Wichtige Formeln, Definitionen & Sätze der Funktionentheorie

im SS 2009 bei Prof. Dr. Albin Weber
von Simon Stützer

Stand: 21. Juli 2009

Grundformeln der Funkionentheorie

$$\int\limits_{C_r(z_0)} \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} = 2\pi i, \quad \int\limits_{C_r(z_0)} (z - z_0)^n \mathrm{d}z = 0, \quad \forall n \in \mathbb{C}, N \neq -1$$

Cauchy-Integralformel für Kreise
Sei f holomorph in Ω h d $B_r(z_0) \subset \Omega$ eine geschlossene Kugel in Ω, dann gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\rho(z_0)} \frac{f(w)}{w - z} \mathrm{d}w, \quad \forall z \in B_\rho(z_0), \rho \leq r$$

Cauchy-Integralformel für einfach positiv umlaufende Wege
Sei γ ein geschlossener Weg, der jeden von ihm umschlossenen Punkt einfach positiv umläuft. γ liegt mitsamt seinem Inneren in Ω und f ist dort holomorph, dann gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} \mathrm{d}w$$

$\forall z$ im Inneren von γ.

Potenzreihenentwicklung holomorpher Funktionen
Jede in Ω holomorphe Funktion f ist analytisch in Ω, insbesondere beliebig oft differenzierbar. Der Konvergenzradius der Reihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{um einen Punkt } z_0 \in \Omega$$

ist mindestens $R = \mathrm{dist}(z_0, \partial\Omega)$. Für die Koeffizienten a_n gelten die Cauchy-Formeln

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0}^{n+1} \mathrm{d}z, \quad \forall r : 0 < r < R.$$

Wichtige Reihen

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{z_0}}{n!}(z-z_0)^n$$
$$\sin z := \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$\cos z := \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$
$$\frac{1}{w-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}$$

Definition: Gebiet
Eine offene, zusammenhängende Untermenge $\Omega \subset \mathbb{C}$ heißt Gebiet in $\mathbb{C}$

Definition: Komplexe Funktion
Eine Funktion $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longrightarrow f(z)$ heißt komplexe Funktion,
es ist also $x + iy \xrightarrow{f} u(x,y) + iv(x,y), \quad$ mit $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Definition: Grenzwert
Ist U eine Umgebung von $a \in \mathbb{C}$ und f in $U \backslash \{a\}$ erklärt, so schreibt man

$$\lim_{z \to a} f(z) = b$$

wenn

$$\forall (z_n) \subset U \backslash \{a\} \quad \text{mit} \quad z_n \longrightarrow a \quad \text{gilt: } \lim_{n \to \infty} f(z_n) = b.$$

Satz: über Kombination von Grenzwerten von Funktionen
Aus der Existenz der Grenzwerte $\lim_{z \to a} f(z) = b$ und $\lim_{z \to a} g(z) = c$ folgt

$$\lim_{z \to a} |f(z)| = |b|$$
$$\lim_{z \to a} (\alpha f(z) + \beta g(z)) = \alpha b + \beta c, \quad \text{für } \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$
$$\lim_{z \to a} f(z) \cdot g(z) = b \cdot c$$
$$\lim_{z \to a} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{b}{c} \quad \text{falls } c \neq 0$$

Definition: Stetigkeit
Eine Funktion $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt in $a \in \mathbb{C}$ stetig $\Longleftrightarrow$

$$\forall (z_n) \subset \Omega \text{ mit } z_n \longrightarrow a \text{ gilt: } f(z_n) \longrightarrow f(a).$$

Definition: Differenzierbarkeit
Eine Funktion $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt in $a \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} =: f'(a)$$

existiert.

Satz: über Kombinationen von differenzierbaren Funktionen
Sind $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ an der Stelle $a \in \mathbb{C}$ differenzierbar, so gilt

- f ist in a stetig
- $(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a), \quad$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$
- $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)}{g(a)^2}, \quad$ falls $g(a) \neq 0$
- fals $g : \Omega \to \Omega'$ in a differenzierbar ist und $f : \Omega' \to \mathbb{C}$ in $g(a)$ differenzierbar ist, so gilt $(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$

Definition: holomorphe Funktion
Eine Funktion $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt holomorph, wenn sie in jedem Punkt von Ω stetig komplex differenzierbar ist, d.h. $z \to f'(z)$ ist auf ganz Ω erklärt.

Sind $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph, so sind auch $\alpha f + \beta g$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{C})$, $f \cdot g$ und $\dfrac{f}{g}$ (außerhalb der Nullmenge von g) holomorph.

Satz: über holomorphe Funktionen
Eine komplexe Funktion

$$f : z = x + iy \longrightarrow u(x, y) + iv(x, y)$$

ist genau dann holomorph, wenn u und v als reellwertige Funktionen auf $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ C^1-differenzierbar sind und die Cauchy-Riemannschen-Differentialgleichungen gelten

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Es ist dann

$$f'(x + iy) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x, y).$$

Satz: über konstante holomorphe Funktionen
Eine holomorphe Funktion $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt konstant in Ω, wenn $f'(z) = 0$ überall in Ω ist.

Definition: Stückweise glatte Kurve in $\mathbb{C}$
Ebene C^1-Kurvenstücke werden parametrisiert durch

$$\gamma : t \longrightarrow z(t) = x(t) + iy(t), \quad a \leq t \leq b.$$

Die Länge der Kurve ist dann gegeben durch

$$L(\gamma) = \int\limits_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\mathrm{d}t = \int\limits_a^b |\dot{z}(t)|^2\mathrm{d}t.$$

$\dot{z}(t) = \dot{x}(t) + i\dot{y}(t)$ tritt an die Stelle des Tangentenvektors einer Parametrisierung.

Definition: komplexes Integral
Sei $F(t) = U(t) + iV(t)$ und $U, V \in C[a, b]$ dann definiert man

$$\int_a^b F(t)\mathrm{d}t = \int_a^b U(t)\mathrm{d}t + i\int_a^b V(t)\mathrm{d}t.$$

Sei $F(t) = U(t) + iV(t)$ und $U, V \in C[a, b]$ dann ist

$$\int_a^b \dot{F}(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a) \quad \text{mit } \dot{F}(t) = \dot{U}(t) + i\dot{V}(t).$$

Definition: komplexes Kurvenintegral
Sei $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig und γ ein durch $z : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ gegebenes, orientiertes C^1-Kurvenstück, dann definiert man

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_a^b f(z(t)) \cdot \dot{z}(t)\mathrm{d}t$$

Satz: Integralabschätzung
Ist $|f(z)| \leq M$ auf der Spur von γ, so ist $|\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z| \leq M \cdot L(\gamma)$.

Satz: Zurückführung auf Kurvenintegrale im $\mathbb{R}^2$
Sei $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ stetig in Ω und γ ein Wef in Ω. Dann gilt:

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_\gamma (u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y) + i\int_\gamma (v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y) = \int_\gamma \vec{f}\mathrm{d}\vec{x} + i\int_\gamma \vec{g}\mathrm{d}\vec{x}$$

mit $\vec{f} = (u, -v)$ und $\vec{g} = (v, u)$. Ist f insbesondere holomorph in Ω, so erfüllen beide Vektorfelder die Integrabilitätsbedingung. $\rightarrow \vec{f}, \vec{g}$ sind Gradientenfelder woraus die Wegunabhängigkeit und die Existenz eines Potentials folgt.

Satz: über Stammfunktionen
Sei $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion für die das komplexe Kuevenintegral wegunabhängig ist, d.h.

$$\int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z$$

für je zwei Wege γ_1, γ_2 in Ω mit gleichem Anfangs- und Endpunkt. Wir wählen einen festen Punkt $z_0 \in \Omega$ und setzen

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(z)\mathrm{d}z := \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$$

wobei γ irgendeine Kurve in Ω von z_0 nach z ist. Dann ist F holomorph und eine Stammfunktion für f, d.h. $F'(z) = f(z) \quad \forall z \in \Omega$.

Definition: komplexer Logarithmus (Hauptzweig)
Für $z = r \cdot e^{i\varphi}, \quad r > 0 \quad -\pi < \varphi < \pi$ ist

$$\ln z := \int_1^z \frac{\mathrm{d}w}{w} = \ln r + i\varphi$$

Hauptzweig des Logarithmus und eine Stammfunktion zu $1/z$ mit $\ln(1) = 0$.

Definition: Zweig des Logarithmus
Sei Ω ein einfaches Gebiet mit $0 \notin \Omega$. Eine in Ω holomorphe Funktion F heißt Zweig des Logarithmus, wenn gilt

$$e^{F(z)} = z, \quad z \in \Omega.$$

Satz: Zweig des Logarithmus
Zu einem einfachen Gebiet Ω mit $0 \notin \Omega$ gibt es unendlich viele Zweige des Logarithmus. Sie unterscheiden sich um ganzzahlige Vielfache von $2\pi i$.

Definition: kompakte Konvergenz
Für ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{C}$, stetige Funktionen $f_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, die gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von Ω gegen f streben, $f_n \overset{\text{gleichmäßig}}{\longrightarrow} f$, sagt man: f_n streben gegen f in Ω im Sinne der kompakten Konvergenz.

Satz: über kompakte Konvergenz
Seien f_n stetig, die in Ω gegen f im Sinne der kompakten Konvergenz streben. Dann ist f in Ω stetig und es gilt für jeden Weg γ

$$\int\limits_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \lim_{n \leftarrow \infty} \int\limits_\gamma f_n(z)\mathrm{d}z.$$

Satz: über Potenzreihen
Besitzt f eine Potenzreihendarstellung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n : \quad |z - z_0| < R$$

mit $0 < R < \infty$, so ist f dort beliebig oft komplex differenzierbar und man erhält die Ableitung durch Gliedweise Differentiation.

Definition: analytische Funktion
Eine Funktion $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt analytisch, wenn

$$\forall z_0 \in \Omega \ \exists R > 0 : f \quad \text{in } B_R^\circ(z_0) \quad \text{als Potenzreihe darstellbar mit} \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

Satz: Identitätssatz für analytische Funktion
Seien f, g analytische Funktionen auf dem Gebiet Ω und $f(z_n) = g(z_n)$ für eine bestimmte Folge

$$(z_n) \subset \Omega \longrightarrow z_0 \in \Omega, \ z_n \neq z_0$$

dann ist $f \equiv g$.

Satz: Cauchyscher Integralsatz
Sei f holomorph in einem einfachen Gebiet Ω, dann gilt

$$\int\limits_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$$

für jeden geschlossenen Weg γ in Ω.

Satz: Homologiesatz
Sei $\Omega \backslash \{z_0\}$ ein gelochtes Gebiet in dem f holomorph ist und γ die Stelle z_0 einfach positiv umläuft. Dann ist

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z = \int\limits_{C_r(z_0)} f(z)\mathrm{d}z$$

falls das Innere von γ und $C_r(z_0)$ in Ω sind.

Definition: Homologe Wege
Zwei geschlossene Wege γ_1, γ_2 heißen homolog $\Leftrightarrow$

$$\int\limits_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z = \int\limits_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z \quad \forall f \in C^1(\Omega)$$

.

Satz: Identitätssatz für holomorphe Funktionen
Stimme zwei in einem Gebiet Ω holomorphe Funktionen f, g in einem in Ω gelgegnen Kurvenstück überein, so stimmen sie auf ganz Ω überein.

Definition: ganze Funktion
Eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion heißt ganze Funktion. Sie besitzt eine überall konvergente Reihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad z \in \mathbb{C} \rightarrow \text{Konvergenzradius } R = \infty.$$

Satz: über Abschätzung der Koeffizienten einer Potenzreihe
Sei

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{für } |z - z_0| < R$$

setzt man

$$M(f, r) := \max\{|f(z)| : |z - z_0| = r\} \quad \text{für } 0 < r < R$$

dann gilt

$$|a_n| \leq \frac{M(f, r)}{r^n}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Satz: Satz von Liouville
Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.

Satz: Fundamentalsatz der Algebra
Jedes nichtkonstante Polynom mit komplexen Koeffizienten besitzt wenigstens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$. Daraus folgt unmittelbar der Fundamentalsatz der Algebra.

Satz: Satz von Morera
Ist $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig und gilt $\int\limits_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z = 0$ für jeden geschlossenen, einfach gelagerten Weg γ in Ω, so ist holomorph in Ω.

Definition: isolierte Singularität
Ist f holomorph und $D(f) = \Omega\backslash\{z_0\}$, so heißt z_0 isolierte Singularität von f.

- z_0 heißt hebbare Singularität $\Leftrightarrow$ eine holomorphe Funktion g in einer Kugel $B_\epsilon(z_0)\backslash\{z_0\}$ existiert und
$$f(z) = g(z) \quad \text{in } B_\epsilon(z_0)\backslash\{z_0\} \quad \forall z$$
- z_0 heißt Polstelle, wenn gilt
$$\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$$
- z_0 heißt wesentliche Singularität, falls sie weder Polstelle noch hebbare Singularität ist.

Definition: Laurent-Reihe
Eine Reihe der Form
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$
heißt Laurent-Reihe. Sie konvergiert, wenn
$$r := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{und} \quad h := \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}$$
konvergent sind. Dann ist $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = h(z) + r(z)$, wobei $h(z)$ singulärer oder Hauptteil und $r(z)$ regulärer oder Nebenteil heißt.

Satz: über den singulären Teil einer Laurent-Reihe
Betrachtet man den singulären Teil einer Laurent-Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$ dann gilt

- Ist die Reihe konvergent für $z = z_1$, so ist sie absolut konvergen $\forall z : |z - z_0| > |z_1 - z_0|$
- Ist die Reihe divergent für $z = z_2$, so ist sie divergent $\forall z : |z - z_0| < |z_2 - z_0|$

Folgerung:
Ist der Hauptteil einer Laurent-Reihe konvergent für z_1, der Nebenteil konvergent für z_2, so ist die Laurent-Reihe konvergent im Ringgebiet
$$\rho := |z_1 - z_0| < |z - z_0| < |z_2 - z_0| =: R.$$

Satz: über gleichmäßige Konvergenz der Laurent-Reihe
Ist die Laurent-Reihe $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n =: f(z)$ konvergent für
$$\rho := |z_1 - z_0| < |z - z_0| < |z_2 - z_0| =: R \quad \text{mit} \quad 0 \leq \rho < R \leq \infty$$
so ist sie gleichmäßig konvergent für
$$\rho + \varepsilon \leq |z - z_0| \leq r, \quad \varepsilon > 0, \quad r < R \quad \text{(kompakter Kreisring).}$$
Insbesondere ist dann f in diesem Kreisring holomorph und es gilt
$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}w \quad \rho < r < R.$$

Satz: Identitätssatz für Laurent-Reihe
Sei $\rho := |z_1 - z_0|$ und $R := |z_2 - z_0|$. Gilt

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$$

für $\rho < |z - z_0| < R$, so gilt $a_n = b_n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$.

Satz: über Laurent-Reihe-Entwickelbarkeit
Sei f holomorph in jedem Ringgebiet $G := \{z \in \mathbb{C} : \rho < |z - z_0| < R\}$ mit $0 \leq \rho < R \leq \infty$. Dann besitzt f eine Reihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

und ist in jeder kompakten Teilmenge von G gleichmäßig konvergent. Dabei folgt durch die Cauchy.Integralformel

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}w \quad \text{für } \rho < r < R.$$

Somit ist f durch eine Laurent-Reihe dargestellt.

Satz: über Abschätzung der Koeffizienten einer Laurent-Reihe
Die Funktion f besitzt die Laurent-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

und es sei

$$M(f, r) := \max\{f(z) : |z - z_0| = r\} \quad \rho < r < R$$

dann gilt

$$|a_n| \leq \frac{M(f, r)}{r^n} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Satz: Satz von Riemann
Ist f holomorph undbeschränkt für $\rho < |z - z_0| < R$, so ist z_0 eine hebbare Singularität von f.

Satz: Charakterisierung von Polstellen
Die für $0 < |z - z_0| < R$ holomorphe Funktion f hat genau dann einen Pol in z_0, wenn ihre Laurent-Reihe die Form

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (m \in \mathbb{N}, a_{-m} \neq 0)$$

hat, d.h. der Hauptteil besteht aus endlich vielen Gliedern. m heißt dann Ordnung der Polstelle.

Satz: Kriterium für Polstellen
Eine isolierte Singularität z_0 von f heißt Pol m-ter Ordnung $\Leftrightarrow\ \exists\, b = \lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z) \neq 0$
Sei g holomorph in einer Umgebung um z_0 und z_0 eine Nullstelle m-ter Ordnung von g, so hat $1/g$ in z_0 eine Polstelle m-ter Ordnung

Definition: ganz-transzentente Funktion
Eine Funktion f heißt ganz-transzendent, wenn f ganz und kein Polynom ist.

Satz: Satz von Casorati-Weierstraß
Sei f holomorph in $0 < |z - z_=0| < R$ und z_0 eine wesentliche Singularität von f, so gilt

- $\forall a \in \mathbb{C}: \; \exists (z_n): \; z_n \longrightarrow z_0 \wedge f(z_n) \longrightarrow a$
- $\exists (w_n): \; w_n \longrightarrow z_0 \wedge |f(w_n)| \longrightarrow \infty$

Satz: Satz von Casorati-Weierstraß für ganz-transzendente Funktionen
Für eine ganz-transzendente Funktion gilt

- $\forall a \in \mathbb{C}: \; \exists (z_n) : |z_n| \longrightarrow \infty \wedge f(z_n) \longrightarrow a$
- $\exists (w_n) : |w_n| \longrightarrow \infty \wedge |f(w_n)| \longrightarrow \infty$

Satz: Satz von Picard
Besitzt f in z_0 eine wesentliche Singularität, so existiert ein $a \in \mathbb{C}$, so dass f in jeder Umgebung von z_0 alle Werte von $\mathbb{C}\backslash\{a\}$ annimmt.

Definition: Resiuduum
Sei f holomorph in $\Omega\backslash\{z_0\}$ und z_0 eine isolierte Singularität von f, dann ist

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{für } 0 < |z - z_0|, R > 0.$$

Der Koeffizient a_{-1} heißt Resiuduum von f an der Stelle z_0 und wird mit $\mathrm{Res}(f, z_0)$ bezeichnet. Es gilt:

$$\mathrm{Res}(f, z_0) := a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_r(z_0)} f(z)\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z$$

für $0 < r < R$ und jeden geschlossenen Weg γ, der z_0 einfach positiv umläuft und mitsamt seinem Inneren in Ω liegt.

Satz: Resiuensatz
Sei f holomorph in γ mit Ausnahme der isolierten Singularitäten. Trifft der geschlossene Weg γ in Ω auf keine Singularität, so gilt

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Res}(f, z_k).$$