = \vec{f}(\vec{r}, t)$$

Für den *mechanischen* Impuls  $\vec{P}_m$  der geladenen Teilchen im System gilt somit

$$\frac{d}{dt} \vec{P}_m(t) = \int_V \vec{f}(\vec{r}, t) dV$$

**Lokale Impulsbilanz:**

$$\boxed{\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{S} + \vec{f} = \text{div } \hat{T} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \vec{e}_i \rightarrow \frac{d}{dt} (\vec{p}_e + \vec{p}_m) = \text{div } \hat{T}}$$

**Globale Impulsbilanz:**

$$\boxed{\frac{d}{dt} (\vec{P}_e + \vec{P}_m) = \int_{\partial V} \hat{T} \cdot d\vec{A}}$$

**Bemerkung:**  $\hat{T}$  stellt die (Tensorielle) Impulsstromdichte des elektromagnetischen Feldes dar!

# 5 Elektromagnetische Wellen

## 5.1 Vakuum

**Voraussetzung:** Keine Quelle und Wirbel:  $\vec{j} = \rho = 0$

### 5.1.1 Potentialgleichungen

**Lorenz Eichung:**

$$\text{Lorenz Eichung: } \operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c^2} \Phi(\vec{r}, t) = 0$$

$$\text{Wellengleichungen: } \Delta \Phi(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi(\vec{r}, t) = 0, \quad \Delta \vec{A}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A}(\vec{r}, t) = 0$$

$$\text{Felder: } \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{r}, t) - \operatorname{grad} \Phi(\vec{r}, t), \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r}, t)$$

**Coulomb Eichung:**

$$\text{Coulomb Eichung: } \operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}, t) = 0$$

$$\text{Poisson \& Wellengleichung: } \Delta \Phi(\vec{r}, t) = 0, \quad \Delta \vec{A}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A}(\vec{r}, t) = 0$$

$$\text{Felder: } \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{r}, t), \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r}, t)$$

Einfachste Lösung: Transversale, ebene Wellen:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{a}(\vec{k}) e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}, \quad \operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}, t) = 0 \rightarrow \vec{a} \perp \vec{k}$$

Dispersionsrelation:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}, \quad c : \text{Phasengeschwindigkeit, } \vec{k} : \text{Wellenvektor, } \omega : \text{Kreisfrequenz}$$

Räumliche Periode:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

Zeitliche Periode:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu}, \quad \nu : \text{Frequenz}$$

Somit Variante der Dispersionsrelation:

$$c = \lambda \nu$$

Flächen konstanter Phase:

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = \text{const} \rightarrow \text{Ebenen im Raum } \perp \vec{k}$$

Felder:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = i\omega \vec{A}(\vec{r}, t), \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = i\vec{k} \times \vec{A}(\vec{r}, t) \rightarrow \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}(\vec{r}, t)$$

Somit bilden  $\vec{k}, \vec{E}, \vec{B}$  rechtshändiges Dreibein.

**Verallgemeinerte ebene Wellen:** Senkrecht aufeinander stehende Felder  $\rightarrow$  bilden unabhängige Lösungen  $\rightarrow$  auch ebene Wellen

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \Re \left\{ \sum_{j=1}^2 a_j(\vec{k}) e^{i(\omega t - \vec{k}(\omega) \cdot \vec{r} + \vartheta_j)} \cdot \vec{e}_j \right\}$$

Somit Polarisationszustände: Elliptisch, Linear.

Lösungen stellen Normalmoden dar, die zur Konstruktion beliebiger raum-zeitlich lokalisierter Wellenfelder benutzt werden können!

### 5.1.2 Feldgleichungen

Folgen direkt aus Maxwellgleichungen:

$$\Delta \vec{E}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}(\vec{r}, t) = 0$$

$$\Delta \vec{B}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B}(\vec{r}, t) = 0$$

**Beweis:** Siehe Abschnitt 6.5.1

## 5.2 Transparente, homogene Medien

**Voraussetzungen:**

- Unmagnetisches Medium:  $\mu = 1$
- Transparentes, homogenes Medium:  $\varepsilon(\vec{r}, \omega) = \varepsilon(\omega) \in \mathbb{R}$
- Externe Quellen & Wirbel verschwinden:  $\vec{j}_e = \rho_e = 0$

Ergibt Helmholtz-Gleichung:

$$\Delta \vec{E}_f(\vec{r}, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \vec{E}_f(\vec{r}, \omega) = 0$$

Einfachste Lösungen: Ebene Wellen analog zu Vakuum, nur jetzt im Fourierraum:

$$\vec{E}_f(\vec{r}, \omega) = \vec{e}(\vec{k}, \omega) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

Aus DGL folgt Dispersionsrelation:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega)$$

→ Feld

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \Re \int_{-\infty}^{\infty} \vec{e}(k(\omega)) e^{i(\omega t - k(\omega) \vec{r})} d\omega$$

Betrachten nur enge Frequenzspektren:  $|\vec{e}| \neq 0$  nur im Intervall  $\Delta\omega$  um  $\omega_0$

→ Taylorentwicklung von  $k(\omega)$  und Integration liefert:

- Phasengeschwindigkeit  $v_p(\omega_0) = \frac{\omega_0}{k(\omega_0)}$
- Gruppengeschwindigkeit  $v_g(\omega_0) = \frac{\partial \omega}{\partial k} \Big|_{\omega_0}$
- Dispersion der Gruppengeschwindigkeit  $D(\omega_0) = \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \Big|_{\omega_0}$

## 6 Herleitung der wichtigsten Sätze

### 6.1 Kontinuitätsgleichung

#### 6.1.1 Lokale Ladungserhaltung

Beginnen mit

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \dot{\vec{D}}, \quad \operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

und schreiben

$$0 = \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{div} \vec{j} + \operatorname{div} \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} = \operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{D} = \operatorname{div} \vec{j} + \dot{\rho}$$

also:

$$\operatorname{div} \vec{j} + \dot{\rho} = 0$$

**Bemerkung:** Obere Gleichung gilt für  $\vec{j}_{\text{mak}}, \rho_{\text{mak}}$  aber insbesondere auch für  $\vec{j}_{\text{ges}}, \rho_{\text{ges}}$ .

#### 6.1.2 Globale Ladungserhaltung

Für ein beliebiges die Ladung  $Q$  umschließendes Volumen  $V$  gilt nach obiger Rechnung

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \int_V \dot{\rho} dV = - \int_V \operatorname{div} \vec{j} dV = - \int_{\partial V} \vec{j} \cdot d\vec{A}$$

## 6.2 Energie beim Dirichlet Randwertproblem

### 6.2.1 Bei vorgegebenen Potentialen auf Leitern

Betrachten Leiter  $L_i$  mit den Potentialen  $U_i$  und externe Ladungsverteilung  $\rho(\vec{r})$ . Durch die Greensche Funktion  $G(\vec{r}, \vec{r}')$  erhält man die Geometrie-Koeffizienten  $\Gamma_i(\vec{r})$ , die Kapazitätskoeffizienten  $C_{ij}$  und das Potential

$$\Phi(\vec{r}) = \Phi_\rho(\vec{r}) + \sum_i U_i \cdot \Gamma_i(\vec{r})$$

Die Ladung auf dem Leiter  $L_i$  ist gegeben durch

$$Q_j = -\varepsilon_0 \int_{\partial L_j} \frac{\partial \Phi_\rho(\vec{r})}{\partial \tilde{n}_j} dA + \sum_i U_i C_{ij}$$

und die Energie somit durch

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int_V \Phi(\vec{r}) \rho(\vec{r}) dV + \frac{1}{2} \sum_j U_j Q_j \\ &= \frac{1}{2} \int_V \Phi_\rho(\vec{r}) \rho(\vec{r}) dV + \frac{1}{2} \sum_i U_i \int_V \Gamma_i(\vec{r}) \rho(\vec{r}) dV - \frac{\varepsilon_0}{2} \sum_j U_j \int_{\partial L_j} \frac{\partial \Phi_\rho(\vec{r})}{\partial \tilde{n}_j} dA + \frac{1}{2} \sum_{i,j} U_j U_i C_{ij} \end{aligned}$$

Nebenrechnung:

$$\int_V \Gamma_j(\vec{r}) \rho(\vec{r}) dV = -\varepsilon_0 \int_V \int_{\partial L_j} \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'_j} \rho(\vec{r}') dA' dV \stackrel{\text{Sub: } \vec{r} \leftrightarrow \vec{r}'}{=} -\varepsilon_0 \int_V \int_{\partial L_j} \frac{\partial G(\vec{r}', \vec{r})}{\partial n_j} \rho(\vec{r}') dA dV'$$

$$\stackrel{G \text{ Symmetrisch}}{=} -\varepsilon_0 \int_V \int_{\partial L_j} \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n_j} \rho(\vec{r}') dA dV' = \varepsilon_0 \int_V \int_{\partial L_j} \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial \tilde{n}_j} \rho(\vec{r}') dA dV'$$

$$= \varepsilon_0 \int_{\partial L_j} \frac{\partial}{\partial \tilde{n}_j} \int_V G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') dV' dA = \varepsilon_0 \int_{\partial L_j} \frac{\partial}{\partial \tilde{n}_j} \Phi_\rho(\vec{r}) dA$$

Somit ist

$$W = \frac{1}{2} \int_V \Phi_\rho(\vec{r}) \rho(\vec{r}) dV + \frac{1}{2} \sum_{i,j} U_j U_i C_{ij} \quad \square$$

**Notation:**  $\frac{\partial}{\partial \vec{n}}$  bzw.  $\frac{\partial}{\partial n}$  sind die Normalableitungen aus dem Leiter hinaus bzw. in den Leiter hinein.

## 6.3 Drehmoment im äußeren Magnetfeld

### 6.3.1 Stromdurchflossene Leiterschleife

**Vorgegeben:**

- Konstantes äußeres Magnetfeld  $\vec{B}$
- Geschlossene, parametrisierte Kurve  $\vec{s}(t)$ ,  $\vec{s}: [0, 1] \mapsto S$  (Leiterschleife), in der ein stationärer Strom  $I$  fließt.

**Zu zeigen:**

$$\vec{M} = I \cdot \int_S \vec{s} \times (d\vec{s} \times \vec{B}) \stackrel{\uparrow}{=} \frac{I}{2} \int_S (\vec{s} \times d\vec{s}) \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \vec{m} \times \vec{B}$$

Also zu zeigen:

$$2 \int_S \vec{s} \times (d\vec{s} \times \vec{B}) = \int_S (\vec{s} \times d\vec{s}) \times \vec{B} \Leftrightarrow \vec{J} := \int_S \left\{ 2\vec{s} \times (d\vec{s} \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\vec{s} \times d\vec{s}) \right\} = 0$$

Beginnen also:

$$\begin{aligned} \vec{J} &= \int_S \left\{ 2d\vec{s} \cdot (\vec{s} \cdot \vec{B}) - 2\vec{B} \cdot (\vec{s} \cdot d\vec{s}) + \vec{s} \cdot (\vec{B} \cdot d\vec{s}) - d\vec{s} \cdot (\vec{B} \cdot \vec{s}) \right\} \\ &= \int_0^1 \left\{ \dot{\vec{s}} \cdot (\vec{s} \cdot \vec{B}) - 2\vec{B} \cdot (\vec{s} \cdot \dot{\vec{s}}) + \vec{s} \cdot (\vec{B} \cdot \dot{\vec{s}}) \right\} dt = \int_0^1 \left\{ \frac{d}{dt} [\vec{s} \cdot (\vec{s} \cdot \vec{B})] - \vec{B} \cdot \frac{d}{dt} \vec{s}^2 \right\} dt \\ &= \left[ \vec{s} \cdot (\vec{s} \cdot \vec{B}) - \vec{B} \cdot \vec{s}^2 \right]_0^1 \stackrel{\vec{s}(0) \equiv \vec{s}(1)}{=} 0 \quad \square \end{aligned}$$

## 6.4 Der Poyntingsche Satz

### 6.4.1 Vakuum

Beginnend mit den Maxwell Gleichungen

$$\text{rot } \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \quad , \quad \text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \dot{\vec{D}}$$

unter den Voraussetzungen

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon(\vec{r}) \vec{E} \quad , \quad \vec{B} = \mu_0 \mu(\vec{r}) \vec{H}$$

schreiben wir

$$\begin{aligned} \underbrace{\text{div}(\vec{E} \times \vec{H})}_{\vec{S}} &= \vec{H} \cdot \text{rot } \vec{E} - \vec{E} \cdot \text{rot } \vec{H} = -\vec{H} \cdot \dot{\vec{B}} - \vec{E} \cdot \vec{j} - \vec{E} \cdot \dot{\vec{D}} = -\frac{1}{\mu\mu_0} \vec{B} \cdot \dot{\vec{B}} - \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E} \cdot \dot{\vec{E}} - \vec{j} \cdot \vec{E} \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\left[ \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{2} \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0 \mu} \vec{B}^2 \right]}_{w_e} - \underbrace{\vec{j} \cdot \vec{E}}_{\dot{w}_k} \\ &\rightarrow \frac{\partial}{\partial t} (w_e + w_k) = -\text{div } \vec{S} \end{aligned}$$



wobei  $w_e$  und  $w_k$  jeweils die elektromagnetische und kinetische Energiedichte sind. Wirken keine anderen Kräfte im System, so ist  $w_k$  gleichzeitig die mechanische Energiedichte. Ist  $\text{div } \vec{S} = 0$ , so gilt gesamt-Energieerhaltung. Ferner gilt allgemein für ein Volumen  $V$  die Energiebilanz

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \int_V \frac{\partial}{\partial t} (w_e + w_k) dV = - \int_V \text{div } \vec{S} dV = - \int_{\partial V} \vec{S} d\vec{A}$$

Die Energieänderung in einem System ist also gleich dem Fluss von  $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$  durch die umschließende Oberfläche (nach innen).

## 6.5 Wellengleichung

### 6.5.1 Homogen - Vakuum

Beginnend mit den Maxwell Gleichungen

$$\text{rot } \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \quad , \quad \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \dot{\vec{E}}$$

unter den Voraussetzungen

$$\rho = 0 \quad , \quad \vec{j} = 0$$

schreiben wir

$$\text{grad } \underbrace{\text{div } \vec{E}}_0 - \Delta \vec{E} = \text{rot rot } \vec{E} = -\text{rot } \dot{\vec{B}} = -\frac{\partial}{\partial t} \dot{\vec{B}} = -\frac{\partial}{\partial t} \left[ \underbrace{\mu_0 \vec{j}}_0 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \right]$$

Bekommen so für das  $\vec{E}$ -Feld

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = 0$$

Gehen für das  $\vec{B}$ -Feld analog vor, gemäß

$$\text{rot rot } \vec{B} = \text{grad } \underbrace{\text{div } \vec{B}}_0 - \Delta \vec{B} = \text{rot} \left[ \underbrace{\mu_0 \vec{j}}_0 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \right] = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \dot{\vec{B}} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B}$$

und erhalten

$$\Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B} = 0$$

**Aussage:** Ebene Wellen sind Lösungen:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad , \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad , \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

**Beweis:**

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \Delta E^j \vec{e}_j - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E^j}{\partial t^2} \vec{e}_j = \sum_j E_0^j \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \vec{e}_j - \frac{1}{c^2} \sum_j E_0^j \frac{\partial^2}{\partial t^2} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \vec{e}_j = -k^2 \vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} = 0$$

Analog auch für  $\vec{B}$ .  $\square$

**Aussage:**  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  sind Transversalwellen:

$$\vec{B} \perp \vec{k} \perp \vec{E}$$

**Beweis:**

$$0 = \text{div } \vec{E} = \frac{\partial E^j}{\partial x_j} = E_0^j \frac{\partial}{\partial x_j} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = -i E_0^j k_j e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = -i \vec{k} \cdot \vec{E}$$

$$\rightarrow \vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{E} \perp \vec{k}$$

Analog auch für  $\vec{B}$ .  $\square$

**Aussage:**  $\vec{E}$ -Feld steht senkrecht auf  $\vec{B}$ -Feld:

$$\vec{E} \perp \vec{B}$$

**Beweis:**

$$\begin{aligned} i\omega \vec{B} &= \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = -\text{rot } \vec{E} = -\varepsilon_{ljk} \frac{\partial}{\partial x_l} E^j \vec{e}_k = ik^l \varepsilon_{ljk} E^j \vec{e}_k = i\vec{k} \times \vec{E} \\ \rightarrow \vec{E} \cdot \vec{B} &= \frac{1}{\omega} \cdot \vec{E} \cdot (\vec{k} \times \vec{E}) = 0 \rightarrow \vec{E} \perp \vec{B} \end{aligned}$$

### 6.5.2 Inhomogen - Vakuum

Wegen  $\text{div } \vec{B} = 0$  führen wir das Vektorpotential  $\vec{A}$  ein, so dass gilt:

$$\text{rot } \vec{A} = \vec{B}$$

Aus  $\text{rot } \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$  folgt

$$0 = \text{rot } \vec{E} + \dot{\vec{B}} = \text{rot } \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{A} = \text{rot} \left[ \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right]$$

so dass wir auch ein Potentialfeld  $\varphi$  einführen, mit:

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\text{grad } \Phi \rightarrow \vec{E} = -\text{grad } \Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Verwenden jetzt die inhomogenen Maxwell-Gleichungen und bekommen

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{B} &= \text{rot rot } \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \dot{\vec{E}} = \mu_0 \vec{j} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \text{grad } \Phi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right] \\ \rightarrow \square \vec{A} &= \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j} + \text{grad} \left[ \text{div } \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right] \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{\varepsilon_0} &= \text{div } \vec{E} = -\Delta \Phi - \text{div} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\Delta \Phi - \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\Delta \Phi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t} \left[ \text{div } \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right] \\ \rightarrow \square \Phi &= \Delta \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} - \frac{\partial}{\partial t} \left[ \text{div } \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right] \end{aligned}$$

Es gilt für eine beliebige skalare Funktion  $\Psi$ , dass eine Transformation

$$\vec{A}' := \vec{A} + \text{grad } \Psi, \quad \Phi' := \Phi - \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

das  $\vec{E}$ -Feld und das  $\vec{B}$ -Feld unverändert lässt. Suchen deshalb ein  $\Psi$  so dass

$$\text{div } \vec{A}' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi'}{\partial t} = 0$$

ist. Obere Transformation ist die so genannte *Lorentz Eichung*. Wir erhalten durch die Forderung

$$\text{div } \vec{A}' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi'}{\partial t} = \text{div } \vec{A} + \Delta \Psi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \stackrel{!}{=} 0$$

die DGL

$$\square \Psi = -\text{div } \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

die für alle  $\vec{A}$  und  $\Phi$  stets lösbar ist. Somit ist die Lorentz Transformation stets durchführbar, und wir nennen um:

$$\vec{A}' \rightarrow \vec{A}, \quad \Phi' \rightarrow \Phi$$

so dass wir schließlich die inhomogenen Wellengleichungen

$$\square \Phi(\vec{r}, t) = -\frac{\rho(\vec{r}, t)}{\varepsilon_0}, \quad \square \vec{A}(\vec{r}, t) = -\mu_0 \vec{j}(\vec{r}, t)$$

erhalten.  $\square$

**Aussage:** Die Lösungen obiger Wellengleichung erfüllen die Lorenz-Eichung!

**Beweis:** Beginnen mit

$$\square \vec{A}(\vec{r}, t) = -\mu_0 \vec{j}(\vec{r}, t) \rightarrow \operatorname{div} [\square \vec{A}(\vec{r}, t)] = -\mu_0 \operatorname{div} \vec{j}(\vec{r}, t)$$

$$\square \Phi(\vec{r}, t) = -\frac{\rho(\vec{r}, t)}{\varepsilon_0} \rightarrow \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} [\square \Phi(\vec{r}, t)] = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}, t)$$

und addieren beide Ausdrücke:

$$\square \left[ \operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\vec{r}, t) \right] = -\mu_0 \left[ \operatorname{div} \vec{j}(\vec{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}, t) \right] = 0$$