Quantenoptik

Dr. Holger Gies

vom Dozenten nicht durchgesehene Vorlesungsmitschrift[1]

von Silvio Fuchs

Stand: 20. Oktober 2009

[1]keine Gewähr auf Richtigkeit

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einführung

1.1 Einführung

Quantenoptik: Phänomene, die beschrieben werden müssen durch Quantenzustände des Lichtes.

1.1.1 Historischer Überblick

Bis 1970 ließen sich viele Phänomene (z.B. Photoelektrischer Effekt) durch semi-klassische Beschreibungen verstehen. (quantisierte Materie, klassisches Licht '63 Theorie, Glauber) Nach 1970 waren dann direkte Nachweise der Quantennatur von Licht möglich (anti-bunching).

Kapitel 2

Quantisierung des elektro-magnetischen Feldes

In dieser Vorlesung wird eine nicht-manifestierte relativistische Notation verwendet.

2.1 Freies elektromagnetisches Feld

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \tag{2.1}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{1}{c^2}\partial_t \vec{E} \tag{2.2}$$

2.1.1 Potentialansatz:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad , \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \partial_t \vec{A} \quad \text{erfüllt 2.1}$$

$$\text{Aus 2.2 mit} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) - \vec{\nabla}^2 \cdot \vec{A} \quad \text{folgt}$$

$$\vec{\nabla}\left(\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) + \frac{1}{c^2}\partial_t \varphi\right) - \vec{\nabla}^2 \vec{A} + \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \vec{A} = 0 \tag{2.3}$$

$$\partial_t \left(\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) + \frac{1}{c^2}\partial_t \varphi\right) + \vec{\nabla}^2 \varphi - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \varphi = 0 \tag{2.4}$$

Residuelle Eichfreiheit wird fixiert durch die Eichbedingung: z.B. Coulomb-Eichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{c^2}\vec{\nabla}\partial_t \varphi - \vec{\nabla}^2 \vec{A} + \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \vec{A} = 0 \tag{2.5}$$

$$\vec{\nabla}^2 \varphi = 0 \tag{2.6}$$

Quellenfreier unbeschränkter Raum $\Rightarrow$ relevante Lösung: $\varphi = 0$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \vec{A} = 0 \tag{2.7}$$

Wellengleichung plus Coulomb-Eichung sind 2 Freiheitsgrade (Polarisation).
Dabei ist in Coulomb-Eichung

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{2.8}$$

$$\vec{E} = -\partial_t \vec{A} \tag{2.9}$$

2.2 Wirkungsprinzip

Das Lagrange Funktional des EM-Feldes mit Wirkung ist $S = \int \, \mathrm{d}t L$

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}\int \, \mathrm{d}^3x \left(\varepsilon_0 \vec{E}^2 - \frac{1}{\mu_0}\vec{B}^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\int \, \mathrm{d}^3x \left(\varepsilon_0 \left(\partial_t \vec{A}\right)^2 - \frac{1}{\mu_0}\left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right)^2\right) \end{aligned} \tag{2.10}$$

vgl. $L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q)$. Mit

$$\begin{aligned}\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)^2 &= \epsilon_{ijk}\partial_j A_k \epsilon_{ilm}\partial_l A_m \\ &= \left(\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}\right)\partial_j A_k \partial_l A_m \\ &= \left(\partial_j A_k\right)^2 - \left(\partial_j A_k\right)\left(\partial_k A_j\right) \\ &= \left(\partial_j A_k\right)^2 - \partial_j\left(A_k \partial_k A_j\right) - A_k\partial_k \underbrace{\partial_j A_j}_{=0 \text{ C.E.}}\end{aligned}$$

Es folgt:

$$L = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x \left(\varepsilon_0 \left(\partial_t A_i\right)^2 - \frac{1}{\mu_0}\left(\partial_j A_k\right)^2\right) \tag{2.11}$$

Mit den Euler-Lagrange Gleichungen

$$\frac{\delta L}{\delta A_i} - \partial_t \frac{\delta L}{\delta \partial_t A_i} = 0 \tag{2.12}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\delta L}{\delta \partial_t A_i} = \varepsilon_o \partial_t A_i \quad , \quad \frac{\delta L}{\delta A_i} = \frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}^2 A_i \tag{2.13}$$

Die Funktionalableitung ist dabei:

$$\frac{\delta}{\delta A_i(x)} A_j(x') = \delta_{ij}\delta^{(3)}(x-x') \quad \text{vgl.} \quad \frac{\partial q_i}{\partial q_j} = \delta_{ij}$$

Bewegungsgleichungen:

$$\vec{\nabla}^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\vec{A} = 0 \tag{2.14}$$

mit den Eichbedingunen $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$ und $\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$. Damit ist der kanonisch konjugierte Impuls:

$$\Pi_i = \frac{\delta L}{\delta \partial_t A_i} = \varepsilon_0 \partial_t A_i = -\varepsilon_0 E_i \tag{2.15}$$

Wir identifizieren q mit A_i und p mit $-\varepsilon_0 E_i$. Das Hamilton Funktional folgt dann mit Legendre-Transformation zu

$$\begin{aligned}H &= \int \mathrm{d}^3x \Pi_i \partial_t A_i - L \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0}\int \mathrm{d}^3x \Pi_i^2 - \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x \left(\varepsilon_0 \frac{1}{\varepsilon_0^2}\Pi_i^2 - \frac{1}{\mu_0}\left(\partial_j A_k\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x \left(\frac{1}{\varepsilon_0}\Pi_i^2 + \frac{1}{\mu_0}\left(\partial_j A_k\right)^2\right)\end{aligned} \tag{2.16}$$

Mit der Coulomb-Eichung erhalten wir also:

$$H = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x \left(\varepsilon_0\vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\vec{B}^2\right) \tag{2.17}$$

Die kanonischen Gleichungen sind also

$$\partial_t A_i = \frac{\delta H}{\delta \Pi_i} = \frac{1}{\varepsilon_0}\Pi_i \tag{2.18}$$

$$\partial_t \Pi_i = -\frac{\delta H}{\delta A_i} = \frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}^2 A_i \tag{2.19}$$

Diese führen auf die Wellengleichung.

2.3 Quantisierung

Analog zur 1-Teilchen Quantenmechanik

$$\begin{aligned}&H \to \hat{H} \quad \text{Hamiltonoperator} \\ &A_i \to \hat{A}_i \quad \text{Feldoperator} \\ &\Pi_i \to \hat{\Pi}_i\end{aligned}$$

Alle Operatoren sind hermitesch. Ausserdem wird aus $\{\cdot,\cdot\}$ der Kommutator $\frac{1}{i\hbar}[\cdot,\cdot]$

2.3.1 Komplikationen mit der Eichsymetrie

$$\text{Vergleich} \quad \{q,p\} = \delta_{ij} : \qquad \{A_i(x), \Pi_i(x')\} \overbrace{=}^{?} \delta_{ij}\delta^{(3)}(x-x')$$

Wir überprüfen obige Poissonklammer unter Anwendung von ∂_i LHS= 0 (Coulombeichung) ,
RHS= $\partial_i \delta^{(3)}(x-x') \neq 0$ und damit ist Gleichung 2.20 falsch. Notwendig ist also eine Einschränkung der Poisson-Klammern auf transversale Freiheitsgrade (Poisson-Klammer gilt nicht für alle Komponenten). Dazu definieren wir den transversalen Projektor:

$$P_{Tij} = \delta_{ij} - \frac{\partial_i \partial_j}{\partial^2} \quad \text{(formal!)} \tag{2.20}$$

Die fundamentalen Poisson-Klammern

$$\{A_i(x), \Pi_j(x')\} = P_{Tij}\delta^{(3)}(x-x') \tag{2.21}$$

Die Überprüfung ergibt:

$$\text{RHS} = \partial_i P_{Tij}\delta^{(3)}(x-x') = \underbrace{\left(\partial_j - \frac{\partial_i \partial_i \partial_j}{\partial^2}\right)}_{=0} \delta^{(3)}(x-x')$$

Aus der expliziten Darstellung mit $\partial^2 \frac{1}{|x-x'|} = -4\pi\delta^{(3)}(x-x')$ folgt

$$P_{Tij}\delta^{(3)}(x-x') = \delta_{ij}\delta^{(3)}(x-x') + \frac{1}{4\pi}\partial_i\partial_j \frac{1}{|x-x'|} \tag{2.22}$$

und damit die Quantisierung mit dem Axiom:

$$\left[\hat{A}_i(x), \hat{\Pi}_j(x')\right] = i\hbar P_{Tij}\delta^{(3)}(x-x') \quad \text{und} \tag{2.23}$$

$$\left[\hat{A}_i(x), \hat{A}_j(x')\right] = 0 = \left[\hat{\Pi}_i(x), \hat{\Pi}_j(x')\right] \tag{2.24}$$

Letzteres ist eine Gleichzeitigkeitsvertauschungsrelation bei einem festen t. Im Heisenbergbild folgt die Zeitableitung aus (für transversale Freiheitsgrade ist $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$)

$$\partial_t \hat{A}_i = \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{A}_i, H\right] = \frac{1}{\varepsilon_0}\Pi_i \tag{2.25}$$

$$\partial_t \hat{\Pi}_i = \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{\Pi}_i, H\right] = \frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}^2 \hat{A}_i \tag{2.26}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}^2 \hat{A}_i - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \hat{A}_i = 0 \quad \text{Wellengleichung für Feldoperatoren} \tag{2.27}$$