

Maß & Integraltheorie

FSU Jena - SS 2008

Vorlesungsscript

Stilianos Louca

21. Juli 2008

Inhaltsverzeichnis

1	Vorwort	6
1.1	Was dies ist	6
1.2	Verbesserungen	6
2	Messbare Räume	7
2.1	Algebren und σ -Algebren	7
2.1.1	Definition: Mengenalgebra	7
2.1.2	Definition: σ -Algebra	7
2.1.3	Aussage über σ -Algebren	7
2.1.4	Aussage über Durchschnitte von Algebren	8
2.1.5	Aussage über kleinste Algebren	8
2.1.6	Definition: Messbarer Raum	8
2.1.7	Satz über messbare Räume	9
2.1.8	Definition: Messbarer Unterraum	9
2.1.9	Hilfssatz über σ -Algebren auf Untermengen	9
2.1.10	Definition: Halbgebra	9
2.2	Monotone Klassen	9
2.2.1	Definition: Monotone Klasse	9
2.2.2	Satz über monotone Klassen und σ -Algebren	10
2.2.3	Der monotone Klassensatz	10
2.3	Dynkin Systeme	10
2.3.1	Definition: Dynkin System	10
2.3.2	Definition: π -System	11
2.3.3	Satz über π -Systeme und σ -Algebren	11
2.3.4	Definition: Kleinstes Dynkin System	11
2.3.5	Satz über Dynkin Systeme	11
3	Maßräume	12
3.1	Maße	12
3.1.1	Definition: Mengenfunktion	12
3.1.2	Definition: Maß	12
3.1.3	Definition: Inhalt	12
3.1.4	Definition: Prämaß	12
3.1.5	Definition: Endliches Maß	12
3.1.6	Eigenschaften von Maßen	13
3.1.7	Beispiele von Maßen	14
3.2	Der Eindeutigkeitsatz für Maße	15
3.2.1	Eindeutigkeitsatz für endliche Maße	15
3.2.2	Eindeutigkeitsatz für Maße	15
3.3	σ -endliche Maße	15

3.3.1	Definition: σ -Endlichkeit	15
4	Konstruktion von Maßen	16
4.1	Der Fortsetzungssatz von Caratheodory	16
4.1.1	Fortsetzungssatz (C.Caratheodory)	16
4.2	Das äußere Maß	16
4.2.1	Definition: \mathcal{A}_σ	16
4.2.2	Satz über \mathcal{A}_σ	16
4.2.3	Definition: Fortsetzung des Prämaßes auf \mathcal{A}_σ	17
4.2.4	Lemma über die Eindeutigkeit von μ'	17
4.2.5	Eigenschaften von μ'	17
4.2.6	Definition: Äußeres Maß	17
4.2.7	Eigenschaften des äußeren Maßes	18
4.3	Einschränkung des äußeren Maßes	18
4.3.1	Definition: $\overline{\mathcal{M}}$	18
4.3.2	Satz über $\overline{\mathcal{M}}$	18
4.3.3	Definition: Einschränkung von μ^* auf $\overline{\mathcal{M}}$	18
4.3.4	Satz über $\overline{\mu}$	18
4.4	Approximationseigenschaften	19
4.4.1	Approximationssatz	19
4.5	Vervollständigung von Maßräumen	19
4.5.1	Definition: \mathcal{M}^μ	19
4.5.2	Fortsetzung von μ auf \mathcal{M}^μ	19
4.5.3	Definition: Vervollständigung	19
4.5.4	Lemma über Vervollständigungen	20
4.5.5	Satz über $\overline{\mu}$ und die Vervollständigung $\mathcal{M}^{\overline{\mu}}$	20
5	Konstruktion von Prämaßen	21
5.0.6	Definition: Halbgebra	21
5.0.7	Lemma über Halbgebren	21
5.0.8	Satz über Mengenfunktionen auf Halbgebren	21
5.1	Kompakte Klassen	22
5.1.1	Lemma über Inhalte auf Algebren	22
5.1.2	Definition: Kompakte Klasse	22
5.1.3	Satz über kompakte Klassen	22
6	Maße auf der reellen Achse	23
6.1	Borel-Mengen	23
6.1.1	Definition: Borel-Menge	23
6.1.2	Lemma über Borel-Mengen	23
6.1.3	Definition: Lokale Endlichkeit	23
6.1.4	Lemma über lokal endliche Maße	23
6.2	Maß-erzeugende Funktionen	23
6.2.1	Satz über lokal endliche Maße	23
6.2.2	Satz über links-stetige, monoton wachsende Funktionen	24
6.2.3	Definition: Maß-erzeugende Funktion	24
7	Das Lebesgue Maß auf \mathbb{R}	25
7.0.4	Existenzsatz	25
7.0.5	Definition: Lebesgue-Maß	25
7.1	Gleichverteilung	25
7.1.1	Lemma über $\mathcal{B}([0, 1])$	25
7.1.2	Definition: Gleichverteilung auf $[0, 1]$	25
7.1.3	Satz: Verschiebungsinvarianz	25
7.1.4	Satz über geeichte, verschiebungsinvariante Maße	25

8	Konstruktion von σ-Algebren und nicht messbaren Mengen	26
8.1	Ordnungszahlen	26
8.1.1	Definition: Halbordnung:	26
8.1.2	Definition: Wohlordnung:	26
8.1.3	Definition: Ähnliche wohlgeordnete Mengen	26
8.1.4	Definition: Wohlordnungstyp - Ordnungszahl	26
8.2	Konstruktion von $\mathcal{M} = \sigma(\mathcal{A})$	27
8.2.1	Konstruktion der \mathcal{A}_α	27
8.2.2	Konstruktion von \mathcal{M}	27
8.3	Mächtigkeit und Vervollständigung von \mathcal{M}	27
8.3.1	Definition: Gleichmächtigkeit	27
8.3.2	Satz über die Kardinalität von \mathcal{M}	28
8.3.3	Satz über die Kardinalität von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$	28
8.3.4	Die Vervollständigung $\mathcal{B}^\lambda(\mathbb{R})$	28
8.3.5	Satz über die Kardinalität von $\mathcal{B}^\lambda(\mathbb{R})$	28
8.3.6	Lemma: Verschiebungsinvarianz von λ auf $\mathcal{B}^\lambda(\mathbb{R})$	28
8.3.7	Satz: Existenz nicht messbarer Mengen in $\mathcal{B}^\lambda(\mathbb{R})$	28
8.3.8	Satz über die nicht-Existenz bestimmter Maße auf $\mathcal{P}(\mathbb{R})$	28
9	Das Integral	29
9.1	Messbare Funktionen	29
9.1.1	Definition: Messbare Funktion	29
9.1.2	Eigenschaften messbarer Funktionen	29
9.2	Messbare, erweiterte, reelle Funktionen	30
9.2.1	Der erweiterte $\hat{\mathbb{R}}$	30
9.2.2	Die Metrik $\hat{\rho}$	30
9.2.3	Definition: Messbare, erweitert reelle Funktion	30
9.2.4	Hilfssatz über Borelmengen	31
9.2.5	Satz über Borelmengen in $\hat{\mathbb{R}}$	31
9.2.6	Eigenschaften messbarer, erweitert reeller Funktionen	31
9.3	Das Integral nicht-negativer, einfacher Funktionen	32
9.3.1	Definition: Einfache Funktionen	32
9.3.2	Satz: Darstellung einfacher Funktionen	33
9.3.3	Definition: Integral einer nicht negativen, einfachen Funktion	33
9.3.4	Eigenschaften des Integrals	33
9.4	Das Integral nicht-negativer, messbarer Funktionen	34
9.4.1	Definition: Nicht-negative messbare Funktion	34
9.4.2	Satz: Approximation nicht-negativer, messbarer Funktionen	34
9.4.3	Satz über Folgen nicht-negativer, einfacher Funktionen	34
9.4.4	Definition: Integral nicht-negativer, messbarer Funktionen	34
9.4.5	Eigenschaften des Integrals nicht negativer, messbarer Funktionen	35
9.5	Integrierbare Funktionen	35
9.5.1	Definition: Integral messbarer Funktionen	36
9.5.2	Eigenschaften des Integrals	36
9.6	Stetigkeitseigenschaften des Integrals	37
9.6.1	Satz von Beppo Levi über monotone Konvergenz	37
9.6.2	Folgerung des Satzes von Levi	37
9.6.3	Lemma von Fatou	38
9.6.4	Folgerungen des Lemmas von Fatou	38
9.7	Konvergenz μ -fast überall	38
9.7.1	Definition: Konvergenz μ -fast überall	38
9.7.2	Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz	39
9.8	Das Lebesgue Integral	39
9.8.1	Definition: Lebesgue-messbare Funktionen und das Lebesgue-Integral	39
9.8.2	Lemma über die Lebesgue-Messbarkeit erweitert reeller Funktionen	39
9.9	Vergleich: Riemann und Lebesgue Integral	39
9.9.1	Definition: λ -fast überall Stetigkeit	39
9.9.2	Satz über beschränkte Funktionen - Vergleich \mathcal{R} - und \mathcal{L} - Integral	40

9.10	Transformationsatz	40
9.10.1	Satz über μ_T	40
9.10.2	Definition: Bildmaß	40
9.10.3	Transformationsatz	40
9.10.4	Folgerung des Transformationsatzes	40
10	Produktmaße	41
10.1	Das Produkt von zwei Maßen	41
10.1.1	Definition: Direktes Produkt	41
10.1.2	Lemma über $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$	41
10.1.3	Definition: Produkt zweier messbarer Räume	41
10.1.4	Definition: Schnitt	41
10.1.5	Lemma über Schnitte aus Produkten von σ -Algebren	42
10.1.6	Satz über das Produkt σ -endlicher Maßräume	42
10.1.7	Definition: Produktmaß	42
10.1.8	Lemma über das Produktmaß	42
10.1.9	Satz über die Eindeutigkeit des Produktmaßes	42
10.1.10	Satz über Integrale bzgl. des Produktmaßes	42
10.1.11	Produkt von Wahrscheinlichkeitsräumen	43
10.1.12	Lemma über die Projektionen X_i	43
10.1.13	Satz über unabhängige Variablen	43
10.2	Der Satz von Fubini	43
10.2.1	Definition: Schnittfunktion	43
10.2.2	Lemma über Schnittfunktionen	43
10.2.3	Satz von Tornelli	44
10.2.4	Satz von Fubini	44
10.3	Produktmaße für n Faktoren	45
10.3.1	Definition: Produkt n messbarer Räume	46
10.3.2	Satz über die Existenz eines Produktmaßes	46
10.3.3	Definition: Produktmaß	46
10.3.4	Satz von Fubini	46
10.3.5	Das n -dimensionale Lebesgue-Maß	47
10.3.6	Lemma über das n -dimensionale Lebesgue-Maß	47
10.3.7	n -faches Produkt von Wahrscheinlichkeitsräumen	47
10.3.8	Satz über Wahrscheinlichkeitsmaße auf Produkträumen	47
10.4	Produktmaße mit unendlich vielen Faktoren	48
10.4.1	Lemma über die \mathcal{G}_n	48
10.4.2	Definition: Produkt unendlich vieler Wahrscheinlichkeitsräume	48
10.4.3	Lemma: Einführung einer Mengenfunktion auf \mathcal{A}	48
10.4.4	Satz: Fortsetzung zu einem Wahrscheinlichkeitsmaß auf (Ω, \mathcal{F})	48
10.4.5	Definition: Produkt unendlich vieler Wahrscheinlichkeitsmaße	49
10.4.6	Konstruktion unabhängiger Folgen zufälliger Variablen gegebener Verteilung	49
11	L^p-Räume und Dichtefunktionen	50
11.1	L^p -Räume	50
11.1.1	Einführung	50
11.1.2	Definition: L^p	50
11.1.3	Youngsche Ungleichung	50
11.1.4	Höldersche Ungleichung	50
11.1.5	Minkowski Ungleichung	51
11.1.6	Satz: Der L^p als Banach-Raum	51
11.2	Dichtefunktionen	51
11.2.1	Satz: Durch messbare Funktionen induzierte Maße	51
11.2.2	Definition: Dichtefunktion	51
11.2.3	Satz: Eindeutigkeit von Dichtefunktionen	51
11.2.4	Definition: Absolute Stetigkeit von Maßen	51
11.2.5	Satz von Radon-Nycodym	52
11.2.6	Representationstheorem von Frechet-Riesz	52

11.2.7 Satz: Integrale über Dichten	52
11.3 Singularität von Maßen	52
11.3.1 Zerlegungssatz von Hahn - Lebesque	53
12 Transformation des Lebesque Maßes	54
12.0.2 Satz: Substitutionsregel für das Riemann-Integral ($n = 1$)	54
12.1 Lineare Transformationen	54
12.1.1 Satz über das n -dimensionale Lebesque-Maß	54
12.1.2 Lemma: Zerlegung von Endomorphismen	54
12.1.3 Satz: Das Lebesque-Maß unter linearer Transformation	54
12.2 Nicht lineare Transformationen	55
12.2.1 Satz: Maß diffeomorpher Mengen	55
12.2.2 Satz über das Bildmaß $\lambda_{t^{-1}}$	55
12.2.3 Substitutionsregel	56
12.2.4 Abschwächung der Bedingungen	56
12.3 Anwendungen	56
12.3.1 Polarkoordinaten ($n = 2$)	56
12.3.2 Zylinderkoordinaten ($n = 3$)	56
12.3.3 Kugelkoordinaten ($n = 3$)	57
13 Ergänzungen	58
13.1 Lebesque-Stieltjes Integral	58
13.1.1 Definition: Lebesque-Stieltjes Integral	58
13.1.2 Definition: Beschränkte Variation	58
13.1.3 Satz: Jordan Komposition von Funktionen lokal beschränkter Variation	58
13.1.4 Verallgemeinerung des Lebesque-Stieltje Integrals	58
13.2 Uneigentliche Riemann-Integrale	59
13.3 Der Satz von Daniell	59
13.3.1 Einführung	59
13.3.2 Definition: Riesz-Raum	59
13.3.3 Satz von Daniell	59
13.4 Der Satz von Frigyes Riesz	60
13.4.1 Satz von Frigyes Riesz	60

1 Vorwort

1.1 Was dies ist

Hierbei handelt es sich um grobe Aufzeichnungen des Stoffes der im SS 2008 an der FSU Jena von Prof. H.J. Engelberg im Fach Maß & Integrationstheorie gelehrt wurde. Dabei sind Beweise im allgemeinen nicht vorhanden da ich selber nur endlich viel Zeit habe. Wo möglich, versuchte ich eigene hilfreiche Kommentare hinzuzufügen!

1.2 Verbesserungen

Ich werde immer mal dieses Skript verbessern bzw. erweitern. Im Falle von Fehlern, ist mir Bescheid zu sagen das beste was du machen kannst da so alle davon profitieren können. Wissen ist das einzige auf dieser Welt das vom Teilen mehr wird! Ich bin zu erreichen unter *stilianos.louca@apfel.uni-jena.de*, ohne das *Obst*.

2 Messbare Räume

2.1 Algebren und σ -Algebren

Sei $M \neq \emptyset$ eine beliebige Menge und $\mathcal{P}(M)$ die Potenzmenge von M .

Notation: A^c sei das Komplement von A , d.h. $A^c = M \setminus A$.

2.1.1 Definition: Mengenalgebra

Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(M)$ heißt *Mengenalgebra* (kurz: Algebra) über M (bzw. von Teilmengen von M) falls gilt:

- a) $M \in \mathcal{A}$
- b) Ist $A \in \mathcal{A}$ so ist $A^c \in \mathcal{A}$
- c) Sind $A, B \in \mathcal{A}$ so ist auch $A \cup B \in \mathcal{A}$

Bemerkung: Eine Algebra \mathcal{A} ist stets abgeschlossen gegenüber Bildung beliebiger Mengentheoretischer Operationen über endlich vielen Mengen. Insbesondere folgt aus $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ dass

$$\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$$

ist, denn es ist $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c \in \mathcal{A}$ für $A, B \in \mathcal{A}$.

Ferner enthält jede Algebra auch die leere Menge $\emptyset = M^c$.

2.1.2 Definition: σ -Algebra

Ein Mengensystem $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(M)$ heißt *σ -Algebra* über M falls gilt:

- a) $M \in \mathcal{M}$
- b) Aus $A \in \mathcal{M}$ folgt $A^c \in \mathcal{M}$
- c) Sind $A_n \in \mathcal{M}$, $n \in \mathbb{N}$ so ist $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$

2.1.3 Aussage über σ -Algebren

Jede σ Algebra \mathcal{M} ist auch eine Algebra.

Beweis: Seien $A, B \in \mathcal{M}$. Konstruieren die Folge

$$(A_n) \subset \mathcal{M}, \quad A_1 := A, A_2 := B, A_n := \emptyset \text{ für } n \geq 3$$

So folgt

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A \cup B \in \mathcal{M}$$

Bemerkung: Eine σ -Algebra \mathcal{M} ist abgeschlossen bzgl. der Bildung beliebiger mengentheoretischer Operationen über abzählbaren vielen Mengen aus \mathcal{M} . Insbesondere folgt für $A_n \in \mathcal{M}$, $n \in \mathbb{N}$:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_k = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c \right)^c \in \mathcal{M}$$

2.1.4 Aussage über Durchschnitte von Algebren

Sei I ein beliebiger Indexbereich. Dann gilt:

- a) Ist \mathcal{A}_i eine Algebra, $i \in I$, so ist auch

$$\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$$

eine Algebra.

- b) Ist \mathcal{M}_i eine σ -Algebra, $i \in I$, so ist auch

$$\bigcap_{i \in I} \mathcal{M}_i$$

eine σ -Algebra.

2.1.5 Aussage über kleinste Algebren

Sei $\mathcal{S} \in \mathcal{P}(M)$ ein beliebiges Mengensystem. Dann gilt:

- a) Es existiert eine kleinste Algebra $\alpha(\mathcal{S})$ die \mathcal{S} enthält, das heißt

- $\alpha(\mathcal{S})$ Algebra
- $\mathcal{S} \in \alpha(\mathcal{S})$
- Falls \mathcal{A} eine Algebra mit $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$ ist, dann ist auch $\alpha(\mathcal{S}) \in \mathcal{A}$

Es gilt: $\alpha(\mathcal{S})$ ist eindeutig bestimmt. Letzteres ist klar, denn aus $\alpha_1(\mathcal{S}) \subset \alpha_2(\mathcal{S})$ und $\alpha_2(\mathcal{S}) \subset \alpha_1(\mathcal{S})$ folgt $\alpha_1(\mathcal{S}) = \alpha_2(\mathcal{S})$.

- b) Es existiert eine kleinste σ -Algebra $\sigma(\mathcal{S})$ die \mathcal{S} enthält, das heißt

- $\sigma(\mathcal{S})$ ist σ -Algebra
- $\mathcal{S} \subset \sigma(\mathcal{S})$
- Falls \mathcal{M} eine σ -Algebra ist mit $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}$, so ist auch $\sigma(\mathcal{S}) \subset \mathcal{M}$

Auch hier ist $\sigma(\mathcal{S})$ eindeutig bestimmt.

Das System \mathcal{S} heißt *Erzeuger* (oder *Erzeugendensystem*) für $\alpha(\mathcal{S})$ bzw. $\sigma(\mathcal{S})$.

Beweis der Existenz: Das System

$$\alpha(\mathcal{S}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{S} \subset \mathcal{A} \\ \mathcal{A} \text{ Algebra}}} \mathcal{A}$$

ist eine Algebra, enthält \mathcal{S} und ist die kleinste solche. Analog ist

$$\sigma(\mathcal{S}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{S} \subset \mathcal{M} \\ \mathcal{M} \text{ } \sigma\text{-Algebra}}} \mathcal{M}$$

die kleinste σ -Algebra die \mathcal{S} enthält.

2.1.6 Definition: Messbarer Raum

Es sei $M \neq \emptyset$ eine beliebige Menge und $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(M)$ eine σ -Algebra. Dann heißt:

- (M, \mathcal{M}) *messbarer Raum*
- $A \in \mathcal{M}$ *messbare Menge*

Beispiele: Sei $M \neq \emptyset$.

- a) $\mathcal{M} := \{\emptyset, M\}$ ist eine σ -Algebra.
- b) $\mathcal{M} = \mathcal{P}(M)$ ist eine σ -Algebra.

2.1.7 Satz über messbare Räume

Sei (M, \mathcal{M}) ein messbarer Raum, $M_0 \subset M$ beliebig und

$$\mathcal{M}_0 := \mathcal{M} \cap M_0 := \{A \cap M_0 \mid A \in \mathcal{M}\}$$

Dann gilt: (M_0, \mathcal{M}_0) ist ein messbarer Raum.

2.1.8 Definition: Messbarer Unterraum

Sei $M \neq \emptyset$, $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(M)$ eine σ -Algebra und $M_0 \subset M$ beliebig. Dann heißt (M_0, \mathcal{M}_0) *messbarer Unterraum* von (M, \mathcal{M}) oder *Spur* von (M, \mathcal{M}) auf M_0 . Ähnlich heißt \mathcal{M}_0 *Spur* von \mathcal{M} auf M_0 .

2.1.9 Hilfssatz über σ -Algebren auf Untermengen

Sei $M \neq \emptyset$ eine beliebige Menge, $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(M)$ und $M_0 \subset M$. Es bezeichne $\sigma_M(\mathcal{S})$ die von \mathcal{S} in M erzeugte σ -Algebra, das heißt die kleinste σ -Algebra über Teilmengen von M die \mathcal{S} enthält. Dann gilt:

$$\sigma_M(\mathcal{S}) \cap M_0 = \sigma_{M_0}(\mathcal{S} \cap M_0)$$

2.1.10 Definition: Halbgebra

Das Mengensystem $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(M)$ heißt *Halbgebra* von Teilmengen von M (über M), falls gilt:

- a) $M \in \mathcal{C}$
- b) Sind $A, B \in \mathcal{C}$ so ist auch $A \cap B \in \mathcal{C}$
- c) Ist $A \in \mathcal{C}$ so existieren paarweise disjunkte (p.d.) Teilmengen $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{C}$ mit

$$A^c = \bigcup_{k=1}^n A_k$$

Bemerkung: Jede Algebra \mathcal{A} ist eine Halbgebra.

2.2 Monotone Klassen

Sei $M \neq \emptyset$ eine beliebige Menge und $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(M)$.

2.2.1 Definition: Monotone Klasse

Ein Mengensystem \mathcal{K} heißt *monotone Klasse*, falls gilt:

- Für $A_n \in \mathcal{K}$, $A_n \subset A_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ ist $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{K}$
- Für $A_n \in \mathcal{K}$, $A_{n+1} \subset A_n$, $n \in \mathbb{N}$ ist $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{K}$

Bemerkung: Jede σ -Algebra ist eine monotone Klasse.

2.2.2 Satz über monotone Klassen und σ -Algebren

Sei $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(M)$.

Dann gilt: \mathcal{M} ist eine σ -Algebra \Leftrightarrow

- a) \mathcal{M} ist eine Algebra, und
- b) \mathcal{M} ist eine monotone Klasse

Beweis: Notwendigkeit: Jede σ -Algebra ist eine Algebra und eine monotone Klasse (klar!)

Hinreichende Bedingung: Zu zeigen ist: \mathcal{M} ist eine σ -Algebra unter den Bedingungen (a) und (b). Also:

- $M \in \mathcal{M}$ da \mathcal{M} eine Algebra ist.
- Ist $A \in \mathcal{M}$ so ist auch $A^c \in \mathcal{M}$ da \mathcal{M} eine Algebra ist.
- Seien $A_n \in \mathcal{M}$, $n \in \mathbb{N}$. Setzen:

$$B_n := \bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{M}$$

Es gilt: $B_n \subset B_{n+1}$. Folglich gilt

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{M}$$

da \mathcal{M} eine monotone Klasse ist. \square

2.2.3 Der monotone Klassensatz

Sei $M \neq \emptyset$, $\mathcal{A}, \mathcal{K} \subset \mathcal{P}(M)$ mit

- \mathcal{A} Algebra
- \mathcal{K} monotone Klasse
- $\mathcal{A} \subset \mathcal{K}$

Dann gilt: $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{K}$.

2.3 Dynkin Systeme

2.3.1 Definition: Dynkin System

Sei $M \neq \emptyset$ und $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(M)$. Das System \mathcal{D} heißt *Dynkin System*, falls gilt:

- 1) $M \in \mathcal{D}$
- 2) Für $A \in \mathcal{D}$ folgt auch $A^c \in \mathcal{D}$
- 3) Für $A_n \in \mathcal{D}$, $n \in \mathbb{N}$ paarweise disjunkte Mengen, folgt

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$$

Bemerkungen:

- i) Ist \mathcal{D} Dynkin System, so ist $\emptyset \in \mathcal{D}$
- ii) Ist \mathcal{D} Dynkin System, so folgt für paarweise disjunkte $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{D}$ auch

$$\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{D}$$

iii) Ist \mathcal{D} Dynkin System so folgt (2'): Für $A, B \in \mathcal{D}$, $A \subset B$ folgt $B \setminus A \in \mathcal{D}$

Also: \mathcal{D} ist Dynkin System \Leftrightarrow Es gelten die Eigenschaften 1,2',3

Beweis:

$$B \setminus A = B \cap A^c = ((B \cap A^c)^c)^c = (B^c \cup A)^c$$

$$\text{Doch: } B, A \in \mathcal{D} \Rightarrow B^c \in \mathcal{D} \wedge B^c \cap A = \emptyset \Rightarrow B^c \cup A \in \mathcal{D} \Rightarrow (B^c \cup A)^c \in \mathcal{D} \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{D}$$

iv) Unterschied zur σ -Algebra: In einem Dynkin System gehören im allgemeinen nur Vereinigungen von paarweise disjunkte Folgen (A_n) zu \mathcal{D} .

2.3.2 Definition: π -System

Sei $M \neq \emptyset$ und $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(M)$. \mathcal{C} heißt π -System falls gilt: Für $A, B \in \mathcal{C}$ folgt $A \cap B \in \mathcal{C}$.

2.3.3 Satz über π -Systeme und σ -Algebren

Sei $M \neq \emptyset$ und gegeben ein System $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(M)$. Dann gilt:

\mathcal{M} ist eine σ -Algebra: \Leftrightarrow

- a) \mathcal{M} ist ein π -System
- b) \mathcal{M} ist ein Dynkin System

2.3.4 Definition: Kleinstes Dynkin System

Sei $M \neq \emptyset$ und $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(M)$. Dann heißt $\delta(\mathcal{S})$ *kleinstes Dynkin System*, mit $\mathcal{S} \subset \delta(\mathcal{S})$. Es ist

$$\delta(\mathcal{S}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(M) \\ \mathcal{S} \subset \mathcal{D} \\ \mathcal{D} \text{ Dynkin System}}} \mathcal{D}$$

Bemerkung: Es ist $\delta(\mathcal{S}) \subset \sigma(\mathcal{S})$.

2.3.5 Satz über Dynkin Systeme

Sei $M \neq \emptyset$. Gegeben seien $\mathcal{C}, \mathcal{D} \subset \mathcal{P}(M)$ mit folgenden Eigenschaften:

- a) \mathcal{C} sei π -System
- b) \mathcal{D} sei Dynkin System
- c) $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$

Dann folgt: $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{D}$

Bemerkung: Es folgt sogar: $\sigma(\mathcal{C}) = \delta(\mathcal{C})$, denn $\delta(\mathcal{C})$ ist ein Dynkin System.

3 Maßräume

3.1 Maße

Sei $M \neq \emptyset$ eine beliebige Menge.

3.1.1 Definition: Mengenfunktion

Sei $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(M)$. Eine Abbildung $\mu : \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$ heißt *nicht negative Mengenfunktion* auf \mathcal{S} .

3.1.2 Definition: Maß

Sei $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(M)$ eine σ -Algebra über M . Eine nicht negative Mengenfunktion μ auf \mathcal{M} heißt *Maß* auf \mathcal{M} falls gilt:

- $\mu(\emptyset) = 0$
- σ -Additivität: Für paarweise disjunkte $A_n \in \mathcal{M}$, $n \in \mathbb{N}$ folgt:

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Das Tripel (M, \mathcal{M}, μ) heißt *Maßraum*.

Bemerkung: Der Wert $\mu(A) = \infty$ ist zugelassen!

3.1.3 Definition: Inhalt

Sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(M)$ eine Algebra über M . Eine nicht negative Mengenfunktion μ auf \mathcal{A} heißt *Inhalt* auf \mathcal{A} , falls gilt:

- $\mu(\emptyset) = 0$
- Additivität: Für disjunkte $A, B \in \mathcal{A}$ gilt:

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

3.1.4 Definition: Prämaß

Sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(M)$ eine Algebra über M . Eine nicht negative Mengenfunktion μ auf \mathcal{A} heißt *Prämaß* auf (M, \mathcal{A}) falls gilt:

- $\mu(\emptyset) = 0$
- Für paarweise disjunkte $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$ mit $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ folgt:

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Bemerkungen:

- Jede σ -Algebra \mathcal{M} ist eine Algebra.
- Jedes Maß μ ist auch ein Prämaß.
- Jedes Prämaß auf (M, \mathcal{A}) ist auch ein Inhalt.

3.1.5 Definition: Endliches Maß

Ein Maß μ auf (M, \mathcal{M}) (bzw. Prämaß, Inhalt auf (M, \mathcal{M})) heißt *endlich*, falls $\mu(M) < \infty$ gilt. Ein Maßraum (M, \mathcal{M}, μ) heißt endlich, falls μ endlich ist.

3.1.6 Eigenschaften von Maßen

Sei (M, \mathcal{M}) ein messbarer Raum und μ ein Maß auf (M, \mathcal{M}) . Dann gilt:

- **Additivität:** Für disjunkte $A, B \in \mathcal{M}$ folgt:

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

Beweis: Setzen $A_1 := A$, $A_2 := B$, $A_n := \emptyset$, $n \geq 3$.

- **Monotonie:** Für $A, B \in \mathcal{M}$, $A \subset B$ gilt: $\mu(A) \leq \mu(B)$.

Beweis:

$$\mu(B) = \mu(A \cup (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$$

- **Endlichkeit:** Sei μ endliches Maß. Dann gilt: $\mu(A) < \infty$ für alle $A \in \mathcal{M}$.

Beweis: Folgt direkt aus der Monotonie.

- **Subtraktivität:** Für $A, B \in \mathcal{M}$, $A \subset B$ und $\mu(A) < \infty$ folgt:

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$$

Beweis: $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$

- **Maß des Komplements:** Für $A \in \mathcal{M}$ mit $\mu(A) < \infty$ ist

$$\mu(A^c) = \mu(M) - \mu(A)$$

Beweis: Spezialfall der Subtraktivität.

- **Starke Additivität:** Für $A, B \in \mathcal{M}$ gilt:

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$$

Beweis: Zum einen ist

$$\mu(A \cup B) = \mu((A \cap B) \cup (A \setminus B) \cup (B \setminus A)) = \mu(A \cap B) + \mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus A)$$

und zum anderen:

$$\mu(A) = \mu(A \cap B) + \mu(A \setminus B), \quad \mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A)$$

In einander eingesetzt beweist die Behauptung.

- **Subadditivität:** Für $A_n \in \mathcal{M}$, $n \in \mathbb{N}$ gilt die Ungleichung:

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Beweis: Setzen $A'_1 := A_1$, $A'_{n+1} := A_{n+1} \setminus \bigcup_{j=1}^n A_j$. Dann sind $A'_j \in \mathcal{M}$ paarweise disjunkt und $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A'_n$.

Demnach:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A'_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

- **Stetigkeit von unten:** Für $A_n \in \mathcal{M}$, $A_n \subset A_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ ist:

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$$

- **Stetigkeit von oben:** Für $A_n \in \mathcal{M}$, $A_{n+1} \subset A_n$, $n \in \mathbb{N}$ mit: $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \mu(A_{n_0}) < \infty$ gilt:

$$\mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$$

- **Stetigkeit der leeren Menge:** Für $A_n \in \mathcal{M}$, $A_{n+1} \subset A_n$, $n \in \mathbb{N}$ und $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$ sowie $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \mu(A_{n_0}) < \infty$ folgt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = 0$$

Beweis: Direkte Folgerung aus Stetigkeit von oben.

3.1.7 Beispiele von Maßen

Sei (M, \mathcal{M}) ein beliebiger messbarer Raum.

- **Dirac Maß:** Gegeben sei $\chi \in M$. Dann ist

$$\delta_\chi(A) := \begin{cases} 1 & : \chi \in A \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

ein Maß auf (M, \mathcal{M}) und heißt *Dirac Maß* in $\chi \in M$ (δ -Maß oder *Einheitsmaß* in χ).

- Sind $\mu_n, n \in \mathbb{N}$ Maße auf (M, \mathcal{M}) , so ist auch μ definiert durch

$$\mu(A) := \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(A), \quad A \in \mathcal{M}$$

ein Maß auf (M, \mathcal{M}) . Notation: $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$

- **Multiplikation mit Skalaren:** Ist μ ein Maß auf (M, \mathcal{M}) so ist auch für $\alpha \in [0, \infty]$ die Abbildung

$$(\alpha\mu)(A) := \alpha \cdot \mu(A), \quad A \in \mathcal{M}$$

ein Maß auf (M, \mathcal{M}) .

Bemerkung: Nach Vereinbarung ist $0 \cdot \infty = 0$.

- **Nullmaß:** Die Abbildung $\mu(A) = 0, A \in \mathcal{M}$ ist insbesondere ein Maß.
- Sind $\mu_n, n \in \mathbb{N}$ Maße auf (M, \mathcal{M}) und $\alpha_n \in [0, \infty]$, so ist auch

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot \mu_n$$

ein Maß auf (M, \mathcal{M}) .

- **Diskretes Maß:** Insbesondere ist

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \delta_{\chi_n}$$

für $\alpha_n \in [0, \infty], \chi_n \in M$ ein Maß auf (M, \mathcal{M}) .

Bemerkung: Für $A \cap \{\chi_1, \chi_2, \dots\} = \emptyset$ ist $\mu(A) = 0$. Man sagt: μ ist konzentriert auf $\{\chi_1, \chi_2, \dots\}$.

- **Monotoner Grenzwert:** Sind $\mu_n, n \in \mathbb{N}$ Maße auf (M, \mathcal{M}) und $\mu_n \leq \mu_{n+1}$, das heißt $\mu_n(A) \leq \mu_{n+1}(A) \forall A \in \mathcal{M}$, so ist auch

$$\mu(A) := \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A), \quad A \in \mathcal{M}$$

ein Maß auf (M, \mathcal{M}) .

- **Zählmaß:** Für $M = \mathbb{N}$ und $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ heißt

$$\mu := \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n$$

Zählmaß. Es ist also $\mu(A) = |A|$ für $A \subset \mathbb{N}$.

- Jedes Wahrscheinlichkeitsmaß \mathcal{P} auf (M, \mathcal{M}) ist ein Maß mit $\mathcal{P}(M) = 1$.

3.2 Der Eindeutigkeitsatz für Maße

Gegeben sei der messbare Raum (M, \mathcal{M}) . Betrachten Maße μ_1, μ_2 auf (M, \mathcal{M}) .

Häufige Fragestellung: Gilt $\mu_1 = \mu_2$?

Problem: Wie überprüft man $\mu_1(A) = \mu_2(A) \forall A \in \mathcal{M}$?

Wunsch: Aussage der Gestalt: Falls $\mu_1(A) = \mu_2(A)$ erfüllt ist für A einfacher Struktur, so folgt bereits die Gleichheit der Maße auf \mathcal{M} .

Also gegeben: Mengensystem $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}$

Gesucht: Bedingungen an die Struktur von \mathcal{S} , so dass gilt: $\mu_1(A) = \mu_2(A)$ auf $\mathcal{S} \Rightarrow \mu_1 = \mu_2$ auf \mathcal{M} .

3.2.1 Eindeutigkeitsatz für endliche Maße

Sei (M, \mathcal{M}) ein beliebiger messbarer Raum und μ_1, μ_2 endliche Maße auf (M, \mathcal{M}) . Weiterhin sei $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}$ und folgende Eigenschaften seien erfüllt:

- $\sigma(\mathcal{S}) = \mathcal{M}$
- $M \in \mathcal{S}$
- \mathcal{S} ist ein π -System.
- $\mu_1(A) = \mu_2(A)$ auf \mathcal{S}

Dann folgt: $\mu_1 = \mu_2$ auf \mathcal{M} , das heißt $\mu_1(A) = \mu_2(A) \forall A \in \mathcal{M}$.

3.2.2 Eindeutigkeitsatz für Maße

Seien μ_1, μ_2 Maße auf dem messbaren Raum (M, \mathcal{M}) und $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}$ mit den Eigenschaften:

- $\sigma(\mathcal{S}) = \mathcal{M}$
- $\exists M_n \in \mathcal{S}$ mit $M_n \subset M_{n+1}$ und $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n = M$ und $\mu_i(M_n) < \infty$ für $n \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2$
- \mathcal{S} ist ein π -System.
- $\mu_1(A) = \mu_2(A)$ für $A \in \mathcal{S}$

Dann gilt: $\mu_1 = \mu_2$ auf \mathcal{M} .

3.3 σ -endliche Maße

3.3.1 Definition: σ -Endlichkeit

Sei (M, \mathcal{M}) ein messbarer Raum, $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}$ und μ ein Maß auf (M, \mathcal{M}) . Das Maß μ heißt σ -endlich auf \mathcal{S} , falls es Mengen $M_n \in \mathcal{S}$, $n \in \mathbb{N}$ gibt mit:

- $M_n \subset M_{n+1}$
- $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n = M$
- $\mu(M_n) < \infty$ für $n \in \mathbb{N}$

Das Maß μ heißt σ -endlich, falls es σ -endlich auf \mathcal{M} ist. Dann heißt der Maßraum (M, \mathcal{M}) endlich.

Bemerkung: Die Forderung der Monotonie $M_n \subset M_{n+1}$ ist eigentlich nicht notwendig, da man aus den anderen beiden Bedingungen immer eine Folge M'_n konstruieren kann die auch diese erfüllt.

4 Konstruktion von Maßen

4.1 Der Fortsetzungssatz von Caratheodory

Sei (M, \mathcal{M}) ein beliebiger messbarer Raum, $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ eine Algebra und $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{M}$.

Beispiel:

$$M = \mathbb{R}, \mathcal{S} = \{[a, b] \cap \mathbb{R}, -\infty \leq a < b \leq \infty\}, \mathcal{A} = \alpha(\mathcal{S})$$

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) := \sigma(\mathcal{S}) = \sigma(\mathcal{A}) : \sigma\text{-Algebra der Borelmengen aus } \mathbb{R}$$

4.1.1 Fortsetzungssatz (C.Caratheodory)

Es sei μ ein Prämaß auf (M, \mathcal{A}) . Dann folgt:

- a) Es existiert stets ein Maß $\tilde{\mu}$ auf (M, \mathcal{M}) mit:

$$\tilde{\mu}(A) = \mu(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

das heißt $\tilde{\mu}$ ist eine Fortsetzung von μ auf \mathcal{M} .

- b) Ist das Prämaß μ σ -endlich auf \mathcal{A} , so ist $\tilde{\mu}$ eindeutig bestimmt, das heißt: Falls $\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2$ auf (M, \mathcal{M}) mit

$$\tilde{\mu}_1(A) = \mu(A) = \tilde{\mu}_2(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

sind, so folgt: $\tilde{\mu}_1(A) = \tilde{\mu}_2(A)$ auf \mathcal{M} .

Bemerke: Das Maß $\tilde{\mu}$ ist ebenfalls σ -endlich.

4.2 Das äußere Maß

4.2.1 Definition: \mathcal{A}_σ

Sei \mathcal{A} eine Algebra auf M . Dann ist:

$$\mathcal{A}_\sigma := \left\{ A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \mid A_n \in \mathcal{A}, A_n \subset A_{n+1}, n \geq 1 \right\}$$

4.2.2 Satz über \mathcal{A}_σ

Für eine Algebra \mathcal{A} gilt:

- i) $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_\sigma$, insbesondere $\emptyset, M \in \mathcal{A}_\sigma$
- ii) Für $A, B \in \mathcal{A}_\sigma$ ist auch $A \cap B, A \cup B \in \mathcal{A}_\sigma$
- iii) Für $A_n \in \mathcal{A}_\sigma, A_n \subset A_{n+1}, n \geq 1$ ist auch $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}_\sigma$

Bemerke:

- \mathcal{A}_σ ist im allgemeinen keine Algebra und insbesondere keine σ -Algebra.
- \mathcal{A}_σ ist im allgemeinen keine monotone Klasse.
- $A \in \mathcal{A}_\sigma \not\Rightarrow A^c \in \mathcal{A}_\sigma$

4.2.3 Definition: Fortsetzung des Prämaßes auf \mathcal{A}_σ

Sei μ ein Prämaß auf (M, \mathcal{A}) . Dann definieren wir für $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}_\sigma$, $A_n \subset A_{n+1} \in \mathcal{A}$:

$$\mu'(A) := \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$$

Bemerkung: Dieser Grenzwert existiert, da das Prämaß μ monoton auf \mathcal{A} ist.

4.2.4 Lemma über die Eindeutigkeit von μ'

Seien $A, B \in \mathcal{A}_\sigma$, $A \subset B$, $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$, $A_n \subset A_{n+1} \in \mathcal{A}$, $B_n \subset B_{n+1} \in \mathcal{A}$. Dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n)$$

Bemerkung: Aus diesem Lemma folgt die Korrektheit der Definition μ' , das heißt dass der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$ nicht von der Auswahl der Folge A_n abhängt. Denn für $A = B$ ergebe sich

$$\mu'(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) = \mu'(B)$$

4.2.5 Eigenschaften von μ'

Die Mengenfunktion μ' auf \mathcal{A}_σ besitzt folgende Eigenschaften:

- $\mu'(A) = \mu(A)$ für $A \in \mathcal{A}$. Insbesondere ist auch $\mu'(\emptyset) = 0$.
- μ' ist stark additiv auf \mathcal{A}_σ , das heißt für $A, B \in \mathcal{A}_\sigma$ gilt:

$$\mu'(A \cup B) + \mu'(A \cap B) = \mu'(A) + \mu'(B)$$

- μ' ist monoton auf \mathcal{A}_σ , das heißt für $A, B \in \mathcal{A}_\sigma$, $A \subset B$ folgt $\mu'(A) \leq \mu'(B)$.
- μ' ist stetig von unten auf \mathcal{A}_σ , das heißt für $A_n \in \mathcal{A}_\sigma$, $A_n \subset A_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ ist:

$$\mu' \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu'(A_n)$$

4.2.6 Definition: Äußeres Maß

Für $A \subset M$ definiert man das *äußere Maß* μ^* gemäß:

$$\mu^*(A) := \inf_{\substack{B \in \mathcal{A}_\sigma \\ A \subset B}} \mu'(B)$$

Bemerkungen:

- Ab nun bezeichnen wir μ' mit μ , also einfach als Erweiterung des Prämaßes μ auf \mathcal{A}_σ .
- Die Mengenfunktion μ^* auf $\mathcal{P}(M)$ ist in der Regel kein Maß auf $\mathcal{P}(M)$.
- μ^* ist in der Regel nicht additiv.

4.2.7 Eigenschaften des äußeren Maßes

Das äußere Maß μ^* auf $\mathcal{P}(M)$ besitzt die folgenden Eigenschaften:

- a) $\mu^*(A) = \mu(A)$ für $A \in \mathcal{A}_\sigma$
- b) μ^* ist stark subadditiv: Für $A, B \subset M$ ist

$$\mu^*(A \cup B) + \mu^*(A \cap B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

- c) μ^* ist monoton.
- d) μ^* ist stetig von unten: Für $A_n \subset A_{n+1} \subset M$, $n \in \mathbb{N}$ ist:

$$\mu^* \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu^*(A_n)$$

4.3 Einschränkung des äußeren Maßes

Sei μ ein Prämaß auf (M, \mathcal{A}) und $\mathcal{M} := \sigma(\mathcal{A})$. Betrachten die Fortsetzung μ^* von μ auf $\mathcal{P}(M)$.

4.3.1 Definition: $\overline{\mathcal{M}}$

Definieren

$$\overline{\mathcal{M}} := \{A \subset M \mid \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E) = \mu^*(E) \forall E \subset M\}$$

4.3.2 Satz über $\overline{\mathcal{M}}$

- $\overline{\mathcal{M}}$ ist eine σ -Algebra.
- $\mathcal{A} \subset \mathcal{M} \subset \overline{\mathcal{M}}$

4.3.3 Definition: Einschränkung von μ^* auf $\overline{\mathcal{M}}$

Für $A \in \overline{\mathcal{M}}$ sei $\bar{\mu} := \mu^*(A)$ die Einschränkung von μ^* auf $\overline{\mathcal{M}}$.

4.3.4 Satz über $\bar{\mu}$

$\bar{\mu}$ ist ein Maß auf $(M, \overline{\mathcal{M}})$. Somit ist insbesondere $\bar{\mu}$ eine Fortsetzung des Prämaßes μ auf \mathcal{A} zu einem Maß auf $\overline{\mathcal{M}}$ (und somit auch auf $\mathcal{M} \subset \overline{\mathcal{M}}$), denn

$$\bar{\mu}(A) = \mu(A) \text{ für } A \in \mathcal{A}$$

Somit ist der Existenzsatz von Caratheodory bestätigt.

Folgerungen:

- Es ist $\bar{\mu}(A) = \inf_{A \subset B \in \mathcal{A}_\sigma} \mu(B)$ für $A \in \overline{\mathcal{M}}$.
- Sei μ endlich auf \mathcal{A} . Dann folgt:

$$\sup_{\substack{B \subset A \\ B \in \mathcal{A}_\delta}} \mu(B) = \bar{\mu}(A) = \inf_{\substack{A \subset B \\ B \in \mathcal{A}_\sigma}} \mu(B)$$

wobei

$$\mathcal{A}_\delta := \left\{ A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \mid A_{n+1} \subset A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

4.4 Approximationseigenschaften

Sei (M, \mathcal{M}, μ) ein beliebiger endlicher Maßraum und $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ eine Algebra mit $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{M}$.

4.4.1 Approximationssatz

Es gilt:

$$\text{a) } \sup_{\substack{B \subset A \\ B \in \mathcal{A}_\delta}} \mu(B) = \mu(A) = \inf_{\substack{A \subset B \\ B \in \mathcal{A}_\sigma}} \mu(B)$$

b) Sei $A \in \mathcal{M}$. Dann existieren $A_1 \in \mathcal{A}_{\delta_\sigma} := (\mathcal{A}_\delta)_\sigma$ und $A_2 \in \mathcal{A}_{\sigma_\delta} := (A_\sigma)_\delta$ mit

$$A_1 \subset A \subset A_2 \wedge \mu(A_1) = \mu(A) = \mu(A_2)$$

Bemerkung: Ist (M, \mathcal{M}, μ) nur σ -endlich, so gilt in (a) nur die rechte Gleichung

$$\mu(A) = \inf_{\substack{A \subset B \\ B \in \mathcal{A}_\sigma}} \mu(B)$$

4.5 Vervollständigung von Maßräumen

4.5.1 Definition: \mathcal{M}^μ

Sei (M, \mathcal{M}, μ) ein beliebiger Maßraum. Dann definiert man:

$$\mathcal{M}^\mu := \{A \subset M \mid \exists A_1, A_2 \in \mathcal{M} : A_1 \subset A \subset A_2 \wedge \mu(A_1 \Delta A_2) = 0\}$$

Lemma über \mathcal{M}^μ :

- $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}^\mu$
- \mathcal{M}^μ ist eine σ -Algebra.

4.5.2 Fortsetzung von μ auf \mathcal{M}^μ

Sei $A \in \mathcal{M}^\mu$ mit $A_1 \subset A \subset A_2$, $A_1, A_2 \in \mathcal{M}$, $\mu(A_1 \Delta A_2) = 0$. Dann setzt man:

$$\mu(A) := \mu(A_1) = \mu(A_2)$$

Bemerkung:

- Die Definition der Fortsetzung μ auf \mathcal{M}^μ ist korrekt, das heißt $\mu(A)$ ist unabhängig von A_1, A_2 .
- Die Mengenfunktion μ auf \mathcal{M}^μ ist ein Maß.

4.5.3 Definition: Vervollständigung

- \mathcal{M}^μ heißt die *Vervollständigung* von \mathcal{M} bzgl. μ .
- $(M, \mathcal{M}^\mu, \mu)$ heißt die *Vervollständigung* des Maßraumes (M, \mathcal{M}, μ) .
- Ein Maßraum (E, \mathcal{E}, μ) heist *vollständig*, falls für alle $A \subset E$ mit $A \subset \mathcal{N} \in \mathcal{E}$, $\mu(\mathcal{N}) = 0$ stets $A \in \mathcal{E}$ gilt (und damit auch $\mu(A) = 0$ erfüllt ist). Anders formuliert: Jede in einer Nullmenge enthaltene Menge, ist selbst eine Nullmenge.

4.5.4 Lemma über Vervollständigungen

Die Vervollständigung $(M, \mathcal{M}^\mu, \mu)$ von (M, \mathcal{M}, μ) ist vollständig.

4.5.5 Satz über $\bar{\mu}$ und die Vervollständigung $\mathcal{M}^{\bar{\mu}}$

Sei (M, \mathcal{M}) ein messbarer Raum, $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ eine Algebra mit $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{M}$, μ ein Prämaß auf (M, \mathcal{A}) , $\bar{\mathcal{M}}$ die σ -Algebra aus dem Beweis des Fortsetzungssatzes (4.3.1) und $\bar{\mu}$ die entsprechend konstruierte Fortsetzung von $\mu|_{\mathcal{A}}$ auf $\bar{\mathcal{M}}$. Dann folgt:

(i) $\mathcal{M}^{\bar{\mu}} \subset \bar{\mathcal{M}}$

(ii) Ist μ endlich, dann gilt $\mathcal{M}^{\bar{\mu}} = \bar{\mathcal{M}}$

5 Konstruktion von Prämaßen

Sei $M \neq \emptyset$ eine beliebige Menge.

5.0.6 Definition: Halbgebra

Ein Mengensystem $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(M)$ heißt *Halbgebra*, falls gilt:

- $M \in \mathcal{C}$
- Für $A, B \in \mathcal{C}$ ist auch $A \cap B \in \mathcal{C}$.
- Für $A \in \mathcal{C}$ existieren paarweise disjunkte $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{C}$ mit $A^c = \bigcup_{k=1}^n A_k$.

Bemerkungen:

- \mathcal{C} ist im allgemeinen nicht abgeschlossen bzgl. Vereinigungen, denn sonst wäre $A^c \in \mathcal{C}$
- Es ist $\emptyset \in \mathcal{C}$ denn für $\emptyset = M^c = \bigcup_{k=1}^n A_k$, $A_k \in \mathcal{C}$ folgt $A_k = \emptyset$.

Beispiel: Für $M = \mathbb{R}$ ist $\mathcal{M} := \mathcal{B}(\mathbb{R})$ die σ -Algebra der Borelmengen:

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{G}), \quad \mathcal{G} := \{G \subset \mathbb{R} \mid G \text{ offen}\}$$

$$\mathcal{C} := \{[a, b) \cap \mathbb{R} \mid -\infty \leq a \leq b \leq \infty\} : \text{Halbgebra}$$

Es ist: $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$

5.0.7 Lemma über Halbgebren

Sei \mathcal{C} eine Halbgebra und $\mathcal{A} = \alpha(\mathcal{C})$ die kleinste Algebra die \mathcal{C} enthält. Dann gilt:

$$\mathcal{A} = \left\{ A = \bigcup_{k=1}^n A_k \mid A_1, \dots, A_n \in \mathcal{C} \text{ paarweise disjunkt} \right\}$$

5.0.8 Satz über Mengenfunktionen auf Halbgebren

Sei μ eine nicht-negative Mengenfunktion auf einer Halbgebra \mathcal{C} mit

- $\mu(\emptyset) = 0$
- μ additiv auf \mathcal{C}

Dann gilt:

- (i) Es existiert genau eine Fortsetzung μ' zu einem Inhalt auf $\mathcal{A} = \alpha(\mathcal{C})$. Speziell ist dann:

$$\mu' = \sum_{k=1}^n \mu(A_k)$$

für $A = \bigcup_{k=1}^n A_k$, $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{C}$ paarweise disjunkt.

- (ii) Ist μ σ -additiv auf \mathcal{C} , so ist μ' ein Prämaß auf (M, \mathcal{A}) .

5.1 Kompakte Klassen

Problem: Wann ist ein Inhalt auf einer Algebra ein Prämaß?

5.1.1 Lemma über Inhalte auf Algebren

Sei $M \neq \emptyset$ eine beliebige Menge, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(M)$ eine Algebra, μ ein endlicher Inhalt auf (M, \mathcal{A}) . Dann gilt: μ ist ein Prämaß $\Leftrightarrow \mu$ ist stetig in \emptyset , das heißt für $A_{n+1} \subset A_n \in \mathcal{A}$, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$ ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = 0$.

5.1.2 Definition: Kompakte Klasse

Sei $M \neq \emptyset$ eine beliebige Menge. Ein Mengensystem $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(M)$ heißt *kompakte Klasse*, falls für alle Folgen $\mathcal{K}_n \in \mathcal{K}$ mit $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{K}_n = \emptyset$ folgt: Es existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\bigcap_{n=1}^N \mathcal{K}_n = \emptyset$$

Beispiel: Sei (E, ρ) ein metrischer Raum und

$$\mathcal{K} := \{K \subset E \mid K \text{ kompakt}\}$$

Dann ist \mathcal{K} eine kompakte Klasse.

5.1.3 Satz über kompakte Klassen

Sei $M \neq \emptyset$ eine beliebige Menge, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(M)$ eine Algebra und μ ein endlicher Inhalt auf (M, \mathcal{A}) . Es existiere eine kompakte Klasse $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(M)$ mit folgender Eigenschaft:

$$(*) \forall A \in \mathcal{A} \forall \varepsilon > 0 : \exists A' \in \mathcal{A}, K \in \mathcal{K} : A' \subset K \subset A \wedge \mu(A) - \mu(A') < \varepsilon$$

Dann ist μ ein Prämaß auf (M, \mathcal{A}) .

Bemerkungen:

- Im Spezialfall kann gelten: $\mathcal{K} \subset \mathcal{A}$. Dann bedeutet (*):

$$\sup_{\substack{K \in \mathcal{K} \\ K \subset A}} \mu(K) = \mu(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

- Der Satz gilt entsprechend für additive Mengen μ auf Halbgebren mit $\mu(\emptyset) = 0$.

6 Maße auf der reellen Achse

6.1 Borel-Mengen

6.1.1 Definition: Borel-Menge

Betrachten die Menge der reellen Zahlen \mathbb{R} . Das Mengensystem $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ definiert als

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) := \sigma(\mathcal{G}), \quad \mathcal{G} := \{G \subset \mathbb{R} \mid G \text{ offen}\}$$

heißt σ -Algebra der *Borel-Mengen*.

6.1.2 Lemma über Borel-Mengen

Es sei

$$\mathcal{C} := \{[a, b) \cap \mathbb{R} \mid -\infty \leq a \leq b \leq \infty\}$$

Dann gilt:

- (i) \mathcal{C} ist eine Halbgebra.
- (ii) $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$
- (iii) Für $\mathcal{A} = \alpha(\mathcal{C})$ ist $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$

6.1.3 Definition: Lokale Endlichkeit

Ein Maß μ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ heißt *lokal endlich*, falls für alle $x \in \mathbb{R}$ eine offene Menge G_x mit $x \in G_x$ und $\mu(G_x) < \infty$ existiert.

6.1.4 Lemma über lokal endliche Maße

Es sei μ ein Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Dann gilt:

- (i) μ ist lokal endlich $\Leftrightarrow \mu([-n, n]) < \infty \forall n \geq 1$
- (ii) μ ist lokal endlich $\Rightarrow \mu$ ist σ -endlich. Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht!

6.2 Maß-erzeugende Funktionen

6.2.1 Satz über lokal endliche Maße

Sei μ ein lokal endliches Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Dann existiert eine Funktion $F_\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften:

- F_μ ist monoton wachsend.
- F_μ ist links-stetig.

so dass gilt:

$$\mu([a, b)) = F_\mu(b) - F_\mu(a)$$

Bemerkung: F_μ ist im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt.

6.2.2 Satz über links-stetige, monoton wachsende Funktionen

Sei $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit den Eigenschaften:

- F ist monoton wachsend.
- F ist links-stetig.

Dann existiert ein eindeutig bestimmtes Maß μ auf dem messbaren Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit der Eigenschaft:

$$\mu([a, b)) = F(b) - F(a) , \quad a < b \in \mathbb{R}$$

Das so induzierte Maß ist lokal endlich.

6.2.3 Definition: Maß-erzeugende Funktion

- Eine Funktion $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit den beiden Eigenschaften aus dem vorigen Satz heißt *maß-erzeugende* Funktion.
- Die Funktion F_μ aus Satz 6.2.1 heißt μ -Funktion.
- Eine maßerzeugende Funktion F heißt *Verteilungsfunktion* falls gilt:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 , \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$$

Bemerkung: Eine Verteilungsfunktion $F_{\mathcal{P}}$ ist eine maßerzeugende Funktion für ein Wahrscheinlichkeitsmaß \mathcal{P} auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit $\mathcal{P}(\mathbb{R}) = 1$. Umgekehrt, setzt man für die Verteilungsfunktion $F_{\mathcal{P}}$ eines Wahrscheinlichkeitsmaßes \mathcal{P} meist

$$F_{\mathcal{P}}(x) := \mathcal{P}((-\infty, x))$$

7 Das Lebesque Maß auf \mathbb{R}

7.0.4 Existenzsatz

Es existiert ein eindeutig bestimmtes Maß λ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit:

$$\lambda([a, b]) = b - a, \quad a \leq b \in \mathbb{R}$$

Beweis: Folgt direkt aus Satz 6.2.2, mit $F(x) := x$.

7.0.5 Definition: Lebesque-Maß

Das eindeutig bestimmte Maß λ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ aus dem vorigen Satz, heißt *Lebesque-Maß* auf \mathbb{R} .

Bemerkung: λ ist lokal endlich und somit σ -endlich.

7.1 Gleichverteilung

Betrachten den Grundraum $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]))$, mit $\mathcal{B}([0, 1])$ als die σ -Algebra der Borelmengen aus $[0, 1]$, das heißt

$$\mathcal{B}([0, 1]) = \sigma(\mathcal{G}), \quad \mathcal{G} := \{G \subset [0, 1] \mid G \text{ offen in } [0, 1]\}$$

Bemerkung: $[0, 1]$ ist in $[0, 1]$ offen.

7.1.1 Lemma über $\mathcal{B}([0, 1])$

Es gilt: $\mathcal{B}([0, 1]) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \cap [0, 1] := \{A \cap [0, 1] \mid A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$

7.1.2 Definition: Gleichverteilung auf $[0, 1]$

Betrachten die Mengenfunktion \mathcal{Q} auf $\mathcal{B}([0, 1])$ definiert durch $\mathcal{Q}(A) := \lambda(A)$. Dann ist \mathcal{Q} ein Maß auf $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]))$ mit $\mathcal{Q}([0, 1]) = \lambda([0, 1]) = 1$. Somit ist \mathcal{Q} insbesondere ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]))$. Wir nennen dieses Maß *Gleichverteilung* auf $[0, 1]$.

7.1.3 Satz: Verschiebungsinvarianz

Das Lebesque Maß λ auf \mathbb{R} ist Verschiebungsinvariant, das heißt für $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$ ist $x + A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und es gilt: $\lambda(x + A) = \lambda(A)$. Dabei ist $x + A := \{x + y \mid y \in A\}$.

7.1.4 Satz über geeichte, verschiebungsinvariante Maße

Es sei μ ein Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit:

- $\mu([0, 1]) = 1$: Eichung
- μ ist Verschiebungsinvariant

Dann gilt: $\mu = \lambda$

8 Konstruktion von σ -Algebren und nicht messbaren Mengen

Sei $M \neq \emptyset$ eine beliebige Menge, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(M)$ eine Algebra und $\mathcal{M} = \sigma(\mathcal{A})$.

Frage: Wie können wir \mathcal{M} aus \mathcal{A} konstruktiv gewinnen?

8.1 Ordnungszahlen

8.1.1 Definition: Halbordnung:

Eine Relation \leq auf einer Menge E heißt *Halbordnung* wenn gilt:

- \leq ist Reflexiv.
- \leq ist Antisymmetrisch, das heißt aus $x \leq y \wedge y \leq x$ folgt $x = y$.
- \leq ist Transitiv.

Schreiben: $x < y \Leftrightarrow x \leq y \wedge x \neq y$.

8.1.2 Definition: Wohlordnung:

Eine Menge (E, \leq) heißt *wohlgeordnet* falls:

- (E, \leq) *halbgeordnet* ist.
- Jede Untermenge $E_0 \subset E$ besitzt ein *kleinstes* Element.
Erinnerung: $x \in E_0$ ist *kleinstes Element* von E_0 wenn $\forall y \in E_0$ gilt: $x \leq y$.

8.1.3 Definition: Ähnliche wohlgeordnete Mengen

Zwei wohlgeordnete Mengen (E_1, \leq_1) , (E_2, \leq_2) heißen *ähnlich* \Leftrightarrow Es existiert eine Bijektion f von E_1 auf E_2 die die Ordnung erhält, das heißt:

$$\forall x_1, x_2 \in E_1 : x_1 \leq_1 x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq_2 f(x_2)$$

8.1.4 Definition: Wohlordnungstyp - Ordnungszahl

Diese oben erwähnte Ähnlichkeitsrelation (\approx) ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller wohlgeordneten Mengen, und gibt Anlass zum Begriff der Äquivalenzklassen. Die Äquivalenzklasse $\alpha := \overline{(E, \leq)}$ zu (E, \leq) nennt man *Ordnungszahl* (Wohlordnungstyp), und die Menge (E, \leq) *Repräsentanten* von α .

Beispiele:

- Die Ordnungszahl n entspricht der Äquivalenzklasse zu $\{1, \dots, n\}$ mit der natürlichen Ordnung.
- $\omega = \overline{(\mathbb{N}, \leq)}$ stellt den Wohlordnungstyp der Menge der natürlichen Zahlen mit der üblichen Ordnung dar.
- Für die Ordnungszahl $\alpha = \overline{(E, \leq)}$ existiert der *Nachfolger* $\alpha + 1$: Für $x \notin E$ konstruiert man $E' := E \cup \{x\}$, ausgestattet mit der durch \leq induzierten Ordnung \leq' , wobei $z \leq' x$ für $z \in E$ sei (x wird *ans Ende gesetzt*). Dann ist (E', \leq') wohlgeordnet, ist nicht ähnlich zu (E, \leq) und $\alpha' := \overline{(E', \leq')}$ heißt der *Nachfolger* von α : $\alpha' = \alpha + 1$.
- Dies gibt Anlass zur Darstellung $\omega + 1, \omega + 2, \dots, \omega + \omega =: \omega 2, \omega 2 + 1, \dots, \omega^2, \dots$
- Ein *Vorgänger* von α ist eine Ordnungszahl mit $\beta + 1 = \alpha$. Dieser muss nicht immer existieren.
- Eine Ordnungszahl α heißt *Limeszahl* $\Leftrightarrow \alpha$ besitzt keinen Vorgänger. Beispiel: ω selbst.

Bemerkung: Die Menge aller Ordnungszahlen kann wohlgeordnet werden: $\alpha \leq \beta$ (vgl. Prinzip der transfiniten Induktion).

8.2 Konstruktion von $\mathcal{M} = \sigma(\mathcal{A})$

8.2.1 Konstruktion der \mathcal{A}_α

Setzen

$$\mathcal{A}_0 := \mathcal{A}, \mathcal{A}_1 := \mathcal{A}_\sigma, \mathcal{A}_2 := (\mathcal{A}_1)_\delta, \mathcal{A}_3 := (\mathcal{A}_2)_\sigma, \dots, \mathcal{A}_\omega := \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_n, \mathcal{A}_{\omega+1} := (\mathcal{A}_\omega)_\sigma, \mathcal{A}_{\omega+2} := (\mathcal{A}_{\omega+1})_\delta, \dots$$

definieren also Induktiv für die (abzählbare) Ordnungszahl:

- (i) $\mathcal{A}_0 := \mathcal{A}$
- (ii) Induktionsvoraussetzung: Sei \mathcal{A}_β definiert für $\beta < \alpha$.

(iii) Induktionsschritt:

Fall: $\exists \beta$ mit $\beta + 1 = \alpha$

- Fall: $\exists \gamma$ mit $\gamma + 1 = \beta$ und $\mathcal{A}_\beta = (\mathcal{A}_\gamma)_\sigma$. Dann setzen: $\mathcal{A}_\alpha := (\mathcal{A}_\beta)_\delta$
- Fall: $\exists \gamma$ mit $\gamma + 1 = \beta$ und $\mathcal{A}_\beta = (\mathcal{A}_\gamma)_\delta$. Dann setzen: $\mathcal{A}_\alpha := (\mathcal{A}_\beta)_\sigma$
- Fall: β Limeszahl: Dann setzen: $\mathcal{A}_\alpha := (\mathcal{A}_\beta)_\sigma$

Fall: α Limeszahl: Dann setzen

$$\mathcal{A}_\alpha := \bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{A}_\beta$$

Mit dem Prinzip der transfiniten Induktion ist so für jede abzählbare Ordnungszahl α jeweils \mathcal{A}_α definiert

8.2.2 Konstruktion von \mathcal{M}

Sei ω_1 die *kleinste* Ordnungszahl mit überabzählbarer Mächtigkeit. Diese existiert, da die Ordnungszahlen wohlgeordnet sind. Setzen dann:

$$\mathcal{K} := \bigcup_{\substack{\alpha \text{ Ordnungszahl} \\ \alpha < \omega_1}} \mathcal{A}_\alpha$$

Dann ist \mathcal{K} eine monotone Klasse, mit $\mathcal{A} \subset \mathcal{K} \subset \mathcal{M}$. Mit dem monotonen Klassensatz (2.2.3) folgt dann $\mathcal{K} = \mathcal{M}$.

Beweis: Seien $A_n \subset A_{n+1} \in \mathcal{K}$. Dann existieren abzählbare Ordnungszahlen α_n mit $A_n \in \mathcal{A}_{\alpha_n}$. Somit existiert eine abzählbare Ordnungszahl α mit $\alpha_n \leq \alpha$ für $n \in \mathbb{N}$. Somit ist $A_n \in \mathcal{A}_{\alpha_n} \subset \mathcal{A}_\alpha$ also

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \overset{*}{\in} \mathcal{A}_{\alpha+2} \subset \mathcal{K}$$

(*) Da zwischen \mathcal{A}_α und $\mathcal{A}_{\alpha+2}$ mindestens ein Konstruktionsschritt mit σ -Bildung liegt.

Bemerkung: Im allgemeinen gilt: $\mathcal{A}_\alpha \neq \mathcal{M}$ für alle $\alpha < \omega_1$. Beispiel: $\mathcal{M} = \mathbb{R}$ und \mathcal{A} die von rechts-offenen Intervallen erzeugte Algebra, $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Dann ist

$$\mathcal{A}_\alpha \neq \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad \forall \alpha < \omega_1$$

8.3 Mächtigkeit und Vervollständigung von \mathcal{M}

8.3.1 Definition: Gleichmächtigkeit

Zwei Mengen A, B heißen *gleichmächtig* $:\Leftrightarrow$ es existiert eine Bijektion $f : A \rightarrow B$. Diese Relation ist eine Äquivalenzrelation und gibt Anlass zum Begriff der Äquivalenzklassen von gleichmächtigen Mengen. Ähnlich zu den Ordnungszahlen, ergibt sich hier der Begriff der *Kardinalzahlen*. Zwei Mengen besitzen die gleiche Kardinalität wenn es eine Bijektion zwischen den beiden gibt.

Beispiele:

- $\text{card}(\mathbb{N}) = \text{card}(\underbrace{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N}}_{\text{endlich viele}}) = \text{card}(\mathbb{Q})$
- $\text{card} \{ \mathcal{P}(A) \} = 2^{\text{card}(A)}$

8.3.2 Satz über die Kardinalität von \mathcal{M}

Ist $\text{card}(\mathcal{A}) \geq \text{card}(\mathbb{R})$ so folgt: $\text{card}(\mathcal{M}) = \text{card}(\mathcal{A})$

8.3.3 Satz über die Kardinalität von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

Es gilt: $\text{card}\{\mathcal{B}(\mathbb{R})\} = \text{card}(\mathbb{R})$. Dies folgt direkt aus dem vorigen Satz und der Tatsache dass $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{A})$ mit \mathcal{A} die von rechteffenen Intervallen erzeugte Algebra ist, also $\text{card}(\mathcal{A}) = \text{card}(\mathbb{R})$.

Folgerung: Wegen $\text{card}\{\mathcal{P}(\mathbb{R})\} = 2^{\text{card}(\mathbb{R})}$ ist $\text{card}\{\{A \subset \mathbb{R} \mid A \notin \mathcal{B}(\mathbb{R})\}\} = 2^{\text{card}(\mathbb{R})}$.

8.3.4 Die Vervollständigung $\mathcal{B}^\lambda(\mathbb{R})$

Sei $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^\lambda(\mathbb{R}), \lambda)$ die Vervollständigung des Maßraumes $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Dann heißt $\mathcal{B}^\lambda(\mathbb{R})$ σ -Algebra der *Lebesgue messbaren Mengen*.

8.3.5 Satz über die Kardinalität von $\mathcal{B}^\lambda(\mathbb{R})$

Es ist $\text{card}\{\mathcal{B}^\lambda(\mathbb{R})\} = 2^{\text{card}(\mathbb{R})} = \text{card}\{\mathcal{P}(\mathbb{R})\}$ (vgl. Cantorsche Menge).

8.3.6 Lemma: Verschiebungsinvarianz von λ auf $\mathcal{B}^\lambda(\mathbb{R})$

Das Lebesgue Maß λ auf $\mathcal{B}^\lambda(\mathbb{R})$ ist verschiebungsinvariant, das heißt für $A \in \mathcal{B}^\lambda(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$ gilt:

- $x + A := \{x + y \mid y \in A\} \in \mathcal{B}^\lambda(\mathbb{R})$
- $\lambda(x + A) = \lambda(A)$

8.3.7 Satz: Existenz nicht messbarer Mengen in $\mathcal{B}^\lambda(\mathbb{R})$

Es gibt eine Teilmenge $V \subset \mathbb{R}$ mit $V \notin \mathcal{B}^\lambda(\mathbb{R})$. Zur Konstruktion dieser Menge wird vom Auswahlaxiom Nutz gemacht: V ist eine Auswahlmenge und heißt *Vitali Menge*.

Konstruktion: Zu $a, b \in \mathbb{R}$ definiert man die Relation: $a \sim b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Q}$. \sim ist eine Äquivalenzrelation auf \mathbb{R} . Zu $a \in \mathbb{R}$ bezeichne \mathbb{Q}_a die zu a entsprechende Äquivalenzklasse ($a \in \mathbb{Q}_a$). Dann ist $(\mathbb{Q}_a)_{a \in \mathbb{R}}$ eine Zerlegung von \mathbb{R} .

Bemerkung: Für $a, b \in \mathbb{R}$ sind \mathbb{Q}_a und \mathbb{Q}_b entweder gleich oder disjunkt.

Sei V eine Auswahlmenge für $(\mathbb{Q}_a)_{a \in \mathbb{R}}$: $V \cap \mathbb{Q}_a$ einelementig für $a \in \mathbb{R}$. Dann folgt: $V \notin \mathcal{B}^\lambda(\mathbb{R})$.

8.3.8 Satz über die nicht-Existenz bestimmter Maße auf $\mathcal{P}(\mathbb{R})$

Es existiert kein Maß μ auf $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, welches verschiebungsinvariant ist und für welches $\mu([0, 1]) = 1$ gilt.

Bemerkung: Die Eigenschaft $\mu([0, 1]) = 1$ kann durch $0 < \mu([0, 1]) < \infty$ ersetzt werden.

9 Das Integral

Gegeben seien die messbaren Räume (M, \mathcal{M}) und (E, \mathcal{E}) .

9.1 Messbare Funktionen

9.1.1 Definition: Messbare Funktion

Eine Funktion $f : M \rightarrow E$ heißt *messbar* von (M, \mathcal{M}) in (E, \mathcal{E}) , falls gilt:

$$f^{-1}(B) = \{x \in M \mid f(x) \in B\} \in \mathcal{M} \quad \forall B \in \mathcal{E}$$

Symbolisch schreibt man: $f : (M, \mathcal{M}) \rightarrow (E, \mathcal{E})$.

9.1.2 Eigenschaften messbarer Funktionen

(E1) Für messbare Funktionen $f : (M, \mathcal{M}) \rightarrow (E_1, \mathcal{E}_1)$, $g : (E_1, \mathcal{E}_1) \rightarrow (E_2, \mathcal{E}_2)$ ist die Verkettung $g \circ f : (M, \mathcal{M}) \rightarrow (E_2, \mathcal{E}_2)$ auch messbar.

Beweis: Für $B \in \mathcal{E}_2$ ist

$$(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(\underbrace{g^{-1}(B)}_{\in \mathcal{E}_1}) \in \mathcal{M}$$

(E2) Einschränkung messbarer Funktionen: Für eine messbare Funktion $f : (M, \mathcal{M}) \rightarrow (E, \mathcal{E})$ und $M_0 \subset M$ ist auch die Einschränkung $f|_{M_0}$ von f auf M_0 messbar, das heißt

$$f|_{M_0} : (M_0, \mathcal{M} \cap M_0) \rightarrow (E, \mathcal{E})$$

Dabei ist $\mathcal{M} \cap M_0 = \{A \cap M_0 \mid A \in \mathcal{M}\}$ die σ -Algebra von M auf M_0 (Spur).

Beweis: Für $B \in \mathcal{E}$ ist

$$(f|_{M_0})^{-1}(B) = \underbrace{f^{-1}(B)}_{\in \mathcal{M}} \cap M_0 \in \mathcal{M} \cap M_0$$

(E3) Kriterium für Messbarkeit: Seien (M, \mathcal{M}) , (E, \mathcal{E}) messbare Räume und $f : M \rightarrow E$. Sei \mathcal{C} erzeugendensystem für \mathcal{E} , das heißt $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{E}$. Dann gilt:

$$f : (M, \mathcal{M}) \rightarrow (E, \mathcal{E}) \text{ messbar} \Leftrightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{M} \quad \forall B \in \mathcal{C}$$

Beweis: Die Richtung "⇒" ist klar. Sei nun $\tilde{\mathcal{E}} := \{B \in \mathcal{E} \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{M}\}$. Dann gilt:

- $\mathcal{C} \subset \tilde{\mathcal{E}} \subset \mathcal{E}$
- $\tilde{\mathcal{E}}$ ist σ -Algebra.

Somit ist $\mathcal{E} = \sigma(\mathcal{C}) \subset \sigma(\tilde{\mathcal{E}}) = \tilde{\mathcal{E}}$ also $\mathcal{E} = \tilde{\mathcal{E}}$.

(E4) Sei $E = \mathbb{R}$ und $\mathcal{E} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Dann ist $f : (M, \mathcal{M}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ messbar \Leftrightarrow

$$\exists \Lambda \subset \mathbb{R} \text{ dicht in } \mathbb{R} : f^{-1}((-\infty, r)) = \{x \in M \mid f(x) < r\} \in \mathcal{M} \text{ für } r \in \Lambda$$

Beweis: Anwendung von (E3) unter Verwendung von

$$\sigma(\{(-\infty, r) \mid r \in \Lambda\}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

(E5) Sei E metrischer Raum und $\mathcal{E} = \mathcal{B}(E)$, mit

$$\mathcal{B}(E) := \sigma(\mathcal{G}), \quad \mathcal{G} := \{G \subset E \mid G \text{ offen}\}$$

Eine Funktion $f : (M, \mathcal{M}) \rightarrow (E, \mathcal{B}(E))$ ist genau dann messbar, falls gilt:

$$f^{-1}(G) \in \mathcal{M} \quad \forall G \in \mathcal{G}$$

Beweis: Anwendung von (E3) auf $\mathcal{C} = \mathcal{G}$.

(E6) Seien E_1, E_2 metrische Räume und f stetig von E_1 in E_2 . Dann folgt:

$$f : (E_1, \mathcal{B}(E_1)) \rightarrow (E_2, \mathcal{B}(E_2))$$

ist messbar.

Beweis: Da f stetig ist, ist $f^{-1}(G)$ offen in E_1 für alle offenen $G \subset E_2$, das heißt $f^{-1}(G) \in \mathcal{B}(E_1) \forall G \subset E_2$ offen. Durch (E5) folgt dann die Behauptung.

9.2 Messbare, erweiterte, reelle Funktionen

9.2.1 Der erweiterte $\hat{\mathbb{R}}$

Definieren $\hat{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, mit den Rechenregeln:

$$\begin{aligned} (\pm\infty) + (\pm\infty) &= \pm\infty \\ x + (\pm\infty) &= (\pm\infty) + x = \pm\infty, \quad x \in \mathbb{R} \\ x - (\pm\infty) &= x + (\mp\infty) = \mp\infty, \quad x \in \mathbb{R} \\ (\pm\infty) \cdot (\pm\infty) &= +\infty \\ (\pm\infty) \cdot (\mp\infty) &= -\infty \\ x \cdot (\pm\infty) &= (\pm\infty) \cdot x = \pm\infty, \quad x \in \mathbb{R}, \quad x > 0 \\ x \cdot (\pm\infty) &= (\pm\infty) \cdot x = \mp\infty, \quad x \in \mathbb{R}, \quad x < 0 \\ 0 \cdot (\pm\infty) &= 0 \end{aligned}$$

Verboten sind dabei Ausdrücke der Art:

$$(\pm\infty) - (\pm\infty) \quad \text{und} \quad (\pm\infty) + (\mp\infty)$$

9.2.2 Die Metrik $\hat{\rho}$

Der Raum \mathbb{R} sei ausgestattet mit der Metrik $\rho(x, y) := |x - y|$. Definieren die Funktion $h : \hat{\mathbb{R}} \rightarrow [-1, 1]$ gemäß

$$h(x) := \begin{cases} 1 & : x = \infty \\ \frac{x}{1 + |x|} & : x \in \mathbb{R} \\ -1 & : x = -\infty \end{cases}$$

und $\hat{\rho} : \hat{\mathbb{R}} \times \hat{\mathbb{R}} \rightarrow [0, 2]$ gemäß

$$\hat{\rho}(x, y) := |h(x) - h(y)|$$

Dann gilt:

- $(\hat{\mathbb{R}}, \hat{\rho})$ ist ein metrischer Raum.
- Für $G \subset \mathbb{R}$ gilt: G ist offen in $(\mathbb{R}, \rho) \Leftrightarrow G$ ist offen in $(\hat{\mathbb{R}}, \hat{\rho})$.

Dies gibt Anlass zu $\mathcal{B}(\hat{\mathbb{R}})$: der σ -Algebra der Borelmengen in $(\hat{\mathbb{R}}, \hat{\rho})$.

9.2.3 Definition: Messbare, erweitert reelle Funktion

Sei (M, \mathcal{M}) ein messbarer Raum.

- Eine messbare Funktion f von (M, \mathcal{M}) in $(\hat{\mathbb{R}}, \hat{\rho})$ heißt *messbare, erweitert reelle Funktion* (auf (M, \mathcal{M})).
- Eine messbare, erweiterte, reelle Funktion f auf (M, \mathcal{M}) heißt *messbar reell*, wenn $f(x) \in \mathbb{R} \quad \forall x \in M$ gilt.

9.2.4 Hilfssatz über Borelmengen

Sei (E, ρ) ein metrischer Raum und $E_0 \subset E$ ebenfalls ein metrischer Raum mit der Metrik $\rho_{E_0 \times E_0}$ definiert durch

$$\rho_{E_0 \times E_0}(x, y) := \rho(x, y), \quad x, y \in E_0$$

Dann gilt:

$$\mathcal{B}(E) \cap E_0 = \mathcal{B}(E_0)$$

wobei $\mathcal{B}(E)$ die σ -Algebra der Borelmengen im (E, ρ) und $\mathcal{B}(E_0)$ die σ -Algebra der Borelmengen im $(E_0, \rho_{E_0 \times E_0})$ sind.

Bemerkung: Dieser Satz ist eine direkte Folge des Satzes 2.1.9 über σ -Algebren auf Untermengen.

9.2.5 Satz über Borelmengen in $\hat{\mathbb{R}}$

Betrachten den metrischen Raum $(\hat{\mathbb{R}}, \hat{\rho})$. Es gilt:

(i) $\mathcal{B}(\hat{\mathbb{R}}) \cap \mathbb{R} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$

(ii) $\mathcal{B}(\hat{\mathbb{R}}) = \sigma(\{[-\infty, r) \mid r \in \Lambda\})$ für eine in \mathbb{R} dichte Menge Λ .

(iii) Für den messbaren Raum (M, \mathcal{M}) und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ gilt:
 f ist messbar (erweitert) reell $\Leftrightarrow f : (M, \mathcal{M}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ist messbar.

9.2.6 Eigenschaften messbarer, erweitert reeller Funktionen

Es sei (M, \mathcal{M}) ein messbarer Raum. Nennen f messbar auf (M, \mathcal{M}) falls f messbar, erweitert reell ist auf (M, \mathcal{M}) . Es gelten die Eigenschaften:

(E1) Für messbare f, g , die keine *Unendlichkeiten unterschiedlichen Vorzeichens annehmen*, ist auch $f + g$ definiert durch

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \quad x \in M$$

messbar.

(E2) Für eine auf einem \mathbb{R} -Vektorraum (M, \mathcal{M}) messbare Funktion f , $a \in \mathbb{R}$, $(af)(x) := a \cdot f(x)$, $x \in M$ ist auch af messbar.

(E3) Für messbare Funktionen f, g sind auch die Funktionen $f \vee g, f \wedge g$ definiert durch

$$(f \vee g)(x) := f(x) \vee g(x) := \max\{f(x), g(x)\}, \quad x \in M$$

$$(f \wedge g)(x) := f(x) \wedge g(x) := \min\{f(x), g(x)\}, \quad x \in M$$

messbar.

(E4) Für eine messbare Funktion f sind auch

$$f^+ := f \vee 0 \quad \text{und} \quad f^- := (-f) \vee 0$$

messbar, wobei f^+ und f^- jeweils der positive und negative Anteil von f seien. Dabei wird bezeichnet

$$a, b \in \hat{\mathbb{R}} : a \vee b := \max\{a, b\} \rightarrow (f \vee 0)(x) := f(x) \vee 0$$

(E5) Ist f messbar, so ist auch $|f|$ definiert durch

$$|f|(x) := |f(x)|, \quad x \in M$$

messbar, denn $|f| = f^+ + f^-$.

(E6) Für eine Folge (f_n) messbarer Funktionen sind auch $\sup_n f_n$ und $\inf_n f_n$ messbar, mit

$$\left(\sup_n f_n\right)(x) := \sup_n f_n(x) \quad \text{und} \quad \left(\inf_n f_n\right)(x) := \inf_n f_n(x)$$

(E7) Für eine Folge (f_n) messbarer Funktionen ist

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf f_n$$

und

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup f_n$$

auch messbar.

(E8) Für messbare Funktionen f, g gilt:

$$\{f < g\}, \{f > g\}, \{f \leq g\}, \{f \geq g\}, \{f = g\} \in \mathcal{M}$$

(E9) Für eine Folge (f_n) messbarer Funktionen, mit

$$M_0 := \left\{x \in M \mid \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \text{ existiert in } \hat{\mathbb{R}}\right\}$$

gilt:

(i) $M_0 \in \mathcal{M}$

(ii) Die Funktion $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ definiert durch

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n\right)(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \quad x \in M_0$$

ist messbar auf $(M_0, \mathcal{M} \cap M_0)$.

(E10) Sei (f_n) eine Folge messbarer Funktionen. Betrachten für ein gegebenes $r_0 \in \hat{\mathbb{R}}$ die Fortsetzung von $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ auf M :

$$f(x) := \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n\right)(x) := \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) & : x \in M_0 \\ r_0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist f messbar auf (M, \mathcal{M}) .

(E11) Für eine beliebige Menge $A \subset M$ sei

$$1_A(x) := \begin{cases} 1 & : x \in A \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

die so genannte *Indikatorfunktion* von A . Dann ist 1_A genau dann messbar wenn $A \in \mathcal{M}$ ist.

(E12) Für messbare Funktionen f, g ist $f \cdot g$ auch eine messbare Funktion.

9.3 Das Integral nicht-negativer, einfacher Funktionen

Sei (M, \mathcal{M}, μ) ein beliebiger Maßraum.

9.3.1 Definition: Einfache Funktionen

Eine messbare (erweitert reell) Funktion f auf (M, \mathcal{M}) heißt *einfach*, falls f nur endlich viele Werte aus $\hat{\mathbb{R}}$ annimmt.

9.3.2 Satz: Darstellung einfacher Funktionen

Eine einfache Funktion f auf (M, \mathcal{M}) besitzt die Darstellung:

$$(D) : f = \sum_{k=1}^n c_k \cdot 1_{A_k}$$

mit den paarweise verschiedenen $c_1, \dots, c_n \in \hat{\mathbb{R}}$ und der messbaren Zerlegung $\{A_1, \dots, A_n\}$ von M , das heißt

- A_1, \dots, A_n sind paarweise disjunkt.
- $\biguplus_{k=1}^n A_k = M$
- $A_k \in \mathcal{M}$ für $k = 1, \dots, n$

Die eindeutig bestimmten c_k sind dann genau die Werte von f und $A_k = \{f = c_k\}$, $k = 1, \dots, n$

9.3.3 Definition: Integral einer nicht negativen, einfachen Funktion

Sei f eine nicht negative, einfache Funktion, mit der oben eingeführten Darstellung (D)

$$f = \sum_{k=1}^n c_k 1_{A_k}$$

Dann definiert man

$$\int_M f \, d\mu := \sum_{k=1}^n c_k \mu(A_k)$$

Notation:

$$\int_M f \, d\mu, \int_M f(x) \, d\mu(x), \int_M f(x) \, \mu(dx)$$

9.3.4 Eigenschaften des Integrals nicht-negativer, einfacher Funktionen

(E1) Für $A \in \mathcal{M}$ ist

$$\int_M 1_A \, d\mu = \mu(A)$$

(E2) Für eine nicht-negative, einfache Funktion f der Gestalt

$$f = \sum_{j=1}^p c'_j 1_{A'_j}$$

mit der messbaren Zerlegung $\{A'_1, \dots, A'_k\}$ und den (nicht unbedingt paarweise verschiedenen) c'_1, \dots, c'_p ist

$$\int_M f \, d\mu = \sum_{j=1}^p c'_j \mu(A'_j)$$

(E3) **Positivität:** Für eine nicht negative, einfache Funktion f ist

$$\int_M f \, d\mu \geq 0$$

(E4) **Linearität:** Seien f, g nicht-negative, einfache Funktionen und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $af + bg \geq 0$. Dann ist auch $af + bg$ eine nicht-negative, einfache Funktion, und es gilt:

$$\int_M (af + bg) d\mu = a \int_M f d\mu + b \int_M g d\mu$$

(E5) **Monotonie:** Für nicht-negative, einfache Funktionen f, g mit $f \leq g$ ist auch

$$\int_M f d\mu \leq \int_M g d\mu$$

(E6) Für eine nicht-negative, einfache Funktion f gilt: Es ist $\int_M f d\mu = 0$ genau dann wenn f fast überall verschwindet, das heißt $\{f \neq 0\}$ ist eine Nullmenge. Man sagt: $f = 0$ μ -fast überall.

9.4 Das Integral nicht-negativer, messbarer Funktionen

Es sei (M, \mathcal{M}, μ) ein beliebiger Maßraum.

9.4.1 Definition: Nicht-negative messbare Funktion

Eine *nicht-negative, messbare Funktion* f ist eine messbare (erweitert reelle) Funktion auf (M, \mathcal{M}) mit $f(x) \geq 0 \forall x \in M$.

9.4.2 Satz: Approximation nicht-negativer, messbarer Funktionen

Es sei f eine nicht-negative messbare Funktion. Dann existiert eine Folge (f_n) nicht-negativer, einfacher Funktionen mit

- $f_n \leq f_{n+1}$, $n \geq 1$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, $x \in M$

9.4.3 Satz über Folgen nicht-negativer, einfacher Funktionen

Seien $(f_n), (g_n)$ Folgen nicht-negativer, einfacher Funktionen, die außerdem monoton wachsend seien. Es gelte ferner

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \stackrel{\text{Punktweise}}{\leq} \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$$

Dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_M f_n d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_M g_n d\mu$$

Bemerkung: Die Grenzwerte obiger Integrale existieren aufgrund deren Monotonie immer.

9.4.4 Definition: Integral nicht-negativer, messbarer Funktionen

Sei f eine nicht-negative, messbare Funktion, und (f_n) eine Folge nicht-negativer, einfacher Funktionen mit

- $f_n \leq f_{n+1}$, $n \geq 1$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, $x \in M$

(vgl. Satz 9.4.2). Dann setzen wir:

$$\int_M f \, d\mu := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_M f_n \, d\mu$$

Bemerkung: Der Grenzwert rechts existiert aufgrund der Monotonie (vgl. 9.3.4) immer, und ist nach Satz 9.4.3 unabhängig von der Auswahl der Folge (f_n) . Somit ist die Definition korrekt.

Notation:

$$\int_M f \, d\mu, \quad \int_M f(x) \, d\mu(x), \quad \int_M f(x) \, \mu(dx)$$

9.4.5 Eigenschaften des Integrals nicht negativer, messbarer Funktionen

(E1) Für beliebige Menge $A \in \mathcal{M}$ ist

$$\int_M 1_A \, d\mu = \mu(A)$$

(E2) **Positivität:** Für messbare, nicht negative Funktion f ist stets

$$\int_M f \, d\mu \geq 0$$

(E3) **Linearität:** Für nicht negative, messbare Funktionen f, g und $a, b \in \hat{\mathbb{R}}, a, b \geq 0$ ist auch $af + bg$ nicht negativ, messbar, und es gilt

$$\int_M (af + bg) \, d\mu = a \int_M f \, d\mu + b \int_M g \, d\mu$$

(E4) **Monotonie:** Für nicht negative, messbare Funktionen f, g mit $f \leq g$ gilt:

$$\int_M f \, d\mu \leq \int_M g \, d\mu$$

(E5) Für nicht negative, messbare Funktion f gilt:

$$\int_M f \, d\mu = 0 \Leftrightarrow f = 0 \quad \mu\text{-fast überall}$$

(E6) Für nicht negative, messbare Funktion f mit $\int_M f \, d\mu < \infty$ gilt: $f < \infty$ μ -fast überall.

Bemerkung: Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht!

9.5 Integrierbare Funktionen

Sei (M, \mathcal{M}, μ) ein Maßraum und f eine messbare (erweitert reelle) Funktion auf (M, \mathcal{M}) . Dann ist $f = f^+ - f^-$, mit dem positiven Anteil $f^+ = f \vee 0$ und dem negativen Anteil $f^- = (-f) \vee 0$. Dabei sind f^+ und f^- nicht negative, messbare Funktionen, und die Integrale

$$\int_M f^+ \, d\mu, \quad \int_M f^- \, d\mu$$

sind somit definiert.

9.5.1 Definition: Integral messbarer Funktionen

Wir sagen, dass $\int_M f d\mu$ existiert, falls gilt:

$$\int_M f^+ d\mu < \infty \quad \text{oder} \quad \int_M f^- d\mu < \infty$$

In diesem Fall setzen wir:

$$\int_M f d\mu := \int_M f^+ d\mu - \int_M f^- d\mu$$

Die Funktion f heißt *integrierbar*, falls $\int_M f d\mu$ existiert und endlich ist. Für eine Menge $A \in \mathcal{M}$ setzen wir ferner:

$$\int_A f d\mu := \int_M f \cdot 1_A d\mu$$

insofern das Integral $\int_M f \cdot 1_A d\mu$ existiert.

9.5.2 Eigenschaften des Integrals

(1) Für $A \in \mathcal{M}$ existiert das Integral $\int_M 1_A d\mu$ und es gilt:

$$\int_M 1_A d\mu = \mu(A)$$

(2) **Positivität:** Ist f messbar und $f \geq 0$, so gilt

$$\int_M f d\mu \geq 0$$

(3) **Linearität:** Seien f, g messbare Funktionen und $a, b \in \mathbb{R}$. Es existieren die Integrale

$$\int_M f d\mu \quad , \quad \int_M g d\mu$$

und der Ausdruck

$$a \int_M f d\mu + b \int_M g d\mu$$

sei sinnvoll. Dann existiert das Integral $\int_M (af + bg) d\mu$ und es gilt:

$$\int_M (af + bg) d\mu = a \int_M f d\mu + b \int_M g d\mu$$

(4) Es sei f messbar und $f = 0$ μ -fast überall. Dann existiert das Integral $\int_M f d\mu$ und es gilt:

$$\int_M f d\mu = 0$$

Bemerkung: Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht!

(5) Es seien f, g messbar, es existiere $\int_M f d\mu$ und es sei $f = g$ μ -fast überall. Dann existiert auch das Integral $\int_M g d\mu$ und es gilt:

$$\int_M g d\mu = \int_M f d\mu$$

(6) **Monotonie:** Es seien f, g messbar, $f \leq g$ und es existieren die Integrale $\int_M f d\mu, \int_M g d\mu$. Dann gilt:

$$\int_M f d\mu \leq \int_M g d\mu$$

(7) Seien f, g integrierbar (also insbesondere messbar) und $f \leq g$. Dann gilt:

$$\int_M f d\mu = \int_M g d\mu \Leftrightarrow f = g \text{ } \mu\text{-fast überall}$$

(8) Für messbare Funktion f gilt: f ist integrierbar genau dann wenn

$$\int_M |f| d\mu < \infty$$

(9) Ist f integrierbar, so ist $|f| < \infty$ μ -fast überall.

9.6 Stetigkeitseigenschaften des Integrals

9.6.1 Satz von Beppo Levi über monotone Konvergenz

Sei (M, \mathcal{M}, μ) ein beliebiger Maßraum und (f_n) eine monoton wachsende Folge messbarer, nicht negativer, Funktionen, mit

$$f := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \quad (\text{punktweise})$$

Dann folgt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_M f_n d\mu = \int_M f d\mu$$

das heißt Grenzwertbildung und Integration können vertauscht werden.

9.6.2 Folgerung des Satzes von Levi

Sei (f_n) eine Folge monoton wachsender, messbarer Funktionen und $f := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$. Es existiere eine messbare Funktion g mit der Eigenschaft:

• $g \leq f_n$ μ -fast überall für $n \in \mathbb{N}$.

• $\int_M g^- d\mu < \infty$

Dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_M f_n d\mu = \int_M f d\mu$$

9.6.3 Lemma von Fatou

Es sei (f_n) eine Folge nicht negativer, messbarer Funktionen. Dann folgt:

$$\int_M \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_M f_n \, d\mu$$

9.6.4 Folgerungen des Lemmas von Fatou

Folgerung 1: Sei (f_n) eine Folge messbarer Funktionen. Es existiere eine messbare Funktion g mit:

- $g \leq f_n$ μ -fast überall für $n \in \mathbb{N}$
- $\int_M g^- \, d\mu < \infty$

Dann gilt:

$$\int_M \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_M f_n \, d\mu$$

Folgerung 2: Sei (f_n) eine Folge messbarer Funktionen. Es existiere eine messbare Funktion g mit:

- $f_n \leq g$ μ -fast überall für $n \in \mathbb{N}$
- $\int_M g^+ \, d\mu < \infty$

Dann folgt:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_M f_n \, d\mu \leq \int_M \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\mu$$

9.7 Konvergenz μ -fast überall

Es sei (M, \mathcal{M}, μ) ein Maßraum und (f_n) eine Folge messbarer Funktionen. Ferner sei

$$M_0 := \left\{ x \in M : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \text{ existiert in } \hat{\mathbb{R}} \right\}$$

Wir wissen: $M_0 \in \mathcal{M}$

9.7.1 Definition: Konvergenz μ -fast überall

Eine Folge (f_n) messbarer Funktionen heißt *μ -fast überall konvergent*, falls $\mu(M_0^c) = 0$ ist. Für eine μ -fast überall konvergente Folge setzen wir

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right) (x) := \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) & : x \in M_0 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist bekanntlich auch $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ messbar auf (M, \mathcal{M}) .

9.7.2 Satz von Lebesque über majorisierte Konvergenz

Gegeben sei eine μ -fast überall konvergente Folge (f_n) messbarer Funktionen. Es existiere eine messbare Funktion g mit den folgenden Eigenschaften:

- $|f_n| \leq g$ μ -fast überall für $n \in \mathbb{N}$
- g ist integrierbar.

Dann gilt:

- f_n und $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ sind integrierbar.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_M f_n d\mu$ existiert.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_M f_n d\mu = \int_M \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu$

9.8 Das Lebesque Integral

Es sei $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^\lambda(\mathbb{R}), \lambda)$ der Maßraum, mit der σ -Algebra $\mathcal{B}^\lambda(\mathbb{R})$ der Lebesque-messbaren Mengen (Vervollständigung von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ bzgl. des Lebesque-Maßes) und λ die Fortsetzung des Lebesque-Maßes von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ auf $\mathcal{B}^\lambda(\mathbb{R})$.

9.8.1 Definition: Lebesque-messbare Funktionen und das Lebesque-Integral

Eine Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \hat{\mathbb{R}}$ heißt *Lebesque-messbar*, wenn sie als erweitert reelle Funktion über $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^\lambda(\mathbb{R}))$ messbar ist. Insofern das Integral

$$\int_{\mathbb{R}} f d\lambda$$

existiert, heißt es das *Lebesque-Integral* von f über \mathbb{R} . Für eine Menge $A \in \mathcal{B}^\lambda(\mathbb{R})$ setzt man

$$\int_A f d\lambda := \int_{\mathbb{R}} 1_A \cdot f d\lambda$$

insofern der rechte Ausdruck existiert.

Zielstellung: Die Klärung des Zusammenhanges zwischen dem Lebesque-Integral (\mathcal{L} -Integral) und dem Riemann-Integral (\mathcal{R} -Integral).

9.8.2 Lemma über die Lebesque-Messbarkeit erweitert reeller Funktionen

Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \hat{\mathbb{R}}$. Dann gilt:

f ist Lebesque-messbar \Leftrightarrow Es existieren Funktionen f_1, f_2 , messbar auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit $f_1 \leq f \leq f_2$ und $\lambda(\{f_1 \neq f_2\}) = 0$.

Bemerkung: Allgemeiner gilt sogar: Für beliebigen Maßraum (M, \mathcal{M}, μ) ist eine Abbildung $f : M \rightarrow \hat{\mathbb{R}}$ genau dann messbar (erweitert reell) auf (M, \mathcal{M}^μ) , wenn es messbare (erweitert reelle) Funktionen f_1, f_2 auf (M, \mathcal{M}) mit $f_1 \leq f \leq f_2$ und $\mu(\{f_1 \neq f_2\}) = 0$ gibt.

9.9 Vergleich: Riemann und Lebesque Integral

9.9.1 Definition: λ -fast überall Stetigkeit

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt λ -fast überall stetig auf $[a, b]$ falls es eine Menge $N \in \mathcal{B}^\lambda(\mathbb{R})$ gibt, mit $\lambda(N) = 0$ und f stetig in allen $x \in [a, b] \cap N^c$ ist.

9.9.2 Satz über beschränkte Funktionen - Vergleich \mathcal{R} - und \mathcal{L} - Integral

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- a) f ist \mathcal{R} -integrierbar auf $[a, b]$
- b) f ist λ -fast überall stetig auf $[a, b]$

Ist eine der beiden (und somit beide) Bedingungen erfüllt, so folgt

- (i) f ist Lebesgue-integrierbar auf $[a, b]$

(ii) $\int_{[a,b]} f d\lambda = \int_a^b f(x) dx$ wobei das rechte das bekannte Riemann-Integral sei.

9.10 Transformationssatz

Untersuchen das Verhalten des Integrals bzgl. messbarer Transformationen. Dabei sei (M, \mathcal{M}, μ) ein beliebiger Maßraum und (E, \mathcal{E}) ein messbarer Raum. Zur messbaren Abbildung $T : (M, \mathcal{M}) \rightarrow (E, \mathcal{E})$ definieren wir die Mengenfunktion μ_T auf \mathcal{E} :

$$\mu_T(A) := \mu(T^{-1}(A)) \quad , \quad A \in \mathcal{E}$$

9.10.1 Satz über μ_T

Die oben definierte Mengenfunktion μ_T ist tatsächlich ein Maß auf (E, \mathcal{E}) .

9.10.2 Definition: Bildmaß

Das durch die messbare Abbildung $T : (M, \mathcal{M}) \rightarrow (E, \mathcal{E})$ induzierte Maß μ_T , heißt *Bildmaß* auf (E, \mathcal{E}) von μ bzgl. T .

9.10.3 Transformationssatz

Es sei g eine nicht-negative, messbare Funktion auf (E, \mathcal{E}) . Dann folgt:

- (i) $g \circ T$ ist eine messbare Abbildung auf (M, \mathcal{M})

(ii) $\int_B g d\mu_T = \int_{T^{-1}(B)} g \circ T d\mu$ für $B \in \mathcal{E}$.

9.10.4 Folgerung des Transformationssatzes

Es sei g eine beliebige messbare Funktion auf (E, \mathcal{E}) und $B \in \mathcal{E}$. Dann gilt:

- (i) $g \circ T$ ist messbar auf (M, \mathcal{M})

(ii) Das Integral $\int_B g d\mu_T$ existiert genau dann wenn das Integral $\int_{T^{-1}(B)} g \circ T d\mu$ existiert. In diesem Falle ist

$$\int_B g d\mu_T = \int_{T^{-1}(B)} g \circ T d\mu$$

10 Produktmaße

10.1 Das Produkt von zwei Maßen

10.1.1 Definition: Direktes Produkt

Es seien (M_1, \mathcal{M}_1) und (M_2, \mathcal{M}_2) beliebige messbare Räume. Dann heißt

$$M := M_1 \times M_2 := \{(x, y) : x \in M_1, y \in M_2\}$$

(direktes) Produkt von M_1 und M_2 . Dabei definiert man

$$\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 := \{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathcal{M}_1, A_2 \in \mathcal{M}_2\}$$

als die Menge aller Rechtecke $A_1 \times A_2$ mit den messbaren Kanten $A_1 \in \mathcal{M}_1, A_2 \in \mathcal{M}_2$.

10.1.2 Lemma über $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$

Das System $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ ist eine Halbgebra über $M = M_1 \times M_2$.

10.1.3 Definition: Produkt zweier messbarer Räume

Das System

$$\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2 := \sigma(\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2) =: \mathcal{M}$$

heißt Produkt der σ -Algebren \mathcal{M}_1 und \mathcal{M}_2 . Der messbare Raum

$$(M, \mathcal{M}) = (M_1 \times M_2, \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2)$$

heißt das Produkt der messbaren Räume (M_1, \mathcal{M}_1) und (M_2, \mathcal{M}_2) .

Bemerke: Die Reihenfolge im Produkt ist wichtig!

10.1.4 Definition: Schnitt

Es sei $A \subset M = M_1 \times M_2$.

(i) Für $x \in M_1$ heißt

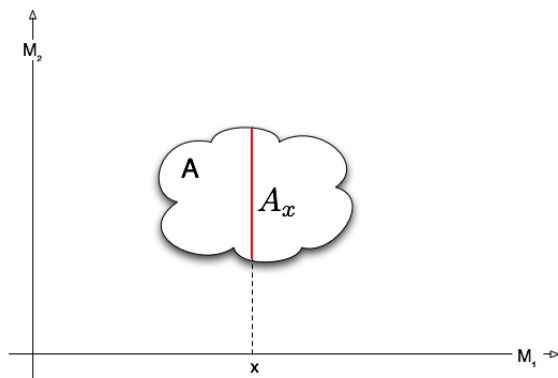
$$A_x := \{y \in M_2 : (x, y) \in A\}$$

Schnitt von A in $x \in M_1$.

(ii) Für $y \in M_2$ heißt

$$A^y := \{x \in M_1 : (x, y) \in A\}$$

Schnitt von A in $y \in M_2$.



10.1.5 Lemma über Schnitte aus Produkten von σ -Algebren

Für $A \in \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$ gilt:

- (i) $A_x \in \mathcal{M}_2$ für $x \in M_1$
- (ii) $A^y \in \mathcal{M}_1$ für $y \in M_2$

10.1.6 Satz über das Produkt σ -endlicher Maßräume

Seien $(M_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$ und $(M_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ σ -endliche Maßräume. Dann ist für jedes $A \in \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$ die Funktion $f : M_1 \rightarrow \hat{\mathbb{R}}$ definiert durch

$$f(x) := \mu_2(A_x) \quad , \quad x \in M_1$$

messbar auf (M_1, \mathcal{M}_1) . Setzen wir

$$\mu(A) := \int_{M_1} \mu_2(A_x) d\mu_1$$

für $A \in \mathcal{M} := \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$, so ist μ ein σ -endliches Maß auf $(M, \mathcal{M}) = (M_1 \times M_2, \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2)$.

10.1.7 Definition: Produktmaß

Das im vorigen Satz (10.1.6) definierte Maß μ auf $(M_1 \times M_2, \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2)$ heißt das *Produktmaß* von μ_1 und μ_2 . Man schreibt: $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$.

10.1.8 Lemma über das Produktmaß

Es seien $(M_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$ und $(M_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ σ -endliche Maßräume, und $\mu := \mu_1 \otimes \mu_2$ das Produktmaß auf $(M_1 \times M_2, \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2)$. Dann gilt:

$$\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2) \quad \forall A_1 \times A_2 \in \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$$

10.1.9 Satz über die Eindeutigkeit des Produktmaßes

Seien $(M_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$ und $(M_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ σ -endliche Maßräume. Betrachten den Produktraum

$$(M, \mathcal{M}) := (M_1 \times M_2, \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2)$$

und dazu ein beliebiges Maß μ auf (M, \mathcal{M}) . Dann gilt:

$$\mu = \mu_1 \otimes \mu_2 \Leftrightarrow \mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2) \quad \forall A_1 \times A_2 \in \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$$

10.1.10 Satz über Integrale bzgl. des Produktmaßes

Seien $(M_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$ und $(M_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ σ -endliche Maßräume und $(M, \mathcal{M}, \mu) := (M_1 \times M_2, \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$. Dann gilt:

(1) Für $A \in \mathcal{M}$ und $y \in M_2$ ist $f(y) := \mu_1(A^y)$ eine nicht-negative messbare Funktion auf (M_2, \mathcal{M}_2) und es ist

$$\mu(A) = \int_{M_2} \mu_1(A^y) d\mu_2$$

(2) Somit folgt insbesondere

$$\int_{M_1} \mu_2(A_x) d\mu_1 = \int_{M_2} \mu_1(A^y) d\mu_2$$

10.1.11 Produkt von Wahrscheinlichkeitsräumen

Es seien $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i)$, $i = 1, 2$ Wahrscheinlichkeitsräume und

$$(\Omega, \mathcal{F}) := (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2)$$

Ferner seien $X_i : \Omega \rightarrow \Omega_i$ definiert durch

$$X_i(\omega) := \omega_i, \quad \omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2$$

10.1.12 Lemma über die Projektionen X_i

Die Projektionen $X_i : \Omega \rightarrow \Omega_i$, $X_i(\omega) := \omega_i$ sind messbar von (Ω, \mathcal{F}) nach $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$.

Bemerkung: Ist P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf (Ω, \mathcal{F}) so ist die Projektion X_i eine *zufällige Variable* auf (Ω, \mathcal{F}, P) mit Werten in $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$.

10.1.13 Satz über unabhängige Variablen

Sei P irgendein Wahrscheinlichkeitsmaß auf (Ω, \mathcal{F}) . Dann sind äquivalent:

- $P = P_{X_1} \otimes P_{X_2}$, wobei P_{X_i} das Bildmaß (vgl. 9.10.2) von P bzgl. X_i auf $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$ ist (Verteilung von X_i auf $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$).
- Die Variablen X_1, X_2 sind unabhängig bzgl. P .
- Die σ -Algebren $X_i^{-1}(\mathcal{F}_i)$ sind unabhängig bzgl. P .

10.2 Der Satz von Fubini

Es seien (M_i, \mathcal{M}_i) messbare Räume und

$$(M, \mathcal{M}) := (M_1 \times M_2, \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2)$$

10.2.1 Definition: Schnittfunktion

Gegeben sei eine Funktion $f : M \rightarrow \hat{\mathbb{R}}$. Für festes $x \in M_1$ heißt $f_x : M_2 \rightarrow \hat{\mathbb{R}}$ definiert durch

$$f_x(y) := f(x, y), \quad y \in M_2$$

Schnittfunktion von f in $x \in M_1$. Analog heißt für $y \in M_2$ die Abbildung $f^y : M_1 \rightarrow \hat{\mathbb{R}}$ definiert durch

$$f^y(x) := f(x, y), \quad x \in M_1$$

Schnittfunktion von f in $y \in M_2$.

10.2.2 Lemma über Schnittfunktionen

Sei f eine messbare (erweitert reell) Funktion auf (M, \mathcal{M}) . Dann folgt:

- (1) f_x ist messbar auf (M_2, \mathcal{M}_2) für alle $x \in M_1$.
- (2) f^y ist messbar auf (M_1, \mathcal{M}_1) für alle $y \in M_2$.

10.2.3 Satz von Tonelli

Seien $(M_i, \mathcal{M}_i, \mu_i)$, $i = 1, 2$ σ -endliche Maßräume und

$$(M, \mathcal{M}, \mu) := (M_1 \times M_2, \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$$

Sei $f \geq 0$ messbar (erweitert reell) auf (M, \mathcal{M}) . Dann gilt:

(1) Die Funktionen

$$g(x) := \int_{M_2} \underbrace{f(x, y)}_{f_x(y)} \mu_2(dy), \quad h(y) := \int_{M_1} \underbrace{f(x, y)}_{f^y(x)} \mu_1(dx)$$

sind jeweils nicht-negativ, messbar in x bzw. y auf (M_1, \mathcal{M}_1) bzw. (M_2, \mathcal{M}_2) .

(2) Es gilt

$$\int_M f(x, y) \mu(d(x, y)) = \int_{M_1} \left[\int_{M_2} f(x, y) \mu_2(dy) \right] \mu_1(dx) = \int_{M_2} \left[\int_{M_1} f(x, y) \mu_1(dx) \right] \mu_2(dy)$$

Folgerung über Reihen

Sei $(a_{kn})_{(k,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ eine Folge nicht-negativer, reeller Zahlen. Dann folgt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{kn} =: \sum_{k,n=1}^{\infty} a_{kn}$$

Erläuterung: Durch Betrachtung des Zählmaßes μ_i auf $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, des Produktmaßes $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$ (Zählmaßes) auf $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}))$ und der messbaren Funktion $f(k, n) := a_{kn}$ ergibt sich die Behauptung.

10.2.4 Satz von Fubini

Seien $(M_i, \mathcal{M}_i, \mu_i)$, $i = 1, 2$ σ -endliche Maßräume, $(M, \mathcal{M}, \mu) := (M_1 \times M_2, \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$ und f eine messbare Funktion auf (M, \mathcal{M}) . Existiert das Integral

$$\int_M f(x, y) \mu(d(x, y))$$

so gilt:

(1) Die iterierten Integrale

$$\int_{M_1} \left[\int_{M_2} f(x, y) \mu_2(dy) \right] \mu_1(dx), \quad \int_{M_2} \left[\int_{M_1} f(x, y) \mu_1(dx) \right] \mu_2(dy)$$

existieren.

(2) Es gilt

$$\int_M f(x, y) \mu(d(x, y)) = \int_{M_1} \left[\int_{M_2} f(x, y) \mu_2(dy) \right] \mu_1(dx) = \int_{M_2} \left[\int_{M_1} f(x, y) \mu_1(dx) \right] \mu_2(dy)$$

Bemerkung 1: Das iterierte Integral

$$\int_{M_1} \left[\int_{M_2} f(x, y) \mu_2(dy) \right] \mu_1(dx)$$

existiert definitionsgemäß, falls gilt:

(i) Das Integral

$$\int_{M_2} f(x, y) \mu_2(dy)$$

existiert μ_1 -fast überall, das heißt es gibt eine μ_1 -Nullmenge $N \in \mathcal{M}_1$ so dass

$$\int_{M_2} f(x, y) \mu_2(dy)$$

für $x \in N^c$ existiert.

(ii) Die Funktion

$$g(x) := \begin{cases} \int_{M_2} f(x, y) \mu_2(dy) & : x \in N^c \\ 0 & : x \in N \end{cases}$$

ist messbar auf (M, \mathcal{M}) .

(iii) Das Integral

$$\int_{M_1} g(x) \mu_1(x)$$

existiert.

Bemerkung 2: Folgende Aussagen sind äquivalent

- Das Integral

$$\int_M f d\mu$$

existiert.

- Es gilt

$$\int_{M_1} \left[\int_{M_2} f^+(x, y) \mu_2(dy) \right] \mu_1(dx) < \infty \quad \vee \quad \int_{M_1} \left[\int_{M_2} f^-(x, y) \mu_2(dy) \right] \mu_1(dx) < \infty$$

- Es gilt

$$\int_{M_2} \left[\int_{M_1} f^+(x, y) \mu_1(dx) \right] \mu_2(dy) < \infty \quad \vee \quad \int_{M_2} \left[\int_{M_1} f^-(x, y) \mu_1(dx) \right] \mu_2(dy) < \infty$$

10.3 Produktmaße für n Faktoren

Es seien (M_i, \mathcal{M}_i) , $i = 1, \dots, n$ beliebige messbare Räume und

$$M := M_1 \times \dots \times M_n \quad , \quad \mathcal{M}_1 \times \dots \times \mathcal{M}_n := \{A_1 \times \dots \times A_n : A_i \in \mathcal{M}_i\}$$

Dabei ist $\mathcal{M}_1 \times \dots \times \mathcal{M}_n$ eine Halbgebra über M .

10.3.1 Definition: Produkt n messbarer Räume

Die σ -Algebra

$$\mathcal{M} := \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{M}_i := \sigma \left(\bigtimes_{i=1}^n M_i \right)$$

heißt das *Produkt* der σ -Algebren $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_n$. Der messbare Raum

$$(M, \mathcal{M}) := \left(\bigtimes_{i=1}^n M_i, \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{M}_i \right)$$

heißt das *direkte Produkt* (oder *Produktraum*) der messbaren Räume (M_i, \mathcal{M}_i) .

10.3.2 Satz über die Existenz eines Produktmaßes

Es seien $(M_i, \mathcal{M}_i, \mu_i)$, $i = 1, \dots, n$ σ -endliche Maßräume und

$$(M, \mathcal{M}) := \left(\bigtimes_{i=1}^n M_i, \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{M}_i \right)$$

Dann existiert genau ein Maß μ auf (M, \mathcal{M}) mit

$$\mu \left(\bigtimes_{i=1}^n A_i \right) = \prod_{i=1}^n \mu_i(A_i), \quad A_i \in \mathcal{M}_i, \quad i = 1, \dots, n$$

Dieses Maß ist insbesondere σ -endlich auf (M, \mathcal{M}) .

10.3.3 Definition: Produktmaß

Das eindeutig bestimmte Maß μ aus Satz 10.3.2 heißt *Produkt* der Maße μ_1, \dots, μ_n . Schreibweise:

$$\mu = \mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n = \bigotimes_{i=1}^n \mu_i$$

Somit wird

$$(M, \mathcal{M}, \mu) := \left(\bigtimes_{i=1}^n M_i, \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{M}_i, \bigotimes_{i=1}^n \mu_i \right) =: \bigotimes_{i=1}^n (M_i, \mathcal{M}_i, \mu_i)$$

zu einem σ -endlichen Maßraum.

10.3.4 Satz von Fubini

Es seien $(M_i, \mathcal{M}_i, \mu_i)$, $i \in \mathbb{N}$ σ -endliche Maßräume und

$$(M, \mathcal{M}, \mu) := \bigotimes_{i=1}^n (M_i, \mathcal{M}_i, \mu_i)$$

Sei außerdem f eine auf (M, \mathcal{M}) messbare Funktion und es existiere das Integral $\int_M f d\mu$. Dann gilt: Für alle Permutationen

(i_1, \dots, i_n) von $(1, \dots, n)$ existiert das iterierte Integral

$$\int_{M_{i_1}} \left[\int_{M_{i_2}} \dots \left[\int_{M_{i_n}} f(x_1, \dots, x_n) \mu_{i_n}(x_{i_n}) \right] \dots \mu_{i_2}(dx_{i_2}) \right] \mu_{i_1}(dx_{i_1})$$

und ist gleich $\int_M f d\mu$.

10.3.5 Das n -dimensionale Lebesgue-Maß

Betrachten den Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ mit dem (1-dimensionalen, σ -endlichen) Lebesgue-Maß λ . Dann ist

$$\lambda^n := \bigotimes_{i=1}^n \lambda$$

ein Maß auf $\left(\mathbb{R}^n, \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{B}(\mathbb{R})\right)$, und heißt das n -dimensionale Lebesgue-Maß.

10.3.6 Lemma über das n -dimensionale Lebesgue-Maß

Es gilt

$$\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$

wobei $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ die σ -Algebra der Borelmengen auf \mathbb{R}^n sei. Das Lebesgue-Maß λ^n ist somit definiert auf

$$(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$$

und charakterisiert durch die Bedingung

$$\lambda^n \left(\prod_{i=1}^n A_i \right) = \prod_{i=1}^n \lambda(A_i) \quad , \quad A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \quad i = 1, \dots, n$$

10.3.7 n -faches Produkt von Wahrscheinlichkeitsräumen

Es seien $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, \dots, n$ messbare Räume und

$$(\Omega, \mathcal{F}) := \left(\prod_{i=1}^n \Omega_i, \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{F}_i \right)$$

mit den Projektionen

$$X_i : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\Omega_i, \mathcal{F}_i) \quad , \quad X_i(\omega) := \omega_i \quad , \quad \omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega$$

10.3.8 Satz über Wahrscheinlichkeitsmaße auf Produkträumen

(1) Für Wahrscheinlichkeitsmaße P_i auf $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, \dots, n$ ist auch

$$P := \bigotimes_{i=1}^n P_i$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf (Ω, \mathcal{F}) .

(2) Sei P irgendein Wahrscheinlichkeitsmaß auf (Ω, \mathcal{F}) . Dann ist jedes X_i eine zufällige Variable auf (Ω, \mathcal{F}, P) mit Werten in $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$. Dabei sind die folgenden Aussagen äquivalent:

a) $P = \bigotimes_{i=1}^n P_{X_i}$, wobei P_{X_i} die Verteilung von X_i bzgl. P auf $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$ ist.

b) X_1, \dots, X_n sind in der Gesamtheit unabhängig bzgl. P .

c) $(X_i^{-1}(\mathcal{F}_i))_{i=1, \dots, n}$ ist eine unabhängige Familie von σ -Algebren bzgl. P . Dabei ist

$$X_i^{-1}(\mathcal{F}_i) = \{\Omega_1 \times \dots \times \Omega_{i-1} \times A_i \times \Omega_{i+1} \times \dots \times \Omega_n : A_i \in \mathcal{F}_i\}$$

10.4 Produktmaße mit unendlich vielen Faktoren

(Beispiel: unendliches Bernoulli Schema)

Seien $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i)$, $i \in \mathbb{N}$ Wahrscheinlichkeitsräume, $\Omega := \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ und

$$\mathcal{G}_n := \left\{ A = B \times \Omega^n : B \in \left(\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{F}_i \right) \right\}$$

mit

$$\Omega^n := \prod_{i=n+1}^{\infty} \Omega_i$$

10.4.1 Lemma über die \mathcal{G}_n

- (1) \mathcal{G}_n ist eine σ -Algebra für jedes $n \in \mathbb{N}$
- (2) Die \mathcal{G}_n sind monoton wachsend: $\mathcal{G}_n \subset \mathcal{G}_{n+1}$
- (3) Die Menge $\mathcal{A} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{G}_n$ ist eine Algebra.

10.4.2 Definition: Produkt unendlich vieler Wahrscheinlichkeitsräume

Es sei $\mathcal{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{G}_n$ wie im vorigen Lemma definiert. Dann heißt $\mathcal{F} := \sigma(\mathcal{A})$ die *Produkt- σ -Algebra* der σ -Algebren $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots$

Schreibweise:

$$\mathcal{F} = \left(\bigotimes_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i \right)$$

Der messbare Raum

$$(\Omega, \mathcal{F}) = \left(\prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i, \left(\bigotimes_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i \right) \right) =: \left(\bigotimes_{i=1}^{\infty} (\Omega_i, \mathcal{F}_i) \right)$$

heißt *direktes Produkt* der messbaren Räume $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i \in \mathbb{N}$.

10.4.3 Lemma: Einführung einer Mengenfunktion auf \mathcal{A}

Zu $A = B \times \Omega^n \in \mathcal{A}$, $B \in \left(\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{F}_i \right)$ definiert

$$\mathcal{P}(A) = \left(\bigotimes_{i=1}^n P_i \right) (B)$$

eine σ -additive (das heißt stetig in \emptyset), normierte, nicht-negative Mengenfunktion auf \mathcal{A} .

Bemerkung: Insbesondere ist die Definition unabhängig von der Darstellung von A .

10.4.4 Satz: Fortsetzung zu einem Wahrscheinlichkeitsmaß auf (Ω, \mathcal{F})

Es existiert genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß \mathcal{P} auf (Ω, \mathcal{F}) mit

$$\mathcal{P}(A) = \left(\bigotimes_{i=1}^n P_i \right) (B) \quad \text{für } A = B \times \Omega^n \in \mathcal{A}, B \in \left(\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{F}_i \right)$$

Erläuterung: Dies ist eine direkte Konsequenz des Satzes von Caratheodory (4.1.1).

10.4.5 Definition: Produkt unendlich vieler Wahrscheinlichkeitsmaße

Das in Satz 10.4.4 eingeführte Maß \mathcal{P} auf (Ω, \mathcal{F}) heißt *Produkt* der Wahrscheinlichkeitsmaße P_i , $i \in \mathbb{N}$. Schreibweise:

$$\mathcal{P} = \bigotimes_{i=1}^{\infty} P_i$$

Bemerkungen:

(i) Definieren wir

$$\bigtimes_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i := \left\{ \bigtimes_{i=1}^{\infty} A_i : A_i \in \mathcal{F}_i, i \in \mathbb{N}, A_i \neq \Omega_i \text{ für höchstens endlich viele } i \right\}$$

so ist

$$\bigtimes_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i \subset \mathcal{A}, \quad \sigma\left(\bigtimes_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i\right) = \sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{F}$$

(ii) Das Produktmaß $P = \bigotimes_{i=1}^{\infty} P_i$ ist charakterisiert durch

$$P\left(\bigtimes_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \prod_{i=1}^{\infty} P_i(A_i), \quad \bigtimes_{i=1}^{\infty} A_i \in \bigtimes_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$$

(iii) Satz (10.3.8) über Wahrscheinlichkeitsmaße auf Produkträume gilt analog.

10.4.6 Konstruktion einer unabhängigen Folge von zufälligen Variablen mit gegebener Verteilung

Gegeben seien die Wahrscheinlichkeitsräume $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i)$, $i \in \mathbb{N}$. Dann existiert ein Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) sowie zufällige Variablen $X_i : (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow (\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i)$, $i \in \mathbb{N}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. Die Verteilung P_{X_i} von X_i bzgl. P ist gleich P_i .
2. $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ist unabhängig bzgl. P .

Beweis: Setzen

$$(\Omega, \mathcal{F}, P) := \bigotimes_{i=1}^{\infty} (\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i)$$

und die Projektionen $X_i : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\Omega_i, \mathcal{F}_i)$ definiert gemäß

$$X_i(\omega) := \omega_i, \quad \omega = (\omega_1, \omega_2, \dots) \in \Omega$$

Beispiel: Spezialfall

Betrachten die Räume $(\Omega_i, \mathcal{F}_i) := (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $i \in \mathbb{N}$ mit den Verteilungsgesetzen P_i auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $i \in \mathbb{N}$. Dann existiert ein Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) und darauf eine unabhängige Folge $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ zufälliger Größen mit $P_{X_i} = P_i$, $i \in \mathbb{N}$.

11 L^p -Räume und Dichtefunktionen

11.1 L^p -Räume

11.1.1 Einführung

Ausgangspunkt sei ein beliebiger Maßraum (M, \mathcal{M}, μ) . Es bezeichne L die Gesamtheit aller messbarer reeller Funktionen auf (M, \mathcal{M}) . Dann ist bekanntlich L ein linearer Raum über \mathbb{R} .

Betrachten die Äquivalenzrelation auf L :

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g \quad \mu \text{ fast überall, d.h. } \mu(\{f \neq g\}) = 0$$

und den Faktorraum $L^0 := L / \sim$ von L bzgl. \sim , das heißt

$$L^0 = \{[f] : f \in L\}$$

wobei $[f]$ die Äquivalenzklasse von $f \in L$ sei. Dabei gilt stets:

$$a[f] = [af], \quad [f] + [g] = [f + g]$$

Vereinbarung: Man identifiziert die Äquivalenzklasse $[f]$ mit einem (beliebigen) Repräsentanten f .

11.1.2 Definition: L^p

Gegeben sei $0 < p < \infty$. Dann definiert man

$$L^p := \left\{ f \in L^0 : \int_M |f|^p d\mu < \infty \right\}$$

und $\|\cdot\|_p : L^p \rightarrow \mathbb{R}$ gemäß

$$\|f\|_p := \left(\int_M |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

Bemerkungen:

- Für messbare Funktion $f \in L$ ist auch $|f|^p$, $p \geq 0$ messbar, da Verkettung messbarer Funktionen.
- Später wird sich ergeben: $\|\cdot\|_p$ ist eine Norm auf L^p .

11.1.3 Youngsche Ungleichung

Für $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und beliebigen $x_1, x_2 \geq 0$ gilt die Ungleichung:

$$x_1 x_2 \leq \frac{x_1^p}{p} + \frac{x_2^q}{q}$$

11.1.4 Höldersche Ungleichung

Für $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $f \in L^p$, $g \in L^q$ gilt:

$$f \cdot g \in L^1$$

und

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

Spezialfall: Für Zahlen $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und Zahlenfolgen (ξ_n) , (η_n) gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k \eta_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

11.1.5 Minkowski Ungleichung

Gegeben sei $p \geq 1$. Für $f, g \in L^p$ ist auch $f + g \in L^p$ und es gilt

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Spezialfall: Für Zahlenfolgen $(\xi_n), (\eta_n)$ gilt die Ungleichung:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k + \eta_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

11.1.6 Satz: Der L^p als Banach-Raum

Gegeben sei $p \geq 1$ und ein Maßraum (M, \mathcal{M}, μ) . Dann ist $L^p(M, \mathcal{M}, \mu)$ ein Banach-Raum, das heißt ein vollständiger, normierter, linearer Raum. Dabei ist $\|\cdot\|_p$ genau die zugrundeliegende Norm.

Spezialfall: Der $L^2(M, \mathcal{M}, \mu)$ ist sogar ein Hilbertraum mit dem die Norm $\|\cdot\|_2$ induzierenden Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_M f \cdot g \, d\mu, \quad f, g \in L^2$$

11.2 Dichtefunktionen

11.2.1 Satz: Durch messbare Funktionen induzierte Maße

Es sei (M, \mathcal{M}, μ) ein beliebiger Maßraum und $f \geq 0$ messbar (erweitert reell) auf (M, \mathcal{M}, μ) . Definieren die Abbildung $\eta : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ gemäß

$$\eta(A) := \int_A f \, d\mu = \int_M 1_A \cdot f \, d\mu, \quad A \in \mathcal{M} \quad (1)$$

Dann gilt:

- (1) η ist ein Maß auf (M, \mathcal{M})
- (2) Für $A \in \mathcal{M}$, $\mu(A) = 0$ folgt $\eta(A) = 0$.

11.2.2 Definition: Dichtefunktion

Eine nicht-negative, messbare Funktion f auf (M, \mathcal{M}) die Gleichung (1) genügt, heißt *Dichtefunktion* (oder *Dichte*) von η bzgl. μ .

11.2.3 Satz: Eindeutigkeit von Dichtefunktionen

Es sei μ σ -endlich. Dann ist die Dichte eines Maßes η bzgl. μ , μ -fast überall eindeutig bestimmt. Das heißt, sind f_1, f_2 Dichtefunktionen von η bzgl. μ , dann gilt:

$$\mu(\{f_1 \neq f_2\}) = 0$$

11.2.4 Definition: Absolute Stetigkeit von Maßen

Es seien η, μ Maße auf (M, \mathcal{M}) . Dann heißt η *absolut stetig* bzgl. μ falls gilt:

$$\forall A \in \mathcal{M} : \mu(A) = 0 \Rightarrow \eta(A) = 0$$

Schreibweise: $\eta \ll \mu$

Bemerkung: Ein Maß η mit der Dichte f bzgl. μ (vgl. Satz (11.2.1)) erfüllt $\eta \ll \mu$.

11.2.5 Satz von Radon-Nycodym

Seien η, μ Maße auf (M, \mathcal{M}) , μ sei σ -endlich und es gelte $\eta \ll \mu$. Dann existiert eine Dichte f von η bzgl. μ :

$$\eta(A) = \int_A f d\mu, \quad A \in \mathcal{M}$$

Notation: Man bezeichnet mit $\frac{d\eta}{d\mu}$ die Dichte von η bzgl. μ .

Bemerkungen:

- Diese Dichte $\frac{d\eta}{d\mu}$ ist nach Satz 11.2.3 bis auf μ -Nullmengen eindeutig bestimmt.
- η muss nicht unbedingt σ -endlich sein: Betrachten dazu den Maßraum (M, \mathcal{M}, μ) wobei $\mu \neq 0$ nicht das Nullmaß sei. Die Dichte $f \equiv \infty$ erzeugt das Maß

$$\eta(A) = \int_A f d\mu = \infty \cdot \mu(A) = \begin{cases} 0 & : \mu(A) = 0 \\ \infty & : \mu(A) > 0 \end{cases}, \quad A \in \mathcal{M}$$

Dieses Maß η ist nicht σ -endlich.

11.2.6 Representationstheorem von Frechet-Riesz

Sei $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum und L ein stetiges, lineares Funktional $L : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$. Dann existiert ein $y \in \mathcal{H}$ so dass gilt:

$$L(x) = \langle x, y \rangle \quad \forall x \in \mathcal{H}$$

11.2.7 Satz: Integrale über Dichten

Sei h eine messbare (erweitert reell) Funktion und η, μ zwei Maße auf (M, \mathcal{M}) , mit $\eta \ll \mu$ und μ σ -endlich. Dann gilt:

$$\int_M h(x) d\eta(x) = \int_M h(x) \frac{d\eta}{d\mu}(x) d\mu(x)$$

das heißt falls eines der Integrale existiert, so existiert auch das andere und es gilt deren Gleichheit.

Merkregel: Man kann formal schreiben:

$$\int_M h d\eta = \int_M h \frac{d\eta}{d\mu} d\mu$$

Achtung: Nur Merkregel!

11.3 Singularität von Maßen

Es seien η, μ beliebige Maße auf (M, \mathcal{M}) . Dann heißen η, μ *singulär*, oder *orthogonal* falls:

$$\exists B \in \mathcal{M} : \mu(B) = \eta(B^c) = 0$$

Man schreibt: $\eta \perp \mu$.

11.3.1 Zerlegungssatz von Hahn - Lebesgue

Es seien μ, η zwei endliche Maße auf (M, \mathcal{M}) . Dann existiert eine eindeutige Zerlegung

$$\eta = \eta_a + \eta_s$$

mit den Eigenschaften:

- $\eta_a \ll \mu$
- $\eta_s \perp \mu$

12 Transformation des Lebesque Maßes

12.0.2 Satz: Substitutionsregel für das Riemann-Integral ($n = 1$)

Es sei $t : [a, b] \rightarrow t([a, b]) \subset \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $f : t([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig (beachte: $t([a, b])$ ist auch wieder ein kompaktes Intervall in \mathbb{R}). Dann gilt:

$$\int_a^b f(t(x))t'(x) dx = \int_{f(a)}^{f(b)} f(y) dy$$

Fordert man zusätzlich dass t umkehrbar eindeutig ist (also streng monoton wachsend oder fallend), so folgt:

$$\int_{[a,b]} f(t(x)) |t'(x)| \lambda(dx) = \int_{t([a,b])} f(y) \lambda(dy)$$

12.1 Lineare Transformationen

12.1.1 Satz über das n -dimensionale Lebesque-Maß

1. Das n -dimensionale Lebesque-Maß λ^n auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ ist verschiebungsinvariant, das heißt für $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ und $x \in \mathbb{R}^n$ ist auch $x + A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ und es gilt

$$\lambda^n(x + A) = \lambda^n(A)$$

2. Sei μ ein Maß auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ mit:

- (i) μ ist verschiebungsinvariant.
- (ii) $\mu([0, 1]^n) = 1$

Dann ist $\mu = \lambda^n$.

12.1.2 Lemma: Zerlegung von Endomorphismen

Jede lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ besitzt die Darstellung

$$T = S \circ \mathcal{O}$$

wobei S ein selbstadjungierter und \mathcal{O} ein orthogonaler Endomorphismus auf \mathbb{R}^n seien.

12.1.3 Satz: Das Lebesque-Maß unter linearer Transformation

Sei $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ linear. Für $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ folgt:

$$T(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \quad \wedge \quad \lambda^n(T(A)) = |\det T| \cdot \lambda^n(A)$$

Folgerungen:

- Insbesondere für orthogonale Transformation T ist $\det T = 1$ und somit

$$\lambda^n(T(A)) = \lambda^n(A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$

- Für nicht-invertierbare Transformationen T ist $\det T = 0$, das heißt jede Borelmenge wird auf eine Nullmenge abgebildet.
- Ferner: Das Lebesque Maß λ^n ist invariant gegenüber einer beliebigen Bewegung (also Hintereinanderausführung von Translationen und Drehungen).

12.2 Nicht lineare Transformationen

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $t : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $G' := t(G)$ und es gelte:

- t ist umkehrbar eindeutig.
- t ist stetig differenzierbar.
- Für die Funktionaldeterminante $F = t'$ gilt:

$$F(x) = \det \left(\frac{\partial t_i}{\partial x_j}(x) \right)_{i,j=1}^n \neq 0, \quad x \in G$$

Dabei ist

$$t = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}, \quad t_i : G \rightarrow \mathbb{R}$$

und die Umkehrabbildung t^{-1} ist auch stetig differenzierbar und durch den Satz über implizite Funktionen folgt

$$(t^{-1})'(t(x)) = [t'(x)]^{-1}, \quad x \in G$$

Man sagt: t ist ein Diffeomorphismus. Hierbei sind die Voraussetzungen symmetrisch in t und t^{-1} .

Nennen: $\lambda := \lambda^n$.

12.2.1 Satz: Maß diffeomorpher Mengen

Es sei $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $A \subset G$. Dann ist

$$\lambda(t(A)) = \int_A |\det t'(x)| \lambda(dx)$$

(vgl. lineare Approximation durch Taylorentwicklung bis zum ersten Glied).

Bemerkungen:

- Für $t(x) = Tx$, $x \in \mathbb{R}^n$ mit der $n \times n$ Matrix T ist: $t'(x) = T$ und somit

$$\lambda(t(A)) = |\det T| \lambda(A)$$

was genau Satz 12.1.3 entspricht.

- Für das Bildmaß $\lambda_{t^{-1}}$ von $\lambda|_{G'}$ bzgl. $t^{-1} : G' \rightarrow G$ und beliebiger Menge $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $A \subset G$ (also $A \in \mathcal{B}(G)$) ist

$$\lambda(t(A)) = \lambda_{t^{-1}}(A)$$

12.2.2 Satz über das Bildmaß $\lambda_{t^{-1}}$

Es bezeichne $\lambda_{t^{-1}}$ das Bildmaß von $\lambda|_{G'}$ bzgl. $t^{-1} : G' \rightarrow G$ auf $(G, \mathcal{B}(G))$. Dann gilt:

$$\lambda_{t^{-1}} \ll \lambda|_G$$

und

$$\frac{d\lambda_{t^{-1}}}{d\lambda|_G}(x) = |\det t'(x)|, \quad x \in G$$

Symbolisch: Man schreibt

$$d\lambda_{t^{-1}}(x) = |\det t'(x)| d\lambda|_G(x), \quad x \in G$$

12.2.3 Substitutionsregel

Es sei f eine nicht-negative, messbare Funktion auf $(G', \mathcal{B}(G'))$. Dann folgt:

$$\int_{G'} f(y) \lambda(dy) = \int_G f(t(x)) \cdot |\det t'(x)| \lambda(dx)$$

12.2.4 Abschwächung der Bedingungen

Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ mit G° die Menge der inneren Punkte von G ($\rightarrow G^\circ$ offen). $t : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ und G° erfüllen die Bedingungen in (12.2) und es gelte

$$\lambda(G \setminus G^\circ) = 0, \quad \lambda(t(G) \setminus t(G^\circ)) = 0 \tag{2}$$

Dann erhält die Substitutionsregel (12.2.3) ihre Gültigkeit.

Bemerkung: Aus

$$\lambda(\partial G) = 0 \wedge \lambda(\partial t(G)) = 0$$

folgt die Bedingung (2).

12.3 Anwendungen

12.3.1 Polarkoordinaten ($n = 2$)

Betrachten das Gebiet $G = [0, \infty) \times [0, 2\pi)$ und die Abbildung $t : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$t(\rho, \varphi) = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \end{pmatrix}$$

mit $t(G) = \mathbb{R}^2$. Dann ist

$$\begin{aligned} G^\circ &= (0, \infty) \times (0, 2\pi) \\ G \setminus G^\circ &= \{0\} \times [0, 2\pi) \cup [0, \infty) \times \{0\} \\ t(G) \setminus t(G^\circ) &= \{(0, 0)\} \cup \{(x, y) : y = 0, x > 0\} \end{aligned}$$

das heißt die (abgeschwächten) Bedingungen aus (12.2.4) sind erfüllt und es gilt

$$t'(\rho, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{pmatrix}$$

das heißt

$$\det t'(\rho, \varphi) = \rho \cos^2 \varphi + \rho \sin^2 \varphi = \rho \quad \text{für } (\rho, \varphi) \in G^\circ$$

Ist nun $f \geq 0$ messbar auf $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ so folgt nach der Substitutionsregel

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(y) \lambda(dy) = \int_G \rho \cdot f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \lambda(d(\rho, \varphi))$$

12.3.2 Zylinderkoordinaten ($n = 3$)

Betrachten das Gebiet $G := [0, \infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ und die Abbildung

$$t : G \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t(\rho, \varphi, z) = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

Analog zu vorhin ist

$$G^\circ = (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$$

und t, G° erfüllen die (abgeschwächten) Bedingungen aus (12.2.4). Mit

$$t'(\rho, \varphi, z) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

folgt $\det t'(\rho, \varphi, z) = \rho > 0$. Für eine auf $(\mathbb{R}^3, \mathcal{B}(\mathbb{R}^3))$ messbare Funktion $f \geq 0$ gilt somit

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(y) \lambda(dy) = \int_G \rho \cdot f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \lambda(d(\rho, \varphi, z))$$

12.3.3 Kugelkoordinaten ($n = 3$)

Sei $G := [0, \infty) \times [0, \pi] \times [0, 2\pi)$ und

$$t : G \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t(\rho, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} \rho \sin \vartheta \cos \varphi \\ \rho \sin \vartheta \sin \varphi \\ \rho \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

Mit

$$G^\circ = (0, \infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi)$$

sind die (abgeschwächten) Bedingungen aus (12.2.4) erfüllt und es gilt

$$t'(\rho, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & \rho \cos \vartheta \cos \varphi & -\rho \sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi & \rho \cos \vartheta \sin \varphi & \rho \sin \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta & -\rho \sin \vartheta & 0 \end{pmatrix} \rightarrow |\det t'(\rho, \vartheta, \varphi)| = \rho^2 \sin \vartheta \quad \text{für } (\rho, \vartheta, \varphi) \in G^\circ$$

Für messbare Funktion $f \geq 0$ gilt somit

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(y) \lambda(dy) = \int_G \rho^2 \sin \vartheta \cdot f(\rho \sin \vartheta \cos \varphi, \rho \sin \vartheta \sin \varphi, \rho \cos \vartheta) \lambda(d(\rho, \vartheta, \varphi))$$

13 Ergänzungen

13.1 Lebesgue-Stieltjes Integral

13.1.1 Definition: Lebesgue-Stieltjes Integral

Sei $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monoton wachsend und linksstetig, das heißt

$$\lim_{y \uparrow x} A(y) = A(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

Dann ist A nach Satz 6.2.2 maßerzeugend, das heißt es existiert ein (eindeutiges) Maß μ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit

$$\mu([x, y]) = A(y) - A(x)$$

Für eine messbare Funktion f für die das Integral

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \mu(dx)$$

existiert, setzt man

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dA(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x) \mu(dx)$$

13.1.2 Definition: Beschränkte Variation

Eine reelle Funktion $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist von *beschränkter Variation* auf $[a, b]$ falls

$$|A| = \text{var}_{[a,b]} A := \sup_{\substack{\zeta = \{x_1, \dots, x_n\} \\ \text{Zerlegung} \\ \text{von } [a,b]}} \sum_{k=0}^{n-1} |A(x_{k+1}) - A(x_k)| < \infty$$

A heißt von *lokal beschränkter Variation* auf $[a, b]$ falls

$$|A|(x) := \text{var}_{[a,x]} A < \infty \quad \text{für } x \in [a, b]$$

ist.

13.1.3 Satz: Jordan Komposition von Funktionen lokal beschränkter Variation

$A : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei von beschränkter Variation auf $[a, b]$ (vgl. 13.1.2). Dann besitzt A die Darstellung

$$A = A_1 - A_2$$

wobei die A_i monoton wachsende Funktionen sind. Ist A andernfalls von lokal beschränkter Variation auf $[0, \infty)$ so bleibt die Behauptung erhalten. In beiden Fällen erfüllen

$$A_1(x) := \text{var}_{[a,x]} A, \quad A_2(x) := A_1(x) - A(x)$$

diese Dekomposition.

13.1.4 Verallgemeinerung des Lebesgue-Stieltjes Integrals

$A : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sei von lokal beschränkter Variation auf $[0, \infty)$ und $A = A_1 - A_2$, wobei die A_i monoton wachsend und linksstetig sind (vgl. Satz 13.1.3). Dann setzt man

$$\int_{[0, \infty)} f(x) dA(x) := \int_{[0, \infty)} f(x) dA_1(x) - \int_{[0, \infty)} f(x) dA_2(x)$$

Bemerkung: Definieren wir das *signierte Maß* $\mu := \mu_1 - \mu_2$, mit den von A_i erzeugten Maßen μ_i , so ist

$$\int_{[0, \infty)} f(x) dA(x) = \int_{[0, \infty)} f(x) d\mu_1(x) - \int_{[0, \infty)} f(x) d\mu_2(x) = \int_{[0, \infty)} f(x) d\mu(x)$$

13.2 Uneigentliche Riemann-Integrale

Fakt: Uneigentliche Riemann-Integrale können existieren ohne dass das entsprechende Lebesque Integral existiert!

Beispiel: Das Integral

$$\int_{(0,\infty)} \frac{\sin x}{x} \lambda(dx)$$

existiert nicht. Jedoch ist

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

13.3 Der Satz von Daniell

13.3.1 Einführung

Es sei (M, \mathcal{M}) ein messbarer Raum. Dazu sei $\mathcal{B} := \mathcal{B}(M, \mathcal{M})$ der lineare Raum der beschränkten messbaren Funktionen auf (M, \mathcal{M}) , und μ ein endliches Maß auf (M, \mathcal{M}) . Dabei ist $\mathcal{B} \subset L^2(M, \mathcal{M}, \mu)$. Dann hat das Funktional L auf \mathcal{B} , definiert durch

$$L(f) := \int_M f d\mu, f \in \mathcal{B}$$

die Eigenschaften:

- 1) L ist linear.
- 2) L ist positiv, das heißt für $f \geq 0$ ist auch $L(f) \geq 0$.
- 3) Für Folge $(f_n) \subset \mathcal{B}$ mit $0 \leq f_n \downarrow 0$ gilt stets $L(f_n) \downarrow 0$. Dies folgt direkt aus dem Satz von Lebesque über majorisierte Konvergenz (9.7.2).

Umgekehrt: Für gegebenes Funktional L auf \mathcal{B} mit den Eigenschaften (1)-(3) ist die Mengenabbildung

$$\mu(A) := L(\underbrace{1_A}_{\in \mathcal{B}}), A \in \mathcal{M}$$

ein endliches Maß auf (M, \mathcal{M}) und es gilt

$$L(f) = \int_M f d\mu, f \in \mathcal{B}$$

13.3.2 Definition: Riesz-Raum

Eine Teilmenge $\mathcal{H} \subset \mathcal{B}(M, \mathcal{M})$ ist ein *Riesz-Raum* falls gilt:

- \mathcal{H} ist linear
- $1_M \in \mathcal{H}$
- \mathcal{H} ist \wedge und \vee stabil, das heißt für $f, g \in \mathcal{H}$ ist auch $f \wedge g, f \vee g \in \mathcal{H}$
- Es gilt $\mathcal{M} = \sigma(\mathcal{H})$, das heißt \mathcal{M} ist die kleinste σ -Algebra über die alle $f \in \mathcal{H}$ messbar sind.

Beispiel: Der gesamte $\mathcal{B}(M, \mathcal{M})$ ist ein Riesz-Raum.

13.3.3 Satz von Daniell

\mathcal{H} sei ein Riesz-Raum und L ein Funktional auf \mathcal{H} mit den Eigenschaften (1)-(3) aus (13.3.1). Dann existiert ein eindeutig bestimmtes Maß μ auf (M, \mathcal{M}) mit

$$L(f) := \int_M f d\mu, f \in \mathcal{H}$$

Wegen $1_M \in \mathcal{H}$ ist dies insbesondere endlich.

Spezialfall: Für eine Algebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ mit $\mathcal{M} = \sigma(\mathcal{A})$ und endliches Prämaß μ auf \mathcal{A} betrachten wir den Riesz-Raum

$$\mathcal{H} = \left\{ f = \sum_{k=1}^n c_k 1_{A_k} : c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \right\}$$

und das Funktional

$$L(f) := \sum_{k=1}^n c_k \mu(A_k) \quad \text{für } f = \sum_{k=1}^n c_k 1_{A_k} \in \mathcal{H}$$

Dann erfüllt L auf \mathcal{H} die Eigenschaften (1)-(3) aus (13.3.1). Nach dem Satz von Daniell existiert somit ein (eindeutig bestimmtes, endliches) Maß $\bar{\mu}$ auf \mathcal{H} mit

$$L(f) = \int_M f d\bar{\mu}, \quad f \in \mathcal{H}$$

Insbesondere ist dann $\mu = \bar{\mu}|_{\mathcal{A}}$.

Folgerung: Satz von Caratheodory (4.1.1).

13.4 Der Satz von Frigyes Riesz

Sei \mathcal{K} ein kompakter, topologischer Hausdorff Raum, das heißt zu jedem $x \neq y \in \mathcal{K}$ existieren disjunkte, offene Umgebungen $U_x \ni x$, $U_y \ni y$. Ferner sei $\mathcal{C}(\mathcal{K})$ die Menge der stetigen Funktionen auf \mathcal{K} . Es gilt: $\mathcal{C}(\mathcal{K})$ ist ein Riesz-Raum.

Für die so genannte *Bairesche* σ -Algebra

$$\mathcal{B}_0(\mathcal{K}) := \sigma(\mathcal{C}(\mathcal{K}))$$

gilt:

- $\mathcal{C}(\mathcal{K}) \subset \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{B}_0(\mathcal{K}))$.
- $\mathcal{B}_0(\mathcal{K}) \subset \mathcal{B}(\mathcal{K})$, wobei $\mathcal{B}(\mathcal{K})$ die Borelmengen auf \mathcal{K} seien.

Bemerk: Die Gleichheit der beiden Mengen gilt, falls \mathcal{K} separabel ist. Dies ist z.B. der Fall wenn \mathcal{K} metrisch ist, denn für jedes $\varepsilon > 0$ ist dann

$$\mathcal{K} = \bigcup_{x \in \mathcal{K}} B_\varepsilon^o(x) \xrightarrow{\mathcal{K} \text{ kompakt}} \mathcal{K} = \bigcup_{i=1}^{n_\varepsilon} B_\varepsilon^o(x_i^\varepsilon) \quad \text{für endlich viele } x_i^\varepsilon \in \mathcal{K}$$

das heißt die abzählbare Menge

$$\left\{ x_i^{\frac{1}{m}} \mid i = 1, \dots, n_{\frac{1}{m}}, m \in \mathbb{N} \right\}$$

ist dicht in \mathcal{K} .

13.4.1 Satz von Frigyes Riesz

Sei L ein lineares, positives Funktional auf $\mathcal{C}(\mathcal{K})$. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes endliches Maß μ auf $(\mathcal{K}, \mathcal{B}_0(\mathcal{K}))$ mit

$$L(f) = \int_{\mathcal{K}} f d\mu, \quad f \in \mathcal{C}(\mathcal{K})$$