



seit 1558

Friedrich-Schiller-Universität Jena

Physikalisch-Astronomische Fakultät

SS 2008

Grundkonzepte der Optik

Eine Zusammenfassung

Erstellt von: Christian Vetter (89114) Erstellt am: 7. Juni 2008
Christian.Vetter@Uni- letzte Änderung: 14. Oktober 2008
Jena.de

wichtiger Hinweis:

Bei dem vorliegenden Dokument handelt es sich um eine an die Vorlesung angelehnte, studentische Arbeit. Sie wurde weder von offizieller Stelle kontrolliert, noch stellt sie einen Anspruch an Vollständigkeit.

Inhaltsverzeichnis

0	Einleitung	3
0.1	Was ist Licht?	3
0.2	Einteilung der Optik	3
1	Strahlenoptik	4
1.1	Die Postulate der Strahlenoptik	4
1.2	Die Strahlgleichung	4
1.3	Die Eikonalgleichung	5
1.4	Matrixoptik	5
2	Optische Felder in dispersiven und isotropen Medien	7
2.1	Die Maxwellgleichungen	7
2.1.1	Zeitverhalten der Felder	7
2.1.2	Die Maxwellgleichungen im FourierRaum	8
2.1.3	Die Wellengleichung	8
2.2	Beschreibung der Medien	8
2.2.1	Begriffsdefinitionen	9
2.2.2	Folgerungen für Polarisierung	9
2.2.3	Folgerungen für Strom	10
2.2.4	Die dielektrische Funktion	10
2.2.5	Die Leitfähigkeit	11
2.2.6	Weitere Folgerungen	12
2.2.7	Materialgleichungen im Zeitbereich	14
2.3	Energiestromdichte und Energiebilanz	15
2.3.1	Der zeitlich gemittelte Poyntingvektor	15
2.3.2	Die zeitlich gemittelte Energiebilanz	15
2.4	Die Kramers-Kronigsche Dispersionsrelation	16
2.5	Normalmoden im homogenen isotropen Medium	18
2.5.1	Longitudinale Wellen	19
2.5.2	Transversale Wellen	19
2.6	Gebündelte Wellenfelder und Impulse	20
2.6.1	Definitionen	20
2.6.2	Ausbreitung gebündelter Wellenfelder im homogenen Raum	21
2.6.3	Ausbreitung eines Gauß-Bündels	24
2.6.4	Gaußsche Moden in einem Resonator	25
2.6.5	Ausbreitung von Impulsen	27
3	Beugungstheorie	28
4	Fourieroptik & Optische Filterung	29
5	Polarisation elektromagnetischer Wellen	30

0 Einleitung

0.1 Was ist Licht?

- Vektorielle Elektromagnetische Welle
- Amplitude und Phase sind komplex!
- $c \approx 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$

Spektrum

Art	λ [nm]	f [Hz]	E [eV]
Radio	$> 10^8$	$< 3 \cdot 10^9$	$< 10^{-5}$
Mikrowellen	$10^8 - 10^5$	$3 \cdot 10^9 - 3 \cdot 10^{12}$	$10^{-5} - 0,01$
InfraRot	$10^5 - 700$	$3 \cdot 10^{12} - 4,3 \cdot 10^{14}$	$0,01 - 2$
Sichtbar	$700 - 400$	$4,3 \cdot 10^{14} - 7,5 \cdot 10^{14}$	$2 - 3$
UltraViolett	$400 - 1$	$7,5 \cdot 10^{14} - 3 \cdot 10^{17}$	$3 - 10^3$
Röntgen	$1 - 0,01$	$3 \cdot 10^{17} - 3 \cdot 10^{19}$	$10^3 - 10^5$
GammaStrahlun	$< 0,01$	$> 3 \cdot 10^{19}$	$> 10^5$

0.2 Einteilung der Optik

Strahlenoptik ($\lambda \ll$ Objektgröße)

Erscheinungen: Stärke und Richtung des Lichts
Erklärt: Alltägliche Phänomene

Wellenoptik ($\lambda \approx$ Objektgröße)

Erscheinungen: Stärke, Richtung, Phase, Kohärenz
Erklärt: Interferenz, Beugung, Dispersion, Kohärenz

Elektromagnetische Optik

Erscheinungen: Stärke, Richtung, Phase, Kohärenz, Polarisierung
Erklärt: Reflexion, Transmission, geführte Wellen, Resonatoren

Quantenoptik

Erscheinungen: Stärke, Richtung, Phase, Kohärenz, Polarisierung, Teilchencharakter
Erklärt: Erscheinungen bei kleinen Photonenzahlen, Fluktuationen, exakte Wechselwirkung mit Materie

1 Strahlenoptik

1.1 Die Postulate der Strahlenoptik

- a) Licht breitet sich in Strahlen aus.
- b) Das optische Medium wird durch $n(\vec{r})$, den Brechungsindex charakterisiert.
 $n = \frac{c}{c_n}$ c_n : Lichtgeschwindigkeit im Medium
- c) Die optische Weglänge ist definiert:
 Im homogenen Medium: $L = n \cdot d$
 Im inhomogenen Medium: $L = \int_A^B n(\vec{r}) ds$
- d) Das Fermatsche Prinzip lautet:

$$\delta \int_A^B n(\vec{r}) ds = 0$$

1.2 Die Strahlgleichung

Die Herleitung geschieht über das Fermatschen Prinzip

$$L = \int_A^B n(\vec{r}(s)) ds$$

$$L = \int_A^B n ds \quad \text{Variation des Weges}$$

$$\delta L = \delta \int_A^B n ds \quad \text{Mit Produktregel folgt}$$

$$\delta L = \int_A^B (\delta n) ds + n(\delta ds)$$

$$\delta L = \int_A^B \left(\mathbf{grad} n \cdot \delta \vec{r} + n \frac{dr}{ds} \frac{d\delta \vec{r}}{ds} \right) ds$$

$$\delta L = \int_A^B \left(\mathbf{grad} n - \frac{d}{ds} \left(n \frac{dr}{ds} \right) \right) \delta r ds = 0$$

Es folgt:

$$\mathbf{grad} n = \frac{d}{ds} \left(n \frac{dr}{ds} \right)$$

1.3 Die Eikonalgleichung

Diese Gleichung stellt die Brücke zwischen geometrischer- und Wellenoptik dar.
An dieser Stelle zunächst keine Herleitung!

$S(\vec{r}) = \text{const.}$ ist eine Normalenfläche zur Ausbreitungsrichtung.
Es folgt:

$$[\mathbf{grad} S(\vec{r})]^2 = [n(\vec{r})]^2$$

Weiterhin gilt:

$$S(\vec{r}_B) - S(\vec{r}_A) = \int_A^B |\mathbf{grad} S(\vec{r})| ds = \int_A^B n(\vec{r}) ds$$

\Rightarrow Optische Weglänge $\hat{=}$ Phase der Welle

1.4 Matrixoptik

Ermöglicht das Berechnen aufeinander folgender Bauelemente mit einfachen Matrixmultiplikationen!

Allgemeine Form:

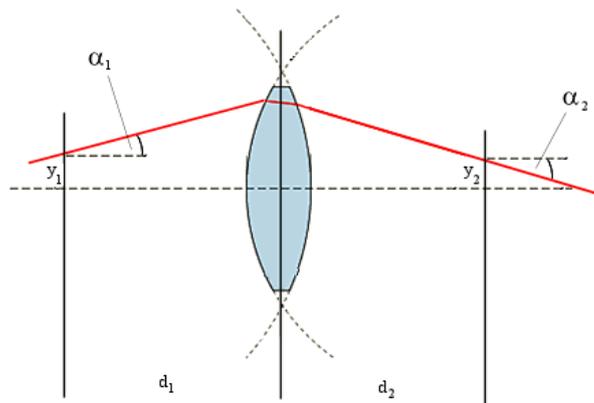
$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

Typische Matrizen:

- | | |
|------------------------------------|--|
| a) Freiraum | $M = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ |
| b) Brechung an ebener Fläche | $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$ |
| c) Brechung an dünner Linse | $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}$ |
| d) Reflexion am ebenen Spiegel | $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ |
| e) Reflexion am spärischen Spiegel | $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix}$ |

Achtung: Die Matrizen sind gegen die Strahlrichtung zu multiplizieren

Beispiel



$$M = \begin{bmatrix} 1 & d_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = M \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{d_2}{f} & \frac{d_1 \cdot (f - d_2)}{f} + d_2 \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{d_1}{f} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{bmatrix}$$

Möchte man nun Beispielsweise die Abbildungsgleichung des Systems ermitteln, setzt man den B-Eintrag der Matrix Null.

$$\frac{d_1 \cdot (f - d_2)}{f} + d_2 = 0$$

$$d_1 f - d_1 d_2 + d_2 f = 0$$

$$f(d_1 + d_2) = d_1 d_2$$

$$f = \frac{d_1 d_2}{d_1 + d_2}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2}$$

2 Optische Felder in dispersiven und isotropen Medien

2.1 Die Maxwellgleichungen

Den Ausgangspunkt der folgenden Herleitungen stellen die Maxwellgleichungen in ihrer allgemeinsten Form dar:

$$\mathbf{rot} \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (\text{I})$$

$$\mathbf{rot} \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{j}_{\text{makr}}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \vec{D}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (\text{II})$$

$$\mathbf{div} \vec{D}(\vec{r}, t) = \rho_{\text{ext}}(\vec{r}, t) \quad (\text{III})$$

$$\mathbf{div} \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \quad (\text{IV})$$

mit den, den Materialeinfluss beschreibenden Größen:

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{P}(\vec{r}, t)$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \left[\vec{B}(\vec{r}, t) - \vec{M}(\vec{r}, t) \right]$$

Für optische Medien können die folgenden Annahmen getroffen werden:

$$\vec{M}(\vec{r}, t) = 0$$

$$\vec{j}_{\text{makr}}(\vec{r}, t) = \vec{j}_{\text{cond}}(\vec{r}, t) + \vec{j}_{\text{conv}}(\vec{r}, t)$$

$$\vec{j}_{\text{cond}}(\vec{r}, t) = f(E)$$

$$\vec{j}_{\text{conv}}(\vec{r}, t) = \rho_{\text{ext}}(\vec{r}, t) \vec{v} = 0$$

Dies führt uns zu den Maxwellgleichungen der Optik

$$\mathbf{rot} \vec{E}(\vec{r}, t) = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (\text{I})$$

$$\mathbf{rot} \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{j}_{\text{cond}}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \vec{P}(\vec{r}, t)}{\partial t} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (\text{II})$$

$$\epsilon_0 \mathbf{div} \vec{E}(\vec{r}, t) = -\mathbf{div} \vec{P}(\vec{r}, t) \quad (\text{III})$$

$$\mathbf{div} \vec{H}(\vec{r}, t) = 0 \quad (\text{IV})$$

2.1.1 Zeitverhalten der Felder

a) **Monochromatische Welle** \Rightarrow statische Felder

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t}$$

b) **Polychromatische Wellen** \Rightarrow nichtstatische Felder

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

$$\vec{E}(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(\vec{r}, t) e^{i\omega t} dt$$

2.1.2 Die Maxwellgleichungen im FourierRaum

Betrachtet man zunächst

$$\frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} (-i\omega) \vec{E}(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

so kann man feststellen, dass $\frac{\partial}{\partial t}$ mit Fouriertransformation in $(-i\omega)$ übergeht.

Beachtet man dies und setzt die Polychromatischen Wellen in die Maxwellgleichungen der Optik ein, so folgt:

$$\mathbf{rot} \vec{E}(\vec{r}, \omega) = i\omega\mu_0 \vec{H}(\vec{r}, \omega) \quad (\text{I})$$

$$\mathbf{rot} \vec{H}(\vec{r}, \omega) = \vec{j}(\vec{r}, \omega) - i\omega \vec{P}(\vec{r}, \omega) - i\omega\epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, \omega) \quad (\text{II})$$

$$\epsilon_0 \mathbf{div} \vec{E}(\vec{r}, \omega) = -\mathbf{div} \vec{P}(\vec{r}, \omega) \quad (\text{III})$$

$$\mathbf{div} \vec{H}(\vec{r}, \omega) = 0 \quad (\text{IV})$$

2.1.3 Die Wellengleichung

Wirft man auf Gleichung I der Maxwellgleichungen der Optik einmal die Rotation, folgt

a) **Im Zeitraum**

$$\mathbf{rot} \mathbf{rot} \vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{j}(\vec{r}, t)}{\partial t} - \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}(\vec{r}, t)}{\partial t^2}$$

b) **Im Frequenzraum**

$$\mathbf{rot} \mathbf{rot} \vec{E}(\vec{r}, \omega) - \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}(\vec{r}, \omega) = \mu_0 \omega \vec{j}(\vec{r}, \omega) + \mu_0 \omega^2 \vec{P}(\vec{r}, \omega)$$

Im statischen Fall kann dieses Problem vollständig im Fourierraum gelöst werden!

2.2 Beschreibung der Medien

Zu beachten ist, dass die Bestimmung von $\vec{P}(\vec{E})$ und $\vec{j}(\vec{E})$ in der Regel sehr kompliziert ist. Hier wird nur das „einfache“ Drudemodell zur Beschreibung der Ladungsträger behandelt!

- **Freie Ladungsträger**

Metalle / angeregte Halbleiter (Intrabandeffekte)

- **Gebundene Ladungsträger**

Dielektrika / Halbleiter (Interbandeffekte)

$$\vec{E}(\vec{r}, t) \rightarrow \text{Responsfunktion} \quad \rightarrow \vec{P}(\vec{r}, t)$$

$$\vec{E}(\vec{r}, \omega) \rightarrow \text{Übertragungsfunktion} \quad \rightarrow \vec{P}(\vec{r}, \omega)$$

2.2.1 Begriffsdefinitionen

- **linear:**

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 R(\vec{r}, t) \otimes \vec{E}(\vec{r}, t)$$

$$\vec{P}(\vec{r}, \omega) = \varepsilon_0 \chi(\vec{r}, \omega) \oplus \vec{E}(\vec{r}, \omega)$$

$$\chi(\vec{r}, \omega) \overset{FT}{\leftrightarrow} R(\vec{r}, t)$$

- **dispersiv:** = nicht instantan

$$\Rightarrow \vec{P}(\vec{r}, t) = f[\vec{E}(\vec{r}, t, t')]$$

- **homogen:**

$\chi(\omega)$ und $R(t)$ nicht Ortsabhängig

- **isotrop:**

nicht Richtungsabhängig

- **lokal:**

Polarisation nur von den Feldeigenschaften am beobachteten Punkt abhängig.

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = f[\vec{E}(\vec{r}, t)] \text{ und nicht } f[\vec{E}(\vec{r}, \vec{r}', t, t')]$$

2.2.2 Folgerungen für Polarisation

Setzt man $\vec{P}(\vec{r}, \omega)$ in die Wellengleichung ein folgt:

a) linear, homogen, isotrop, nichtdispersiv

$$\Delta \vec{E}(\vec{r}, t) - \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}(\vec{r}, t) = 0$$

Unphysikalisch da es keine nichtdispersiven Medien gibt
Anwendung nur für kleine Frequenzbereiche!

b) linear, homogen, isotrop, dispersiv

Helmholtzgleichung

$$\Delta \vec{E}(\vec{r}, \omega) - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \vec{E}(\vec{r}, \omega) = 0$$

→ Response ist Frequenzabhängig

c) linear, inhomogen, isotrop, dispersiv → $\chi(\vec{r}, \omega)$

$$\Delta \vec{E}(\vec{r}, \omega) - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \vec{E}(\vec{r}, \omega) = -\mathbf{grad} \left\{ \frac{\mathbf{grad} \varepsilon(\vec{r}, \omega)}{\varepsilon(\vec{r}, \omega)} \vec{E}(\vec{r}, \omega) \right\}$$

→ Kopplung der Feldkomponenten

d) nichtlinear, homogen, isotrop, dispersiv → $\chi(\omega, \vec{E})$

$$\vec{P}(\vec{r}, \omega) = \varepsilon_0 \chi(\vec{r}, \omega) \vec{E}(\vec{r}, \omega) + \vec{P}_{NL}(\vec{E})$$

→ tritt bei hohen Intensitäten auf

2.2.3 Folgerungen für Strom

a) Gebundene Elektronen oder Phononen (Dielektrika, Halbleiter)

- **Phononen**

Tragen zu opt. Eigenschaften bei
nur transversale Komponenten koppeln mit Licht
nahe Resonanz entstehen schwingende Dipole → Überlagerung mit einfallendem Feld

- **Elektronenübergänge**

Vielteilchenproblem (Schwingung gebundener Elektronen)

$$\omega_{0Ion} \ll \omega_{0Elektron}$$

b) Freie Elektronen (Metalle, angeregte Halbleiter)

- Modell des freien Elektronengases

2.2.4 Die dielektrische Funktion

Ausgangspunkt der Herleitung ist, dass nach Drude-Modell Teilchen (Elektronen, Ionen) durch $\vec{E}(\vec{r}, t)$ ausgelenkt werden. Es folgt eine Verschiebung $\vec{s}(\vec{r}, t)$.
Machen wir den Ansatz eines getriebenen, gedämpften Oszillators:

$$\ddot{\vec{s}}(\vec{r}, t) + g\dot{\vec{s}}(\vec{r}, t) + \omega_0^2\vec{s}(\vec{r}, t) = -\frac{e}{m}\vec{E}(\vec{r}, t)$$

Es gilt weiter:

$$\begin{aligned}\vec{p}(\vec{r}, t) &= -e\vec{s}(\vec{r}, t) \\ \vec{P}(\vec{r}, t) &= N\vec{p}(\vec{r}, t) \\ f &= \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{e^2 N}{m}\end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\ddot{\vec{P}}(\vec{r}, t) + g\dot{\vec{P}}(\vec{r}, t) + \omega_0^2\vec{P}(\vec{r}, t) = \frac{e^2 N}{m}\vec{E}(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 f \vec{E}(\vec{r}, t)$$

Durch Fourier-Transformation kann man die Lösung direkt hinschreiben:

$$\vec{P}(\vec{r}, \omega) = \frac{\varepsilon_0 f}{(\omega_0^2 - \omega^2) - ig\omega} \vec{E}(\vec{r}, \omega)$$

Im Fall mehrerer Oszillatoren folgt:

$$\begin{aligned} \vec{P}(\vec{r}, \omega) &= \varepsilon_0 \sum_j \left\{ \frac{\varepsilon_0 f_j}{(\omega_{0j}^2 - \omega^2) - ig_j \omega} \right\} \vec{E}(\vec{r}, \omega) = \varepsilon_0 \chi(\omega) \vec{E}(\vec{r}, \omega) \\ \chi(\omega) &= \sum_j \left\{ \frac{\varepsilon_0 f_j}{(\omega_{0j}^2 - \omega^2) - ig_j \omega} \right\} = \chi_{Phonon}(\omega) + \chi_{Elektron}(\omega) \\ \Rightarrow \vec{D}(\vec{r}, \omega) &= (1 + \chi(\omega)) \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, \omega) = \varepsilon_0 \varepsilon(\omega) \vec{E}(\vec{r}, \omega) \end{aligned}$$

ε ist hierbei die komplexe dielektrische Funktion.

2.2.5 Die Leitfähigkeit

Eine vollkommen analoge Betrachtung lässt sich für den Strom machen. Dabei wird ein wechselwirkungsfreies Elektronengas betrachtet. ($\omega_o = 0$)

$$\vec{s}(\vec{r}, t) + g\vec{s}(\vec{r}, t) = -\frac{e}{m} \vec{E}(\vec{r}, t)$$

Es gilt weiter:

$$\begin{aligned} m &= m_{eff} \neq m_e \\ \vec{j}(\vec{r}, t) &= -Ne\vec{s}(\vec{r}, t) \\ \omega_p^2 &= f = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{e^2 N}{m} \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\vec{j}(\vec{r}, t) + g\vec{j}(\vec{r}, t) = \frac{e^2 N}{m} \vec{E}(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 f \vec{E}(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 \omega_p^2 \vec{E}(\vec{r}, t)$$

Durch Fourier-Transformation und umstellen folgt:

$$\begin{aligned} \vec{j}(\vec{r}, \omega) &= \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{g - i\omega} \vec{E}(\vec{r}, \omega) = \sigma(\omega) \vec{E}(\vec{r}, \omega) \\ \sigma(\omega) &= \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{g - i\omega} = -i \frac{\varepsilon_0 \omega \omega_p^2}{-\omega^2 - ig\omega} \end{aligned}$$

$\sigma(\omega)$ ist dabei die komplexe Leitfähigkeit.

Bemerkung: Die Plasmafrequenz ω_p^2 ist die Eigenfrequenz der im eigenen Feld schwingenden Ladungswolke!

2.2.6 Weitere Folgerungen

Setzt man die soeben gewonnen Terme in die Wellengleichung ein, so folgt:

$$\mathbf{rot\,rot}\, \vec{E}(\vec{r}, \omega) = \frac{\omega^2}{c^2} \left\{ 1 + \chi(\omega) + \frac{i}{\omega \varepsilon_0} \sigma(\omega) \right\} \vec{E}(\vec{r}, \omega) = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \vec{E}(\vec{r}, \omega)$$

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \chi(\omega) + \frac{i}{\omega \varepsilon_0} \sigma(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega)$$

Das bedeutet, dass die komplexe dielektrische Funktion $\varepsilon(\omega)$ die Beiträge des Vakuums, der Gitterschwingungen und der freien Elektronen enthält.

Weiterhin ist stets eine Zerlegung in Real- und Imaginärteil möglich was je nach Anwendung interpretiert werden muss.

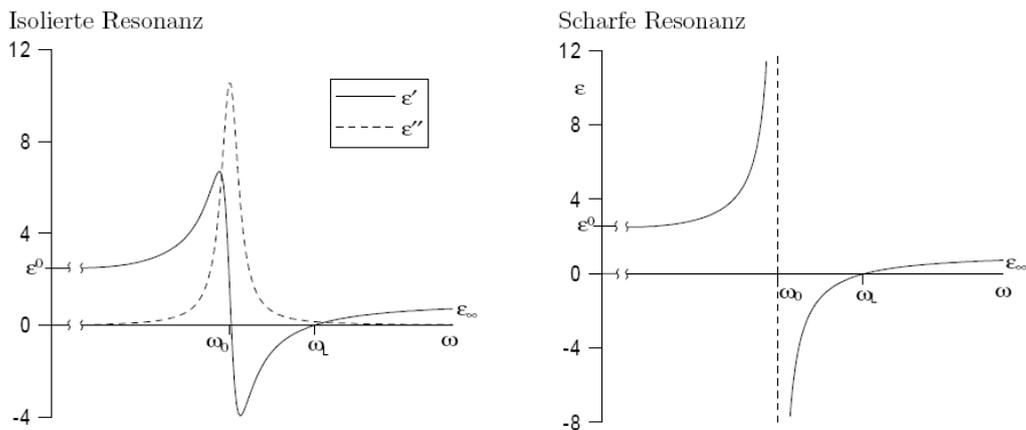
a) Dielektrika in der Nähe einer Gitterresonanz

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_\infty + \frac{f}{(\omega_0^2 - \omega^2) - ig\omega}$$

$$\varepsilon'(\omega) = \varepsilon_\infty + \frac{f(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + g^2\omega^2}$$

$$\varepsilon''(\omega) = \frac{gf\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + g^2\omega^2}$$

Dabei sind ω_0 Lage, g Breite und f Stärke der Resonanz.



Aus dem Ergebnis lassen sich folgende Schlüsse ziehen:

- Für sogenannte longitudinale Frequenzen $\omega = \omega_L$ wird $\varepsilon'(\omega_L)=0$ wobei $\varepsilon''(\omega_L) \neq 0$ ist. \Rightarrow Absorption und Dispersion treten immer gemeinsam auf!
- Normale Dispersion gibt es für $\frac{\partial \varepsilon'(\omega)}{\partial \omega} > 0$
- Anormale Dispersion für $\frac{\partial \varepsilon'(\omega)}{\partial \omega} < 0$
- Für scharfe Resonanzen mit $g \rightarrow 0$ kann man einen Zusammenhang zwischen ω_0 und ω_L finden. Die Lyddane-Sachs-Teller Relation:

$$\omega_L = \omega_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_\infty}}$$

b) Dielektrische Medien im sichtbaren Spektralbereich

Wird in der Regel mit einem sogenannten Doppelresonanzmodell beschrieben. Dabei wird eine Gitterschwingung im IR und ein elektronischer „Übergang“ berücksichtigt. Es folgt:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_\infty + \frac{f_G}{(\omega_{0G}^2 - \omega^2) - ig_G\omega} + \frac{f_e}{(\omega_{0e}^2 - \omega^2) - ig_e\omega}$$

c) Halbleiter

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_\infty + \frac{f}{(\omega_0^2 - \omega^2) - ig\omega} + \frac{\omega_{phl}^2}{-\omega^2 - ig\omega}$$

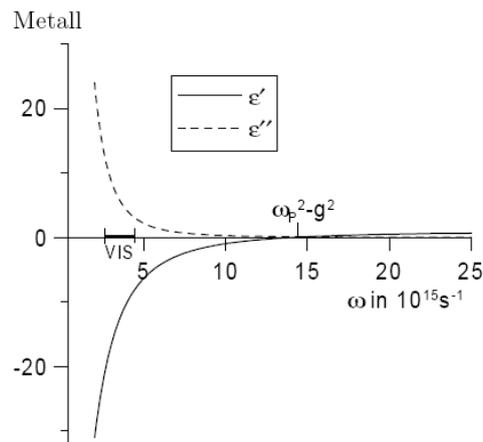
Hier ist zu erkennen, dass bei Halbleitern elektronische Übergänge auch im nahen IR-Bereich oder im sichtbaren Bereich auftreten.

$$\omega_{phl} \approx 10^{14} \text{s}^{-1} < \omega$$

c) Metalle

$$\begin{aligned} \varepsilon(\omega) &= 1 - \frac{\omega_{pmet}^2}{\omega^2 + ig\omega} \\ \varepsilon'(\omega) &= 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + g^2} \\ \varepsilon''(\omega) &= \frac{g\omega_p^2}{\omega(\omega^2 + g^2)} \end{aligned}$$

Da $\omega_{pmet} \gg \omega$ gilt, weist die dielektrische Funktion hier einen großen negativen Realteil auf.



2.2.7 Materialgleichungen im Zeitbereich

Bisher wurden alle Gleichungen der Einfachheit halber im Fourierraum gelöst. Diese sollen nun wieder auf den Zeitbereich übertragen werden.

Von den folgenden beiden Gleichungen wird nur Gleichung 2 vorgerechnet:

$$\vec{D}(\vec{r}, \omega) = \varepsilon_0 \varepsilon(\omega) \vec{E}(\vec{r}, \omega) \quad (1)$$

$$\vec{P}(\vec{r}, \omega) = \varepsilon_0 \chi(\omega) \vec{E}(\vec{r}, \omega) \quad (2)$$

Die folgenden Beziehungen sind bekannt und können somit in Gleichung 2 eingesetzt werden:

$$\chi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(t) e^{i\omega t} dt$$

$$\vec{E}(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(\vec{r}, t) e^{i\omega t} dt$$

$$\vec{P}(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{P}(\vec{r}, t) e^{i\omega t} dt$$

Es ergibt sich:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{P}(\vec{r}, t) e^{i\omega t} dt = \varepsilon_0 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R(t') e^{i\omega t'} \vec{E}(\vec{r}, t'') e^{i\omega t''} dt' dt''$$

Durch Substitution $t' = t - t''$ und einige Umformungen folgt:

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^t R(t - t'') \vec{E}(\vec{r}, t'') dt''$$

Wirkt das E-Feld nur für einen winzigen Augenblick, d.h. $\vec{E}(\vec{r}, t'') = \delta(t'' - t_0)$ ergibt sich die Polarisation zu

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 R(t - t_0)$$

2.3 Energiestromdichte und Energiebilanz

2.3.1 Der zeitlich gemittelte Poyntingvektor

Analog zur Elektrodynamik gibt der Poyntingvektor \vec{S} den Energiefluss des E-Feldes an. Der Energiefluss durch eine Fläche (Detektor) ist gegeben durch $\vec{S} \cdot \vec{n}$

Der momentane Poyntingvektor sei gegeben durch:

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = \vec{E}_r(\vec{r}, t) \times \vec{H}_r(\vec{r}, t)$$

Für einen Messprozess müssen im Allgemeinen die folgenden Zeitgrößen berücksichtigt werden:

Schwingungsdauer $T_0 \leq 10^{-14} \text{ s}$

Impulsdauer i.a. $T_p \gg T_0$

Messzeit i.a. $T_m \geq T_p \gg T_0$

Ein Detektor kann im Allgemeinen der schnellen Oszillation nicht folgen und misst einen zeitlichen Mittelwert. Das bedeutet, das man schreiben kann:

$$\begin{aligned} \vec{E}_r(\vec{r}, t) &= \frac{1}{2} \left[\vec{E}(\vec{r}, t) e^{-i\omega_0 t} + c.c \right] \\ \vec{H}_r(\vec{r}, t) &= \frac{1}{2} \left[\vec{H}(\vec{r}, t) e^{-i\omega_0 t} + c.c \right] \end{aligned}$$

Setzt man dies in $\vec{S}(\vec{r}, t)$ ein, formt um, sortiert nach Real- und Imaginärteil und mittelt dann über die Messzeit folgt:

$$\begin{aligned} \langle \vec{S}(\vec{r}, t) \rangle &= \frac{1}{2T_m} \int_{-T_m}^{T_m} \vec{S}(\vec{r}, t) dt \\ |\langle \vec{S}(\vec{r}, t) \rangle| &= I \end{aligned}$$

Das heißt, das der Messprozess im Allgemeinen eine zeitliche Mittelung von $\vec{S}(\vec{r}, t)$ darstellt. Weiterhin wird die optische Intensität als der Betrag davon definiert. Die Phaseninformationen gehen im Allgemeinen verloren.

2.3.2 Die zeitlich gemittelte Energiebilanz

An dieser Stelle soll auf weitere Rechnungen verzichtet werden. Zum Ansatz:

Man schnappt sich die Maxwellgleichungen, setzt den Poyntingvektor ein und mittelt zeitlich. Dann folgen noch einige Umformungen (die genaue Rechnung - sieht Skript).

Es folgt:

$$\operatorname{div} \langle \vec{S} \rangle = -\frac{1}{2} \omega \varepsilon_0 \varepsilon''(\omega) \vec{E}(\vec{r}, \omega) \vec{E}^*(\vec{r}, \omega)$$

Aus dieser Beziehung folgt, dass sich Senken des Energieflusses genau dann ergeben, wenn der Imaginärteil der dielektrischen Funktion nicht verschwindet. D.h. bei Resonanzen wird der Energieverlust hoch \rightarrow Absorption.

2.4 Die Kramers-Kronigsche Dispersionsrelation

Für lineare Systeme existiert unter bestimmten Bedingungen eine Integraltransformation zwischen Real- und Imaginärteil der Übertragungsfunktion.

Allgemeine Form linearer Übertragungssysteme:

Ursache	Responsefunktion	Wirkung
$U(t')$	$h(t, t')$	$W(t)$
$\vec{E}(t')$	$R(t, t')$	$\vec{P}(t)$

Spezielle lineare Übertragungssysteme:

$$\vec{P}(t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^t R(t-t') \vec{E}(t') dt'$$

$$\vec{D}(t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^t \tilde{R}(t-t') \vec{E}(t') dt'$$

$$\tilde{R}(t-t') = \delta(t-t') + R(t-t')$$

Notwendige Systemvoraussetzungen:

$$W(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, t') U(t') dt' \quad \rightarrow \text{Linearität}$$

$$= \int_{-\infty}^t h(t, t') U(t') dt' \quad \rightarrow \text{Kausalität}$$

$$= \int_{-\infty}^t h(t-t') U(t') dt' \quad t' = t - \tau$$

$$= \int_0^{\infty} h(\tau) U(t-\tau) dt' \quad \rightarrow \text{Zeitinvarianz}$$

Erklärung:

- Der Zusammenhang zwischen Responsefunktion ($h(t, t')$) und Ursache ($U(t')$) muss linear sein (Linearität)
- Der Integrand muss für Zeiten größer t null sein (keine Wirkung aus der Zukunft = Kausalität)
- Eine Verschiebung der Zeitskala hat keinen Einfluss auf das System (Zeitinvarianz)

Beispiel:

Gegeben sei $\vec{P}_r(\vec{r}, t)$ mit Responsefunktion $R(\tau)$ und entsprechender Übertragungsfunktion (Fouriertransformierte der Responsefunktion) $\chi(\omega)$.

$$\vec{P}_r(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^t R(\tau) \vec{E}_r(\vec{r}, t - \tau) d\tau$$

Die Kramers-Kronigsche Dispersionsrelation besagt nun, dass es eine Beziehung zwischen Real- und Imaginärteil von $\chi(\omega)$ geben muss, wenn die genannten Bedingungen erfüllt sind.

An dieser Stelle soll nun keine vollständige Herleitung (siehe Skript) sondern nur ein grober Überblick über diese folgen:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}^*(\vec{r}, t) &\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}, \omega) = \vec{E}^*(\vec{r}, -\omega) \Rightarrow \\ \vec{P}(\vec{r}, \omega) = \varepsilon_0 \chi(\omega) \vec{E}(\vec{r}, \omega) &\Rightarrow \vec{P}(\vec{r}, \omega) = \varepsilon_0 \chi^*(-\omega) \vec{E}(\vec{r}, \omega) \Rightarrow \\ \chi(\omega) = \chi^*(-\omega) &\Rightarrow \\ \Re \chi(\omega) = \Re \chi(-\omega) & \\ \Im \chi(\omega) = -\Im \chi(-\omega) & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau = \int_0^{\infty} R(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \\ \omega &= \omega' + i\omega'' \\ \chi(\omega) &= \int_0^{\infty} R(\tau) e^{i\omega'\tau} e^{-\omega''\tau} d\tau \end{aligned}$$

An dieser Stelle folgt der Residuensatz über die obere Halbebene.

$$\chi(\omega) = -\frac{i}{\pi} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi(\bar{\omega})}{\bar{\omega} - \omega} d\bar{\omega}$$

Indem man die oben hergeleiteten Relationen ausnützt kann das Ergebnis noch weiter umgeschrieben werden.

$$\begin{aligned}
 \chi'(\omega) &= \frac{1}{\pi} \wp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi''(\bar{\omega})}{\bar{\omega} - \omega} d\bar{\omega} & \varepsilon'(\omega) &= \frac{2}{\pi} \wp \int_0^{\infty} \frac{\bar{\omega} \varepsilon''(\bar{\omega})}{\omega^2 - \bar{\omega}^2} d\bar{\omega} + 1 \\
 \chi''(\omega) &= -\frac{1}{\pi} \wp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi'(\bar{\omega})}{\bar{\omega} - \omega} d\bar{\omega} & \varepsilon''(\omega) &= -\frac{2}{\pi} \omega \wp \int_0^{\infty} \frac{[\varepsilon'(\bar{\omega}) - 1]}{\omega^2 - \bar{\omega}^2} d\bar{\omega}
 \end{aligned}$$

$\wp \int_{-\infty}^{\infty}$ bezeichnet hierbei ein sogenanntes Hauptwertintegral.

Die physikalische Aussage der Ergebnisse ist, dass die Dispersion des Mediums durch dessen Absorption hervorgerufen wird. D.h. zur exakten Bestimmung der dielektrischen Funktion benötigt man das vollständige Absorptionsspektrum.

2.5 Normalmoden im homogenen isotropen Medium

Die Normalmoden sind die einfachsten Lösungen der Wellengleichung im Fourierraum. Mit ihnen können alle anderen, beliebigen Lösungen konstruiert werden. In der Optik gelten im Allgemeinen folgende Bedingungen für die Normalmoden:

- unveränderliche Amplitude
- Erhaltung des Polarisationszustandes
- Phase weist harmonische Abhängigkeit auf
- Dispersionsrelation $\omega(\vec{k})$ vorhanden

Ausgangspunkt stellen Wellen- und Divergenzgleichung dar

$$\mathbf{rot} \mathbf{rot} \vec{E}(\vec{r}, \omega) = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \vec{E}(\vec{r}, \omega) \quad (1)$$

$$\varepsilon_0 \varepsilon(\omega) \mathbf{div} \vec{E}(\vec{r}, \omega) = 0 \quad (2)$$

Wegen Gleichung 2 lassen sich zwei Fälle betrachten

1. longitudinale Wellen: $\omega = \omega_L \rightarrow \varepsilon(\omega) = 0$
2. transversale Wellen: $\omega \neq \omega_L \rightarrow \mathbf{div} \vec{E}(\vec{r}, \omega) = 0$

Das Gesamtwellenfeld ergibt sich als Integral über alle Normalmoden:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} d\omega$$

$\vec{k} = \vec{k}' + i\vec{k}''$ ist der komplexe Wellenzahlvektor.

- $\vec{k}'\vec{r} = \text{const.} \Rightarrow$ Fläche konstanter Phase
- $\vec{k}''\vec{r} = \text{const.} \Rightarrow$ Fläche konstanter Amplitude
- $\vec{k}''\vec{r} = \vec{k}'\vec{r} \Rightarrow$ homogene Wellen
- $\vec{k}''\vec{r} \perp \vec{k}'\vec{r} \Rightarrow$ evaneszente Wellen

2.5.1 Longitudinale Wellen

Diese können nur im dielektrischen Medium für $\varepsilon(\omega) = 0$ bei $\omega = \omega_L$ auftreten.

Aus $\text{rot rot } \vec{E}(\vec{r}, \omega_L) = 0$ folgt mit Wellenansatz:

$$\begin{aligned} k^2 \vec{E}_\perp &= 0 \\ \vec{E}(\vec{r}, \omega_L) &= \vec{E}_\parallel(\vec{r}, \omega_L) \end{aligned}$$

2.5.2 Transversale Wellen

Die interessanten Lösungen sind die divergenz-, also Quellenfreien Lösungen mit $\omega \neq \omega_L$.

Damit folgt direkt aus der Wellengleichung die Helmholtzgleichung:

$$\Delta \vec{E}(\vec{r}, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \vec{E}(\vec{r}, \omega) = 0$$

Mit Exponentialansatz folgt:

$$\begin{aligned} \left[-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \right] \vec{E}(\vec{k}, \omega) &= 0 \\ \vec{k} \vec{E}(\vec{k}, \omega) &= 0 \end{aligned}$$

Daraus folgen zwei wesentliche Physikalische Eigenschaften:

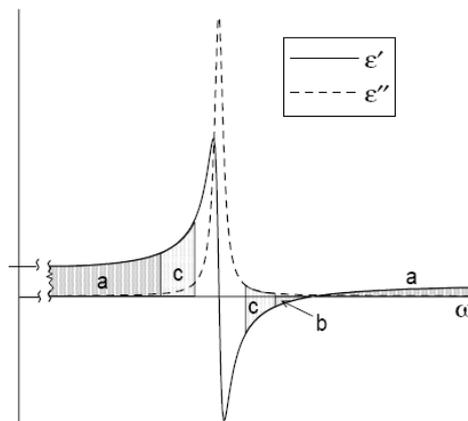
Dispersionsrelation $k^2 = k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega)$

Transversalität $\vec{k} \perp \vec{E}(\vec{k}, \omega)$

Da die Dispersionrelation gilt, kann man schreiben $\vec{E}(\vec{k}, \omega) = \vec{E}(\omega)$

Im Vorlesungsskript folgt an dieser Stelle eine ausführliche Diskussion der Lösungen in verschiedenen Frequenzbereichen. Darauf soll an dieser Stelle verzichtet werden!

Die Quintessenz lässt sich im Folgenden zusammenfassen:



- a) ungedämpfte Wellen \rightarrow Normalmoden \rightarrow Plasmon-Polaritonen & Phonon-Polaritonen
evaneszente Wellen an Grenzflächen

b) evaneszente Wellen

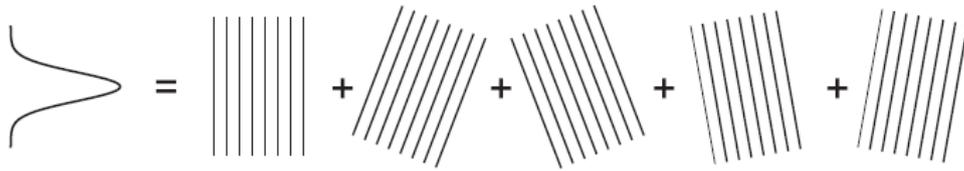
c) gedämpfte Wellen $\rightarrow (\varepsilon' > 0) \hat{=}$ schwacher Dämpfung und $(\varepsilon' < 0) \hat{=}$ starker Dämpfung

2.6 Gebündelte Wellenfelder und Impulse

2.6.1 Definitionen

Bündel

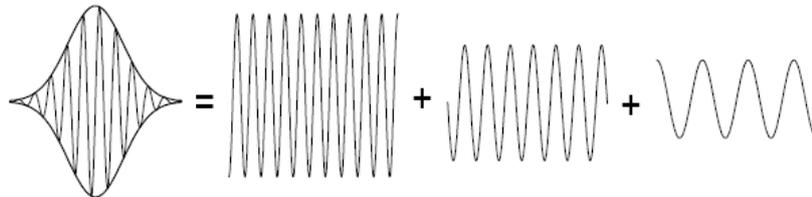
Ein Bündel ist eine kontinuierliche Überlagerung stationärer, ebener Wellen verschiedener Ausbreitungsrichtung.



$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} d^3k$$

Impuls

Ein Impuls ist eine kontinuierliche Überlagerung stationärer, ebener Wellen verschiedener Frequenzen.



$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(\omega) e^{i(\vec{k}(\omega)\vec{r} - \omega t)} d\omega$$

Impuls endlicher Breite

Ein Impuls endlicher Breite ist eine kontinuierliche Überlagerung stationärer, ebener Wellen verschiedener Frequenzen und Ausbreitungsrichtungen.

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k}(\omega)\vec{r} - \omega t)} d^3k d\omega$$

2.6.2 Ausbreitung gebündelter Wellenfelder im homogenen Raum

Zum Vorgehen und zur Schreibweise

Zunächst wird gezeigt werden, dass sich Pulse endlicher transversaler Breite als Superposition von Normalmoden darstellen lassen. Es wird sich zeigen, dass die Pulse zeitlich (wegen Dispersion verschiedener Frequenzen) und räumlich (wegen verschiedener Richtungen der Normalmoden) breit laufen.

- zeitlich $\hat{=}$ Pulsverbreiterung
- räumlich $\hat{=}$ Beugung

Für die folgenden Herleitungen wird zunächst angenommen, dass $\omega = \text{const.}$ und $\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) > 0$ (Transparenzgebiet).

Daraus folgt, dass die Normalmoden durch stationäre homogene und evaneszente, ebene Wellen beschrieben werden können. Außerdem wird die skalare Näherung angenommen (ist im Fall eindimensionaler, linear polarisierter Bündel exakt).

Schreibweise:

$$\vec{E}(\vec{r}, \omega) \rightarrow \bar{E}_y(\vec{r}, \omega) \vec{e}_y \rightarrow \bar{E}_y(\vec{r}, \omega) \rightarrow u(\vec{r}, \omega)$$

Damit folgt für die Helmholtzgleichung

$$\begin{aligned} \Delta u(\vec{r}, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) u(\vec{r}, \omega) &= 0 \\ \Delta u(\vec{r}, \omega) + k^2(\omega) u(\vec{r}, \omega) &= 0 \\ \Delta u(\vec{r}) + k^2 u(\vec{r}) &= 0 \end{aligned}$$

Ausbreitung beliebig enger Bündel

Gegeben: Feldverteilung in einer Ebene

Gesucht: Feldverteilung im gesamten Halbraum

Vorgehen:

1. Fouriertransformierte der Wellenfunktion nehmen
2. Dispersionsrelation einsetzen (Ausbreitungsrichtung - hier z - kann nicht mit transformiert werden)
3. Einsetzen in skalare Helmholtzgleichung
4. Lösen der Helmholtzgleichung

$$u(\vec{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U(\vec{k}, \omega) e^{i\vec{k}(\omega)} d^3k$$

$$\vec{k}^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega)$$

$$k_x = \alpha, \quad k_y = \beta, \quad k_z = \gamma$$

$$u(\vec{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(\alpha, \beta, z) e^{i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta \quad = \Delta u(\vec{r}, \omega) + k^2(\omega) u(\vec{r}, \omega)$$

liefert:

$$U(\alpha, \beta, z) = U_1(\alpha, \beta) e^{i\gamma z} + U_2(\alpha, \beta) e^{-i\gamma z}$$

Man kann zwei Arten von Lösungen erkennen:

- $\gamma^2 \geq 0 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 \leq k^2 \Rightarrow$ homogene Wellen
- $\gamma^2 < 0 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 > k^2 \Rightarrow$ evaneszente Wellen da $\gamma = k_z$ imaginär wird.

Damit muss der zweite Teil der Lösung entfallen da ansonsten eine unendlich anwachsende Amplitude die Folge wäre (das ist unphysikalisch).

Legen wir noch fest, das $U(\alpha, \beta, 0) = U_0(\alpha, \beta)$ ist, da dann folgt:

$$U(\alpha, \beta, z) = U_0(\alpha, \beta) e^{i\gamma z}$$

$$u(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U_0(\alpha, \beta) e^{i\gamma(\alpha, \beta)z} e^{i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta$$

Bemerkungen:

- $U_0(\alpha, \beta)$ stellt die räumliche, spektrale Verteilung bei $z = 0$ dar und wird Ortsfrequenz- oder Winkelspektrum von $u_0(x, y)$ genannt.
- α und β sind im Sinne der Fouriertransformation Ortsfrequenzen, im Sinne der Optik repräsentieren sie aber Winkel.
- Man kann feststellen, das Ausbreitung nur Multiplikation mit dem Phasenfaktor $e^{i\gamma(\alpha, \beta)z}$ im Fourierraum bedeutet.

D.h. das die lineare Gleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ im Fourierraum die folgende Lösung hat:

$$U(\alpha, \beta, z) = H(\alpha, \beta, z) U_0(\alpha, \beta)$$

$$H(\alpha, \beta, z) = e^{i\gamma(\alpha, \beta)z}$$

$$\gamma(\alpha, \beta) = \sqrt{k^2 - \alpha^2 - \beta^2}$$

Dabei ist $H(\alpha, \beta, z)$ die Übertragungsfunktion.

Im Ortraum bedeutet dies:

$$u(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x - x', y - y', z) u_0(x', y') dx' dy'$$

mit Responsefunktion

$$h(x, y, z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(\alpha, \beta, z) e^{i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta$$

Fresnel- (paraxiale) Näherung

Dies ist ein wichtiger Spezialfall wenn das Ortsfrequenzspektrum schmalbandig ist. D.h. die ebenen Wellen, die das Bündel beschreiben haben nur eine kleine Neigung gegen die Ausbreitungsrichtung.

Man kann daher $\gamma = \sqrt{k^2 - \alpha^2 - \beta^2}$ in einer Potenzreihe entwickeln.

$$\gamma \approx k \left(1 - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2k^2}\right) = k - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2k}$$

Damit ergibt sich die Übertragungsfrequenz in Fresnelnäherung zu

$$H_F(\alpha, \beta, z) = e^{ikz} e^{-i\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2k}z}$$

Das heißt, das die Übertragungsfunktion nur noch homogene Wellen enthält.

Die Übertragung in den Ortsraum und die Vereinfachung der Responsefunktion umfasst einige Rechenschritte die an dieser Stelle weggelassen werden.

Es folgt für den Ortsraum:

$$\begin{aligned} u_F(x, y, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_F(x - x', y - y', z) u_0(x', y') dx' dy' \\ h_F(x, y, z) &= e^{ikz} \left\{ -\frac{i}{\lambda z} e^{i\frac{k}{2z}(x^2 + y^2)} \right\} \\ \Rightarrow u_F(x, y, z) &= -\frac{i}{\lambda z} e^{ikz} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x', y') e^{i\frac{k}{2z}[(x-x')^2 + (y-y')^2]} dx' dy' \end{aligned}$$

Hieran lässt sich im übrigen noch erkennen, das die Responsefunktion in paraxialer Näherung eine Kugelwelle ist.

Die Wellengleichung in paraxialer Näherung

Die Wellengleichung ist eine elliptische Differentialgleichung, d.h. die Lösungen des Randwertproblems erfordert die Vorgabe der Felder auf dem gesamten Raum. Eine parabolische Differentialgleichung hätte an dieser Stelle den Vorteil, das nur die Anfangswerte vorgegeben werden müssen.

Man kann zeigen, das die Wellengleichung in paraxialer Näherung in eine parabolische Differentialgleichung übergeht. Auf die genaue Rechnung soll an dieser Stelle verzichtet

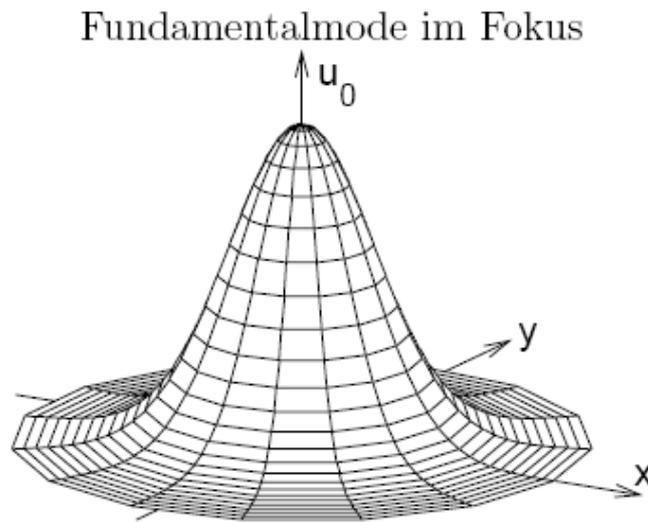
werden.

$$i \frac{\partial}{\partial z} v(x, y, z) = -\frac{1}{2k} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) v(x, y, z)$$

$$u(x, y, z) = v(x, y, z) e^{ikz}$$

2.6.3 Ausbreitung eines Gauß-Bündels

Hierbei handelt es sich ebenfalls um einen wichtigen Spezialfall da gerade transversale Laser-Fundamentalmoden diese Gestalt aufweisen.



$$u_0(x, y) = v_0(x, y) = A_0 e^{-\left(\frac{x^2}{\omega_x^2} + \frac{y^2}{\omega_y^2}\right)} e^{i\varphi(x, y)}$$

An dieser Stelle sollen folgende Vereinfachungen gemacht werden:

- Rotationssymmetrie $\omega_x^2 = \omega_y^2 = \omega_0^2$
- „flache“ Phase $\varphi(x, y) = 0$

Die Breite des Bündels ist definiert als $u_0(x^2 + y^2) = u_0(\omega_0^2) = \frac{1}{e} A_0$

Die Höhe ergibt sich zu $u_0(x, y) = v_0(x, y) = A_0 e^{-\frac{x^2+y^2}{\omega_0^2}}$

Betrachten wir das Spektrum bei $z = 0$

$$U_0(\alpha, \beta) = V_0(\alpha, \beta) = \frac{1}{(2\pi)^2} A_0 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{\omega_0^2}} e^{-i(\alpha x + \beta y)} dx dy$$

$$= \frac{A_0}{4\pi^2} \omega_0^2 e^{-\frac{x^2+y^2}{4/\omega_0^2}} = \frac{A_0}{4\pi^2} \omega_0^2 e^{-\frac{x^2+y^2}{\omega_s^2}}$$

D.h., dass das Spektrum ein Gaußprofil aufweist.

Betrachten wir nun das Spektrum nach der Ausbreitung

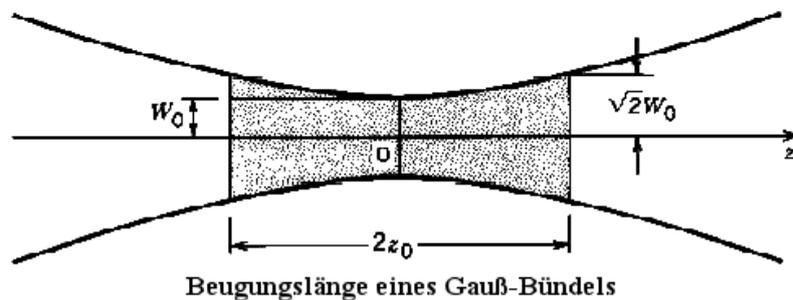
$$\begin{aligned} U(\alpha, \beta, z) &= V(\alpha, \beta, z)e^{ikz} \\ V(\alpha, \beta, z) &= U_0(\alpha, \beta)e^{-\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2k}z} \\ &= \frac{A_0}{4\pi}\omega_0^2 e^{-\omega_0^2 \frac{\alpha^2 + \beta^2}{4}} e^{-i\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2k}z} \end{aligned}$$

Schlussfolgerungen:

- Gaußbündel behalten bei der Ausbreitung ihre Form, jedoch nicht Amplitude, Breite und Phase.
- Die Ausbreitungslänge z und der Beugungsparameter z_0 bestimmen dabei die wesentlichen Eigenschaften (z_0 ist erst bei der Rücktransformation in den Ortsraum nötig einzuführen)

$$z_0 = \frac{k\omega_0^2}{2} = \frac{\pi}{\lambda_n}\omega_0^2$$

$L_B = 2z_0$ wird auch als Beugungslänge oder Rayleigh-Gebiet bezeichnet.



Spezialfälle:

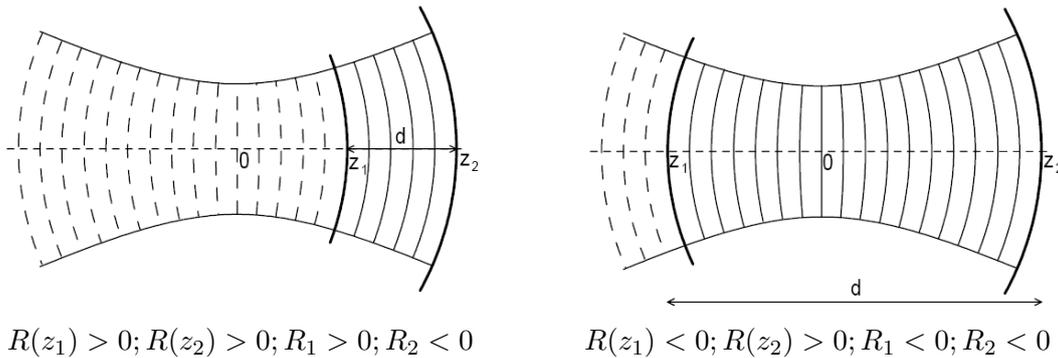
1. $z \ll z_0$: Gauß-Bündel ändert Gestalt und Phase nicht.
2. $z \gtrsim z_0$:
 - Produkt aus Breite und Amplitude ist konstant.
 - Strahldivergenz nimmt mit stärkerer Fokussierung und größerer Wellenlänge zu.
 - Fläche konstanter Phase ist gekrümmt.

2.6.4 Gaußsche Moden in einem Resonator

Der Hauptaspekt bei einem Resonator ist, dass dieser genau dann stabil ist, wenn die Spiegelflächen mit den Phasenflächen übereinstimmen. In paraxialer Näherung sollten also die Spiegelradien gleich den Radien der Phasenflächen sein.

Definitionen:

- Wegen $R(z) = z + \frac{z_0^2}{z}$ ist R für negative z als negativ zu definieren.
- Der Radius konkaver Spiegelflächen wird als negativ definiert.
- $z_{1,2}$ bezeichnet den Abstand von der Taille zu Spiegel 1 bzw. 2



Um zur Stabilitätsbedingung eines Resonators zu gelangen kann die folgende Rechnung angestellt werden:

$$\begin{aligned}
 R_1 &= R(z_1) & R_2 &= -R(z_2) \\
 R_1 &= z_1 + \frac{z_0^2}{z_1} & R_2 &= z_2 + \frac{z_0^2}{z_2} \\
 z_1(R_1 - z_1) &= -z_2(R_2 + z_2) \\
 z_1 &= -\frac{d(R_2 + d)}{R_1 + R_2 + 2d} \\
 z_0^2 = R_1 z_1 - z_1^2 &= -\frac{d(R_1 + d)(R_2 + d)(R_1 + R_2 + d)}{(R_1 + R_2 + 2d)^2}
 \end{aligned}$$

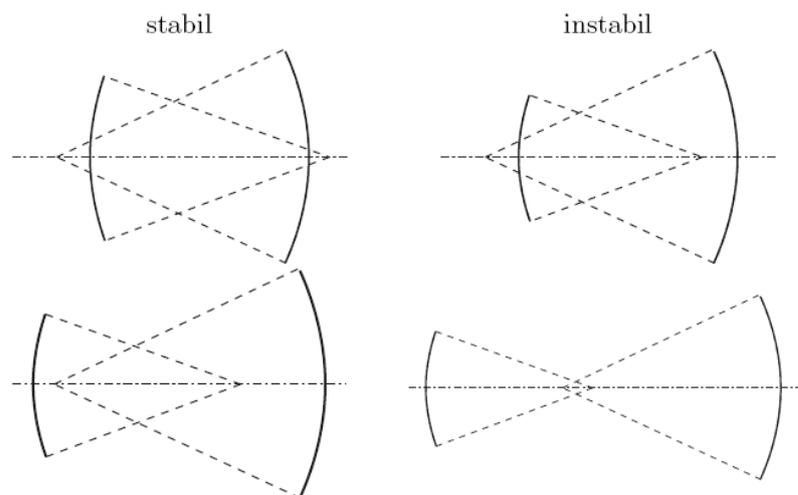
Mit einigen weiteren Umformungen gelangt man dann zu folgender Ungleichung:

$$0 \leq \left(1 + \frac{d}{R_1}\right) \left(1 + \frac{d}{R_2}\right) \leq 1$$

Aus dieser Beziehung lassen sich Faustregeln für stabile Resonatoren formulieren.

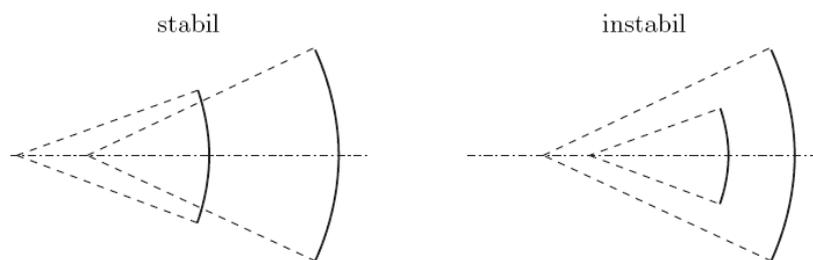
1. Zwei konkave Spiegel

- Beide Mittelpunkte der Kreisradien müssen außerhalb des Resonators liegen.
- Beide Mittelpunkte der Kreisradien müssen innerhalb des Resonators liegen.



2. Ein konkaver und ein konvexer Spiegel

- Beide Mittelpunkte müssen jenseits eines Spiegels liegen, wobei der Mittelpunkt des konvexen Spiegels weiter entfernt vom Resonator liegen muss.



2.6.5 Ausbreitung von Impulsen

3 Beugungstheorie

4 Fourieroptik & Optische Fiterung

5 Polarisation elektromagnetischer Wellen