Zusammenfassung - Analysis 1

Erik Hebestreit

22. Februar 2009

Grundlagen

- Induktion
- geometrische Summenformel: $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, $(q \neq 1)$
- Binomialkoeffizient: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$
- binomischer Satz: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

Vollständigkeit der reellen Zahlen

- Ordnungsvollständigkeit: ein angeordneter Körper K heißt ordnungsvollständig, wenn jede nach $\substack{\textit{oben}\\\textit{unten}}$ beschränkte Menge ein $\substack{\textit{Supremum}\\\textit{Infimum}}$ besitzt (ordnungsvollständig $\Rightarrow$ keine "Lücken" in $\mathbb{R}$)
  - $\substack{\textit{obere}\\\textit{untere}}$ *Schranke* der Menge M: $S \in K$ mit $m \substack{\leq\\\geq} S \ \forall m \in M$
  - $\substack{\textit{Supremum}\\\textit{Infimum}}$ von M: $\substack{\textit{kleinste obere}\\\textit{groesste untere}}$ Schranke mit $S \in M$ ($\exists \varepsilon > 0, m \in M$, sodass $\substack{S-\varepsilon<m\\S+\varepsilon>m}$; ist eindeutig, wenn existent)
  - Hat eine Menge eine obere und eine untere Schranke, so heißt sie *beschränkt*.
- Cauchy-Folgen sind konvergent
- Vollständigkeit von $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^d \Rightarrow$ Vollständigkeit von $\mathbb{R}$

Folgen und Häufungspunkte

- Konvergenz: (x_n) konvergiert gegen den Grenzwert x, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $|x_n - x| < \varepsilon \ \forall n \geq n_\varepsilon$
- Konvergenzkriterien für Folgen:
  - *Sandwich-Satz*: $\exists a_n, b_n, c_n$ und $\exists N \in \mathbb{N}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = c$, $\lim_{n\to\infty} c_n = c$ und $a_n \leq b_n \leq c_n \ \forall n \geq N$, dann gilt auch $\lim_{n\to\infty} b_n = c$

- *Monotoniekriterium*: jede beschränkte und monotone Folge in $\mathbb{R}$ ist konvergent

- Satz von Bolzano-Weierstrass: jede beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ enthält eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$

- Cauchy-Folgen: (x_n) heißt Cauchy-Folge, wenn gilt: $\forall\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $|x_m - x_n| < \varepsilon\ \forall m, n > N$
  - jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge
  - Cauchy-Folgen in $\mathbb{R}$ sind konvergent

Reihen

- Konvergenz: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = c < \infty$ (c heißt Grenzwert von (a_n))

- absolute Konvergenz: $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = c < \infty$
  (absolut konvergente Reihen sind stabil gegen Umordnung)

- Konvergenzkriterien für Reihen:
  - *Nullfolgenkriterium*: a_n muss Nullfolge sein, damit $\sum a_n$ konvergieren kann
  - *Quotientenkriterium*: $q = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| ... \begin{cases} < 1 & \textit{absolut konvergent} \\ = 1 & \textit{keine Aussage} \\ > 1 & \textit{divergent} \end{cases}$
    (Anwendung: Potenzen, Fakultäten, Binomialkoeffizienten)
  - *Wurzelkriterium*: $q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} ... \begin{cases} < 1 & \textit{absolut konvergent} \\ = 1 & \textit{keine Aussage} \\ > 1 & \textit{divergent} \end{cases}$
    (Anwendung: Potenzen mit Exponenten n, n^2, ...)
  - *Leibnitz-Kriterium*: (a_n) ist monoton fallende Nullfolge $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ ist konvergent
    (Anwendung: alternierende Reihen)
  - *Majoranten-/Minorantenkriterium*: $0 \leq |a_n| \leq b_n\ \forall n \geq N$
    $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergiert $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut
    $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergiert $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ divergiert
    (Anwendung: Vergleich mit einfacherer Reihe ist möglich)
  - *Verdichtungskriterium*: (a_n) ist monoton fallende Nullfolge
    die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ haben selbes Konvergenzverhalten
    (Anwendung: eine der beiden ist geometrische Reihe)

- die geometrische Reihe: $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$, $(q \neq 1)$

Stetigkeit

- Grenzwert einer Funktion: c heißt Grenzwert von $f : D \to \mathbb{R}^d$ in x_0, wenn $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ mit $|f(x) - c| < \varepsilon \; \forall x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$
(Notation: $\lim_{x \to x_0} f(x) = c$)
- Stetigkeit in einem Punkt: $f : D \to \mathbb{R}^d$ heißt stetig in x_0, wenn gilt $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$ (beidseitiger Grenzwert ist gleich dem Funktionswert)
- f heißt stetig auf D, wenn f in jedem Punkt von D stetig ist.
Für jedes $x \in D$ gilt: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ mit $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \; \forall x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$
- gleichmäßige Stetigkeit: δ-Umgebung hängt nicht vom gewählten Punkt x_0 ab, sondern nur von ε.
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ so, dass $\forall x, x_0 \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
(*Beispiel*: $x \mapsto x^2$ ist stetig aber nicht gleichmäßig stetig, da δ-Umgebungen für eine feste ε-Umgebung bei größeren x_0 immer kleiner gewählt werden muss; $x \mapsto \sqrt{x}$ ist gleichmäßig stetig, da für eine ε-Umgebung eine δ-Umgebung gefunden werden kann, in die immer alle Werte passen, unabhängig vom gewählten x_0)
- Kompakte Menge: Eine Menge $K \subset \mathbb{R}$ heißt kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.
  - Abgeschlossenheit: $A \subset \mathbb{R}$ ist abgeschlossen, wenn für alle Folgen (a_n) in A der Grenzwert $\lim_{n \to \infty} a_n$ in A liegt. (Menge A hat keine "Lücken" und die Randpunkte gehören ebenfalls zu A)
  - Beschränktheit: Die Menge hat sowohl eine obere, als auch eine untere Schranke.
- Maxima/Minima auf Kompakta: Jede stetige Funktion auf einer kompakten Menge nimmt ein Maximum und ein Minimum an.
- Zwischenwertsatz: Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, so nimmt f jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

Differenzierbarkeit

- Differenzierbarkeit in einem Punkt: $f : U \to \mathbb{R}^d$ ($U \subset \mathbb{R}^k$ ist offen) heißt stetig in $x_0 \in U$, wenn es eine Lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^d$ gibt mit $f(x) = f(x_0) + L(x - x_0) + \varphi_{x_0}(x)$, sodass für den Fehler gilt $\frac{\varphi_{x_0}(x)}{(x - x_0)} \to 0, x \to x_0$. (die Funktion lässt sich in x_0 linear approximieren)
Differentialquotient muss existieren: $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$
- f heißt auf U differenzierbar, wenn f in jedem $x_0 \in U$ differenzierbar ist. $f'(x)$ heißt dann Ableitung von f.
- Satz von Rolle: Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a, b) und ist $f(a) = 0 = f(b)$, so existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

- Mittelwertsatz (Verallgemeinerung des Satz von Rolle): Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a, b), so existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
- Extrema: Ein Extrempunkt ist der größte/kleinste Funktionswert einer Funktion auf einem bestimmten Intervall.
  - Notwendige Bedingung: Hat $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ (differenzierbar) ein lokales Extremum in $\xi \in (a, b)$, so gilt $f'(\xi) = 0$.
  - f muss kein Extremum auf (a, b) haben.
  - $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ kann Extremum in a, oder b haben.

Taylorpolynom

- Taylopolynom (Approximation an $f(x)$ in x_0): $P_{n,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$
- Restglied: $f(x) = P_{n,x_0}(x) + R_{n+1,x_0}(t)$ mit $t(x) \in (x, x_0)$
  - Lagrange-Restglied: $R_{n+1,x_0}(t) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$
  - Landau-Symbolik $(o(x), O(x))$: Abschätzung des Fehlers $f(x)-P_{n,x_0}(x) = O(g(x)), x \to x_0$ mit $\left|\frac{f(x)-P_{n,x_0}(x)}{g(x)}\right| \leq C$ beschränkt (*Beispiel*: $O((x - x_0)^6)$ heißt, der Fehler zws. $f(x)$ und $P_{n,x_0}(x)$ ist von der Ordnung 6) $f(x) - P_{n,x_0}(x) = o(g(x)), x \to x_0$ mit $\lim_{x \to x_0} \left|\frac{f(x)-P_{n,x_0}(x)}{g(x)}\right| = 0$ (der Fehler geht schneller gegen Null als $g(x)$)
- Taylorreihe: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ (Taylorreihe muss nicht konvergieren)

Riemann-Integral

- Ober-/Untersummen: Für $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und die Zerlegung $z = (x_0, \dots, x_n)$ von $[a, b]$ ist die Obersumme von f $O_z(f) := \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) \sup_{x_{i-1}<x<x_i} f(x)$, bzw. die Untersumme von f $U_z(f) := \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) \inf_{x_{i-1}<x<x_i} f(x)$
- Riemann-Integrierbarkeit: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt heißt Riemann-Integrierbar, wenn gilt: $\sup_z U_z(f) = \inf_z O_z(f)$
  $\int_a^b f(x)dx := \sup_z U_z(f) = \inf_z O_z(f)$ heißt das Riemann-Integral von f in$[a, b]$.
  Stetige, monotone und Treppenfunktionen sind Riemann-Integrierbar.
- Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI):
  1. Die Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ ist eine Stammfunktion zur stetigen Funktion f und es ist $F'(x) = f(x)$.
  2. Ist F Stammfunktion von f, so gilt $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$