Spektraltheorie

FSU Jena - SS 08

Vorlesungsscript

Stilianos Louca

29. Juli 2008

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

1.1 Was dies ist

Hierbei handelt es sich um Aufzeichnungen des Stoffes der im SS 2008 an der FSU Jena von Dr. Rainer Oloff im Fach Spektraltheorie gelehrt wurde.

1.2 Verbesserungen

Ich werde immer mal dieses Skript verbessern bzw. erweitern. Im Falle von Fehlern, ist mir Bescheid zu sagen das beste was du machen kannst da so alle davon profitieren können. Wissen ist das einzige auf dieser Welt das vom Teilen mehr wird!
Ich bin zu erreichen unter *stilianos.louca@apfel.uni-jena.de*, ohne das *Obst*.

2 Metrische Räume

2.1 Kompakte Mengen

2.1.1 Definition: Kompaktheit

Eine Teilmenge M eines metrischen Raumes ist *kompakt*, wenn sich in jeder Familie $(G_i)_{i\in I}$ offener Mengen G_i mit $M \subset \bigcup\limits_{i\in I} G_i$ (offene Überdeckung) endlich viele $G_{i_1}, .., G_{i_n}$ mit $M \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} G_{i_k}$ (endliche Überdeckung) finden lassen.

2.1.2 Überdeckungssatz von Heine-Borel

Jedes abgeschlossene (beschränkte) Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ist kompakt.

Beweis: Sei $[a,b] \subset \bigcup\limits_{i\in I} G_i,\ G_i$: offen und

$$M := \{c \in [a,b] : [a,c] \text{ lässt sich durch endlich viele } G_i \text{ überdecken}\}$$

Es gilt: $a \in M$ also $M \neq \emptyset$. Doch M ist (per Konstruktion) nach oben beschränkt $\to\ d := \sup M$ und $d \in [a,b]$ da $[a,b]$ abgeschlossen ist $\to\ \exists\ G_k$ mit $d \in G_k$.
Doch dieses G_k ist offen, insbesondere nach links, das heißt für den Fall $d > a : \exists\ \varepsilon > 0$ mit $[d-\varepsilon, d] \in G_k$. Doch $[a, d-\varepsilon]$ ist überdeckbar mit endlich vielen G_i, also auch $[a,d]$. Für den Fall $a = d$ ist dies natürlich klar. Also ist auf jeden Fall $d \in M$.
Es bleibt also zu zeigen: $d = b$. Indirekt:
Annahme: $d < b$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit

$$[d-\varepsilon, d+\varepsilon] \subset (G_k \cap [a,b])$$

da G_k offen. Doch dann ist auch $[a, d+\varepsilon]$ durch endlich viele G_i überdeckbar, und $d \neq \sup M$, was ein Widerspruch ist! Somit muss $d = b$ sein und $[a,b]$ ist überdeckbar durch endlich viele G_i. $\square$

2.1.3 Definition: Folgenkompaktheit

Eine Teilmenge M eines metrischen Raumes ist *Folgenkompakt* $:\Leftrightarrow$ Jede Folge aus M besitzt eine in M konvergente Teilfolge.

2.1.4 Satz von Bolzano Weierstraß

Jedes Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ist folgenkompakt.

Beweis: Analysis I

2.1.5 Definition: Präkompaktheit

Eine Teilmenge M eines metrischen Raumes (E,d) ist *Präkompakt* $:\Leftrightarrow$

$$\forall\ \varepsilon > 0 : \exists\ x_1, .., x_n \in E : M \subset \bigcup_{i=1}^{n} B^o_\varepsilon(x_i) \quad , \quad B^o_\varepsilon(x_i) := \{x \in E \mid d(x_i, x) < \varepsilon\}$$

Bemerkungen:

a) Ist M kompakt, so ist sie auch Präkompakt.
Beweis: Das System $(B^o_\varepsilon(x))_{x\in M}$ überdeck ganz M. Doch ist M kompakt, so gibt es auch endlich viele davon die M überdecken.

b) Ist M Präkompakt, und $M' \subset M$, so ist auch M' Präkompakt.

c) In der Definition von Präkompaktheit, kann auch $x_1, .., x_n \in M$ gefordert werden, ohne den Begriff zu ändern.

2.1.6 Satz über kompakte und folgenkompakte Mengen

Jede kompakte Teilmenge M ist auch folgenkompakt.

Beweis: Sei M kompakt und (x_n) eine Folge aus M.

- Konstruieren Mengenfolge:

$$F_n := \overline{\{x_n, x_{n+1}, ...\}} : \text{abgeschlossene Hülle von } \{x_n, x_{n+1}, ...\}$$

  Diese Folge abgeschlossener Mengen F_n ist monoton fallend, das heißt $F_n \supset F_{n+1}$.

- Behauptung:

$$\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) \cap M \neq \emptyset$$

  Beweis der Behauptung: Machen die Annahme: $\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) \cap M = \emptyset$ also

$$M \subset \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right)^c = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n^c\right) : \text{offen, da } F_n^c \text{ offen}$$

  Da M kompakt ist, existieren $n_1 < n_2 < .. < n_k$ mit

$$M \subset \bigcup_{i=1}^{k} F_{n_i}^c \overset{*}{=} F_{n_k}^c \quad (*) : \text{da } F_n^c \text{ monoton wachsend}$$

  doch $x_{n_k} \in M$ und $x_{n_k} \in F_{n_k} \;\rightarrow\; x_{n_k} \notin F_{n_k}^c$ was ein Widerspruch ist! Also ist die Behauptung wahr.

- Konstruieren jetzt eine Teilfolge $(x_{n_k})_k$, die gegen x konvergiert. Wählen dazu ein $x \in \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) \cap M$. Insbesondere ist dann $x \in F_1$ und $\{x_1, x_2, ..\}$ ist dicht in F_1. Wählen ein n_1 mit $d(x_{n_1}, x) < 1$. Analog ist $x \in F_{n_1+1}$ und $\{x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, ..\}$ dicht in F_{n_1+1}. Wählen $n_2 > n_1$ mit $d(x_{n_2}, x) < \frac{1}{2}$. Analog kann man $n_3 > n_2$wählen, mit $d(x_{n_3}, x) < \frac{1}{3}$ u.s.w. Haben also eine Teilfolge $(x_{n_k})_k$ mit $d(x_{n_k}, x) < \frac{1}{k}$ d.h $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x \in M$ gefunden. □

2.1.7 Satz über folgenkompakte und präkompakte Mengen

Jede folgenkompakte Menge M ist auch präkompakt.

Beweis: Sei M folgenkompakt. Annahme: M ist nicht präkompakt, das heißt $\exists\ \varepsilon > 0$ so dass M nicht mit endlich vielen Kreisscheiben $B_\varepsilon^o(x)$ überdeckbar ist. Wählen ein $x_1 \in M$ und $x_2 \in M \setminus B_\varepsilon^o(x_1)$. Wählen daraufhin ein $x_3 \in M \setminus (B_\varepsilon^o(x_1) \cup B_\varepsilon^o(x_2))$ u.s.w. Allgemein wählen $x_n \in M \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} B_\varepsilon^o(x_i)$. Dies ist immer möglich, da M nicht präkompakt ist. Haben somit eine Folge (x_n) konstruiert, mit $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$ für $i \neq j$. Somit ist auch jede Teilfolge nicht Cauchy und somit nicht konvergent. Also ist M nicht folgenkompakt was ein Widerspruch ist. Somit muss M präkompakt sein. □

2.1.8 Satz über präkompakte und vollständige Mengen

Jede präkompakte und vollständige Menge ist kompakt.

Beweis: M sei präkompakt und vollständig.

- Sei
$$M \subset \bigcup_{a\in A} G_a \ , \ G_a : \text{offen}$$
Zu zeigen wäre $\exists\ \alpha_1,..,\alpha_n \in A$ mit $M \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_{a_i}$.

- Annahme: Es existiert keine endliche Überdeckung. Konstruieren eine Folge (x_n) die sich als Cauchyfolge erweist. Wählen ein $x_1 \in M$ so dass sich $B^o_{\frac{1}{2}}(x_1) \cap M$ nicht durch endlich viele G_α überdecken lässt. Solch ein x_1 existiert, da sonst jede Menge $B^o_{\frac{1}{2}}(x) \cap M$ durch endlich viele überdeckt werden könnte. Und da M präkompakt ist, wäre dann auch M mit endlich vielen G_a überdeckt.

  Wählen $x_2 \in B^o_{\frac{1}{2}}(x_1) \cap M$, so dass sich $B^o_{\frac{1}{4}}(x_2) \cap B^o_{\frac{1}{2}} \cap M$ nicht durch endlich viele G_a überdecken lässt. Solch ein x_2 existiert, da sonst jede Menge $B^o_{\frac{1}{4}}(x) \cap B^o_{\frac{1}{2}}(x_1) \cap M$ durch endlich viele G_a überdeckt werden könnte. Doch da $B^o_{\frac{1}{2}}(x_1) \cap M$ präkompakt ist, wäre dann auch $B^o_{\frac{1}{2}}(x_1) \cap M$ durch endlich viele G_a überdeckbar was der Wahl von x_1 widerspräche.

- Setzen dieses Spiel fort, und erhalten so eine Folge (x_n) mit:
  - $x_n \in B^o_{\frac{1}{2^{n-1}}}(x_{n-1}) \cap \cdots \cap B^o_{\frac{1}{2}}(x_1) \cap M$
  - Die Menge $B^o_{\frac{1}{2^n}}(x_n) \cap \cdots \cap B^o_{\frac{1}{2}}(x_1) \cap M$ lässt sich nicht durch endlich viele G_a überdecken.

  Die Folge (x_n) ist eine Cauchyfolge. Denn sei $m > n$, dann ist $x_m \in B^o_{\frac{1}{2^n}}(x_n)$ also $d(x_m, x_n) < \frac{1}{2^n}$. Für jedes $\varepsilon > 0$ lässt sich immer ein N finden so dass $\forall\ n > N : \dfrac{1}{2^n} < \varepsilon$ ist.
  Da M vollständig ist, konvergiert (x_n) in M:
$$x_n \to x_0 \in M \subset \bigcup_{a\in A} G_a$$
  also $x_0 \in G_{a_0}$

- Wählen ein $\varepsilon > 0$ mit $B^o_\varepsilon(x_0) \subset G_{a_0}$. Für genügend große n gilt: $x_n \in B^o_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_0)$ und $B^o_{\frac{1}{2^n}}(x_n) \subset B^o_\varepsilon(x_0) \subset G_{a_0}$. Damit ist $B^o_{\frac{1}{2^n}}(x_n)$ durch ein G_{a_0} überdeckt. Doch dann ist auch $B^o_{\frac{1}{2^n}}(x_n) \cap \cdots \cap B^o_{\frac{1}{2}}(x_1) \cap M$ durch G_{a_0} überdeckt was der Konstruktion von x_n widerspricht!
  Somit muss es eine endliche Überdeckung von M geben. $\square$

2.1.9 Satz über folgenkompakte Mengen

Jede folgenkompakte Menge M ist vollständig.

Beweis: Sei M folgenkompakt und $(x_n) \subset M$ eine Cauchyfolge. Dann $\exists$ eine Teilfolge (x_{n_k}) mit $x_{n_k} \to x_0 \in M$. Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann wählen $N \in \mathbb{N}$ mit $d(x_m, x_n) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ für $m, n > N$ und ein $k \in \mathbb{N}$ mit $d(x_{n_k}, x_0) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ und $n_k > N$. Dann gilt für $n > n_k$:
$$d(x_n, x_0) \leq \underbrace{d(x_n, x_{n_k})}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{d(x_{n_k}, x_0)}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon \quad \square$$

Folgerung: Aus Sätzen 2.1.7, 2.1.9 und schließlich Satz 2.1.8 folgt: Jede folgenkompakte Menge ist kompakt. Zusammen mit Satz 2.1.6 folgt also die Äquivalenz der Aussagen über eine Menge M:

- M ist kompakt.
- M ist folgenkompakt.
- M ist präkompakt und vollständig.

2.2 Der Raum $\mathcal{C}(M)$

M sei ein kompakter metrischer Raum.

2.2.1 Definition: $\mathcal{C}(M)$

$\mathcal{C}(M)$ sei der lineare Raum aller stetigen, reellwertigen Funktionen in der kompakten Menge M.

Bemerkungen: Jede stetige Funktion auf einer folgenkompakten (also auch kompakter) Menge ist gleichmäßig stetig, beschränkt und nimmt ihr Supremum und Infimum an. Der Raum $\mathcal{C}(M)$ ist somit ausgestattet mit einer Norm

$$\|f\|_\infty := \|f\| := \sup_{x\in M} |f(x)|$$

bzw. einer Metrik

$$d(f,g) := \|f-g\| = \sup_{x\in M} |f(x)-g(x)|$$

Dadurch erhält man den Begriff der *gleichmäßigen Konvergenz* von Funktionen. Analog definiert man $\mathcal{C}^m(M) \subset \mathcal{C}(M)$ als den Raum aller m-mal stetig differenzierbaren, reellwertigen Funktionen in M.

2.2.2 Lemma über die Vollständigkeit von $\mathcal{C}^m(M)$

1) $(\mathcal{C}(M), \|\cdot\|_\infty)$ ist vollständig.
2) $(\mathcal{C}^m(M), \|\cdot\|_\infty)$ ist für $m \geq 1$ <u>nicht</u> vollständig.
   Beispiel: Betrachten die Funktionenfolge
   $$x_n(t) = \left(t^2 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$$
   in $\mathcal{C}^1([-1,1])$. Diese konvergiert bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ gegen $|\cdot|$. Jedoch ist $|\cdot|$ nicht differenzierbar.
3) Allgemein gilt jedoch: In der Norm
   $$\|f\|^{(m)} := \sum_{k=0}^{m} \left\|f^{(k)}\right\|_\infty$$
   ist $\left(\mathcal{C}^m(M), \|\cdot\|^{(m)}\right)$ vollständig. Gleiches gilt auch für die (äquivalente, vgl. 4.1.4) Norm
   $$\|f\|_*^{(m)} := \sup_{0\leq k\leq p} \left\|f^{(k)}\right\|_\infty$$

2.2.3 Satz von Dini

Eine Folge von reellen Funktionen $f_n \in \mathcal{C}(M)$, die punktweise und monoton gegen $f \in \mathcal{C}(M)$ konvergiert, konvergiert sogar gleichmäßig gegen f.

Beweis: Sei $f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots \leq f(x)$ und $f_n(x) \to f(x)\ \forall\ x \in M$. Sei $\varepsilon > 0$ und

$$G_n := \{x \in M \mid f(x) - f_n(x) < \varepsilon\}$$

Es ist G_n offen, da Urbild der Menge $(-\infty, \varepsilon) \subset \mathbb{R}$ bzgl. der Funktion $f(x) - f_n(x)$. Außerdem ist:

$$M \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n \text{ da } \forall\ x \in M : \exists\ G_n \ni x$$

Da M kompakt ist, existieren endlich viele G_{n_i} mit $M \subset \bigcup_{i=1}^{k} G_{n_i}$. Die Folge G_n hängt außerdem monoton wachsend von n ab: $G_n \subset G_{n+1}$, also $M \subset G_{n_k}$. Das heißt

$$\forall\ x \in M\ \forall\ n > n_k : f(x) - f_n(x) < \varepsilon\ \to\ |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow\ \|f - f_n\| = \sup_{x\in M} |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon\quad \forall\ n > n_k \qquad \square$$

Der Weierstraßsche Approximationssatz

Sei M ein kompakter metrischer Raum.

2.2.4 Klassisch: Der Weierstraßsche Approximationssatz

Jede auf dem abgeschlossenem Intervall $[0,1]$ stetige, reellwertige Funktion f, lässt sich gleichmäßig durch Polynome approximieren. Das heißt: Die Polynome sind dicht in $[0,1]$. Das leisten die so genannten *Bernstein Polynome*:

$$B_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} \quad \text{(ohne Beweis)}$$

Im folgenden wird eine allgemeinere Formulierung des oberen Satzes bewiesen.

2.2.5 Definition: Linearer Verband

Ein *linearer Verband* in $\mathcal{C}(M)$ ist eine Teilmenge $V \subset \mathcal{C}(M)$ mit den Eigenschaften:

- Linearität: Für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $f, g \in V$ ist auch $\lambda f + \mu g \in V$
- Für $f \in V$ ist auch $|f| \in V$

Beispiel: Der Raum $\mathcal{C}(M)$ ist ein linearer Verband.

2.2.6 Satz über lineare Verbände

Sei V ein linearer Verband und $f, g \in V$. Dann gilt:

- $\max\{f,g\} \in V$ mit $\max\{f,g\}(x) := \max\{f(x), g(x)\}$
- $\max\{f,g\} \in V$ mit $\min\{f,g\}(x) := \min\{f(x), g(x)\}$

Beweis: Der Satz folgt direkt aus der Tatsache:

$$\max\{f,g\}(x) = \max\{f(x),g(x)\} = \frac{f(x)+g(x)}{2} + \frac{|f(x)-g(x)|}{2} = \underbrace{\left[\frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2}\right]}_{\in V}(x)$$

$$\min\{f,g\}(x) = \min\{f(x),g(x)\} = \frac{f(x)+g(x)}{2} - \frac{|f(x)-g(x)|}{2} = \underbrace{\left[\frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2}\right]}_{\in V}(x)$$

□

2.2.7 Definition: Trennende Funktionenmenge

Eine Teilmenge $W \subset \mathcal{C}(M)$ *trennt die Punkte* von M, wenn zu jedem Paar $x, y \in M$ verschiedener Punkte, ein $f \in W$ existiert, mit $f(x) \neq f(y)$.

2.2.8 Satz über trennende Mengen

In einem linearen Teilraum $W \subset \mathcal{C}(M)$ der die Punkte trennt und die Funktion 1 enthält, findet man zu $x \neq y$ und Zahlen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ein $f \in W$, so dass gilt: $f(x) = \lambda$ und $f(y) = \mu$.

Beweis: Wählen $g \in W$ mit $g(x) \neq g(y)$ und setzen:

$$f(z) := \lambda + \frac{g(z) - g(x)}{g(y) - g(x)}(\mu - \lambda)$$

Dann erfüllt f die gesuchte Eigenschaft und ist in W. □

2.2.9 Satz von Stone

Ein linearer Verband $V \subset \mathcal{C}(M)$ der die Punkte von M trennt und die Funktion 1 enthält, ist dicht in $\mathcal{C}(M)$.

Beweis: Sei $f \in \mathcal{C}(M)$ und $\varepsilon > 0$. Gesucht ist eine Funktion $\varphi \in V$ mit $d(\varphi, f) = \|\varphi - f\| < \varepsilon$.

- Zu $x, y \in M$ wählen wir $f_{xy} \in V$ mit $f_{xy}(x) = f(x)$ und $f_{xy}(y) = f(y)$ (vgl. Satz 2.2.8) und setzen

$$G_{xy} := \{z \in M \mid f_{xy}(z) > f(z) - \varepsilon\}$$

  Dann gilt: G_{xy} ist offen, denn $G_{xy} = (f_{xy} - f)^{-1}(-\varepsilon, \infty)$ ist Urbild einer stetigen Funktion von einer offenen Menge. Insbesondere sind $x, y \in G_{xy}$ da $f_{xy}(x) = f(x)$, $f_{xy}(y) = f(y)$. Somit ist

$$M = \bigcup_{y \in M} G_{xy} \ \forall\, x \in M$$

  Da M kompakt ist, gibt es sogar endlich viele $y_1, .., y_n \in M$ mit

$$M \subset \bigcup_{i=1}^{n} G_{xy_i}$$

- Setzen jetzt für $x \in M$:

$$f_x := \max\{f_{xy_1}, \ldots, f_{xy_n}\} \in V$$

  Jede Funktion f_x hat die Eigenschaften:

$$f_x(z) > f(z) - \varepsilon \ \forall\, z \in M \quad \wedge \quad f_x(x) = f(x)$$

  Nennen wir

$$G_x := \underbrace{\{z \in M \mid f_x(z) < f(z) + \varepsilon\}}_{(f_x - f)^{-1}(-\infty, \varepsilon)}$$

  so ist G_x offen und $x \in G_x$. Somit folgt

$$M \subset \bigcup_{x \in M} G_x \overset{M \text{ kompakt}}{=} \bigcup_{i=1}^{m} G_{x_i}$$

  für geeignete $x_1, .., x_m$.

- Setzen wir nun schließlich:

$$\varphi(z) := \min\{f_{x_1}(z), \ldots, f_{x_m}(z)\}$$

  so ist $\varphi \in V$ und erfüllt die Eigenschaften

$$\varphi(z) > f(z) - \varepsilon \quad \wedge \quad \varphi(z) < f(z) + \varepsilon \quad \forall\, z \in M$$

  also

$$\|\varphi - f\| < \varepsilon \quad \square$$

Hilfssatz

Die Polynome

$$P_n(t) := P_{n-1}(t) + \frac{1}{2}\left(t^2 - P_{n-1}^2(t)\right) \quad , \quad P_0(t) = 0$$

konvergieren auf dem Intervall $[-1, 1]$ gleichmäßig gegen die Funktion $f(t) = |t|$.

Beweis:

- Zur Rekursionsformel ist äquivalent:

$$1 - P_n(t) = \frac{1}{2}\left(1 - t^2\right) + \frac{1}{2}\left(1 - P_{n-1}(t)\right)^2 \geq 0 \quad \text{also} \quad P_n(t) \leq 1$$

  Wegen

$$P_{n+1}(t) - P_n(t) = P_n(t) - P_{n-1}(t) - \frac{1}{2}P_n^2(t) + \frac{1}{2}P_{n-1}^2(t)$$

$$= \left[P_n(t) - P_{n-1}(t)\right] \cdot \underbrace{\left[1 - \frac{1}{2}\left(P_n(t) + P_{n-1}(t)\right)\right]}_{\geq 0 \text{ da } P_n(t) \leq 1}$$

  ist $P_{n+1}(t) > P_n(t)$ genau dann wenn $P_n(t) > P_{n-1}(t)$ ist. Mit dem Induktionsanfang

$$P_0(x)\ ,\ P_1(x) = \frac{1}{2}t^2 > P_0(x)$$

  folgt somit die Monotonie der Folge: $P_{n+1}(t) \geq P_n(t)\ \forall\ t \in [-1, 1]$. Da sie außerdem nach oben beschränkt ist, ist sie konvergent für alle t. Setzen also:

$$f(t) := \lim_{n\to\infty} P_n(t)$$

- Berechnen jetzt $f(t)$: Wegen

$$\lim_{n\to\infty} P_n(t) = \lim_{n\to\infty} P_{n-1}(t) + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(t^2 - P_{n-1}^2(t)\right)$$

  ist

$$f(t) = f(t) + \frac{1}{2}\left(t^2 - f^2(t)\right) \ \rightarrow\ f^2(t) = t^2 \ \rightarrow\ f(t) = \pm\,|t|$$

  Doch wegen $0 \leq P_1(t) \leq \cdots \leq P_n(t)$ muss

$$\lim_{n\to\infty} P_n(t) \geq 0$$

  sein, also $f(t) = |t|$.

- Haben also gezeigt: (P_n) konvergiert punktweise und monoton gegen $|t|$. Nach dem Satz von Dini konvergiert (P_n) auch gleichmäßig gegen $|t|$, das heißt $f = |\cdot|$. $\square$

Bemerkung: Wir haben gezeigt, dass sich $f(t) = |t|$ auf $[-1, 1]$ gleichmäßig durch Polynome approximieren lässt. Doch dies gilt somit auch für jedes beliebige kompakte Intervall $[a, b]$, da Streckungen und Translationen die Eigenschaft erhalten.

2.2.10 Definition: Linearer Ring

Ein *linearer Ring* $L \subset \mathcal{C}(M)$ ist eine Teilmenge $L \subset \mathcal{C}(M)$ mit den Eigenschaften:

- L ist ein linearer Teilraum: Für $f, g \in L$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist auch $\alpha f + \beta g \in L$.
- Für $f, g \in L$ ist auch $f \cdot g \in L$.

Beispiel: Polynome bilden einen linearen Ring in $\mathcal{C}([a, b])$.

2.2.11 Approximationssatz von Stone-Weierstraß

Sei M ein kompakter metrischer Raum. Jeder lineare Ring $L \subset \mathcal{C}(M)$, der die Punkte von M trennt und die Funktion 1 enthält, ist dicht in $\mathcal{C}(M)$.

Beweis: Zeigen dass die abgeschlossene Hülle $\overline{L}$ von L ein Verband ist, das heißt aus $f \in \overline{L}$ folgt $|f| \in \overline{L}$. Dann gilt nach dem Satz von Stone, $\mathcal{C}(M) = \overline{(\overline{L})} = \overline{L}$, das heißt L ist dicht in $\mathcal{C}(M)$.

- Sei $f \in L$, $a := \|f\|$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Wählen ein Polynom $P(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$ mit $||t| - P(t)| < \varepsilon$ für $-a \leq t \leq a$. Solch ein Polynom existiert nach vorigem Hilfssatz. Dann gilt

  $$||f(x)| - P(f(x))| < \varepsilon \quad \forall\, x \in M$$

  Doch wegen

  $$P \circ f = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k \in L$$

  haben wir ein $P \circ f \in L$ gefunden, mit

  $$\||f| - P \circ f\| < \varepsilon$$

  also ist $|f| \in \overline{L}$.

- Sei nun $f \in \overline{L}$. Wählen $f_n \in L$ mit

  $$\|f_n - f\| \to 0 \quad \overset{\text{2. Dreiecksungleichung}}{\Longrightarrow} \quad \||f_n| - |f|\| \to 0$$

  Doch wegen $|f_n| \in \overline{L}$ ist

  $$|f| \in \overline{(\overline{L})} = \overline{L}$$

  also ist $\overline{L}$ ein linearer Verband. $\square$

Anwendungen

- Mit L als den Raum aller Polynome auf $[a, b]$, folgt der klassische Satz von Weierstraß.
- Mit $M := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2$ und L als den Raum aller Funktionen der Gestalt

  $$f(x, y) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) g_k(y)$$

  ist L dicht in $\mathcal{C}(M)$.
- Sei $M := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\right\}$ und L der linearen Raum aller trigonometrischen Polynome

  $$f(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi)$$

  Dann ist L ein Ring: $f \cdot g$ hat wieder diese Gestalt, denn

  $$\begin{aligned} 2\cos k\varphi \cos l\varphi &= \cos(k+l)\varphi + \cos(k-l)\varphi \\ 2\sin k\varphi \sin l\varphi &= \cos(k-l)\varphi - \cos(k+l)\varphi \\ 2\sin k\varphi \cos l\varphi &= \sin(k+l)\varphi + \sin(k-l)\varphi \end{aligned}$$

  Somit ist der linearer Raum aller trigonometrischen Polynome dicht in $\mathcal{C}(M)$ (vgl. Fourierreihen).

2.3 Der Bairesche Kategoriensatz

2.3.1 Definition: Magere und fette Menge

Sei $(E, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum (insbesondere z.B. ein metrischer Raum).

- Eine Teilmenge $M \subset E$ heißt von *1. Baire-Kategorie* (oder *mager*), falls es eine Folge $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von nirgends dichten Teilmengen mit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n = M$ gibt.
- Ist eine Teilmenge $M \subset E$ nicht mager, so heißt sie von *2. Baire-Kategorie*, oder *fett*.

2.3.2 Theorem von Baire

Wenn ein nicht-leerer, vollständiger, metrischer Raum E, Vereinigung abzählbar vieler abgeschlossener Mengen ist, muss mindestens eine dieser abgeschlossener Mengen eine Kugel enthalten.
Alternative Formulierung: Jeder nicht-leere, vollständige, metrische Raum ist fett.

Beweis: Sei $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$, M_k abgeschlossen und E vollständig. Zu zeigen wäre: Es gibt $k \in \mathbb{N}$, $x \in E$, $\varepsilon > 0$, so dass $B^o_\varepsilon(x) \subset M_k$ ist.
Indirekt: Annahme:

$$\forall\, k \in \mathbb{N}\ \forall\, x \in E\ \forall\, \varepsilon > 0 : B^o_\varepsilon(x) \not\subseteq M_k$$

das heißt alle Mengen der Gestalt $\underbrace{B^o_\varepsilon(x) \cap M^c_k}_{\text{offen}}$ sind nicht leer. Wählen ein $x_1 \in M^c_1$ und $\varepsilon_1 > 0$ so dass $B_{\varepsilon_1}(x_1) \subset M^c_1$ ist. Wählen ein $x_2 \in B^o_{\varepsilon_1}(x_1) \cap M^c_2$ und $\varepsilon_2 > 0$, so dass $B_{\varepsilon_2}(x_2) \subset B^o_{\varepsilon_1}(x_1) \cap M^c_2$ und $\varepsilon_2 < \frac{1}{2}\varepsilon_1$ ist. Analog, wählen ein $x_3 \in B^o_{\varepsilon_2}(x_2) \cap M^c_3$ und $\varepsilon_3 > 0$, so dass $B_{\varepsilon_3}(x_3) \subset B^o_{\varepsilon_2}(x_2) \cap M^c_3$ und $\varepsilon_3 < \frac{1}{2}\varepsilon_2$ ist. Setzen analog fort, und erhalten so eine Folge $(x_n) \subset E$.
Für $m > n$ gilt:

$$x_m \in B_{\varepsilon_n}(x_n) \subset M^c_n \quad \text{also} \quad d(x_m, x_n) \le \varepsilon_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

das heißt (x_n) ist Cauchyfolge. Da E vollständig ist, konvergiert diese $x_n \to x \in E$. Außerdem ist $x_m \in B_{\varepsilon_n}(x_n)$ für $m > n$ und somit $x \in B_{\varepsilon_n}(x_n) \subset M^c_n\ \forall\, n$. Also ist:

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} M^c_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \right)^c = \emptyset$$

was ein Widerspruch ist! $\square$

3 Maßtheorie

3.1 Maße

Typisches Beispiel: Volumen eines Körpers oder Inhalt einer Fläche.

3.1.1 Definition: σ-Algebra

Ein Teilsystem $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ von Teilmengen einer Grundmenge Ω, ist eine σ-*Algebra*, wenn gilt:

- $\Omega \in \mathscr{A}$
- Für $A \in \mathscr{A}$ ist auch $A^c \in \mathscr{A}$
- Für $A_n \in \mathscr{A},\ n \in \mathbb{N}$ so ist auch:
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$$

Bemerkung: Der Durchschnitt von σ-Algebren auf Ω ist wieder eine σ-Algebra.

3.1.2 Definition: Erzeugte Algebra

Zu $\mathcal{B} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ ist $\sigma(\mathcal{B})$ die kleinste σ-Algebra die $\mathcal{B}$ umfasst, das heißt:

- $\mathcal{B} \subset \sigma(\mathcal{B})$
- $\sigma(\mathcal{B})$ ist eine σ-Algebra
- Für jede Algebra $\mathscr{A}$ mit $\mathcal{B} \subset \mathscr{A}$ ist auch $\sigma(\mathcal{B}) \subset \mathscr{A}$.

Man nennt $\sigma(\mathcal{B})$ die von $\mathcal{B}$ *erzeugte* σ-Algebra.
Bemerkung: $\sigma(\mathcal{B})$ existiert und ist eindeutig bestimmt.

Beispiel: Für das System $\mathcal{J}$ aller Intervalle auf $\Omega = \mathbb{R}$ besteht $\sigma(\mathcal{J}) =: \mathscr{B}(\mathbb{R})$ aus allen Borel-Mengen auf $\mathbb{R}$. Auch für das System $\mathcal{G}$ aller offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ gilt:
$$\sigma(\mathcal{G}) = \sigma(\mathcal{J})$$
Aber auch für das System $\mathcal{F}$ aller abgeschlossener Teilmengen von $\mathbb{R}$ gilt:
$$\sigma(\mathcal{F}) = \sigma(\mathcal{J})$$

3.1.3 Definition: Maß

Ein Maß μ auf einer σ-Algebra $\mathscr{A}$ ist eine Abbildung
$$\mu : \mathscr{A} \to [0, \infty] := [0, \infty) \cup \{\infty\}$$
mit $\mu(\emptyset) = 0$ und für paarweise disjunkte $A_n \in \mathscr{A},\ n \in \mathbb{N}$:
$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Grundproblem der Maßtheorie: Die Fortsetzung von *Maßen* auf *kleinen* Mengensystemen (z.B. Intervallen) auf größere Mengensysteme (z.B. Borel-Mengen).

3.1.4 Definition: Algebra

Ein Teilsystem $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ ist eine *Algebra* wenn:

- $\Omega \in \mathscr{A}$
- $A \in \mathscr{A} \;\Rightarrow\; A^c = \Omega \setminus A \in \mathscr{A}$
- Für paarweise $A_1, .., A_N,\ N \in \mathbb{N}$ ist auch $\bigcup\limits_{n=1}^{N} A_n \in \mathscr{A}$

3.1.5 Fortsetzungssatz von Caratheodory

Es sei $\mathscr{A}$ eine Algebra und $\mu : \mathscr{A} \to [0, \infty]$ ein *Prämaß* auf $\mathscr{A}$, also eine Abbildung mit

- $\mu(\emptyset) = 0$
- $\mu\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ für paarweise disjunkte $A_n \in \mathscr{A}$ mit $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$.

Dann lässt sich μ auf $\sigma(\mathscr{A})$ fortsetzen. Ist μ ferner σ-endlich, so ist die Fortsetzung eindeutig bestimmt.

Beispiele:

a) Für $\Omega = \mathbb{R}$ sei $\mathscr{A}$ das System aller endlichen Vereinigungen von (disjunkten) Intervallen auf $\mathbb{R}$ und μ ergebe die Länge des Intervalls bzw. die Summe der Längen der einzelnen Bestandteile. Die Fortsetzung auf die σ-Algebra aller Borel-Mengen auf $\mathbb{R}$ ist das Lebesque Maß zu $\Omega = \mathbb{R}$.

b) Für $\Omega = \mathbb{R}^2$ sei $\mathscr{A}$ das System aller endlichen Vereinigungen von Rechtecken und μ ergebe das Produkt *Länge*$\times$*Breite* der Rechtecke bzw. der einzelnen Bestandteile. Die Fortsetzung auf $\sigma(\mathscr{A})$ ist das so-genannte Lebesque Maß zu $\Omega = \mathbb{R}^2$.

3.2 Integrale

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine Borelmenge.

3.2.1 Definition: Messbare Funktion

Eine reellwertige Funktion f auf Ω ist *messbar*, wenn für jedes $c \in \mathbb{R}$ die Menge

$$f^{-1}((-\infty, c)) = \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) < c\}$$

eine Borelmenge ist.

Bemerkungen:

- Stetige Funktionen sind messbar.
- Summe, Differenz, Produkt und Quotient messbarer Funktionen sind wieder messbar.
- Die Grenzfunktion einer punktweise konvergenten Funktionenfolge messbarer Funktionen ist wieder messbar.
- Punktweises Supremum und Infimum messbarer Funktionen ist wieder messbar.

3.2.2 Definition: Integral einer Treppenfunktion

Eine *Treppenfunktion* sei eine Funktion der Gestallt

$$f := \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot 1_{A_i}$$

wobei A_i paarweise disjunkte Borelmengen und $a_i \in \mathbb{R}$ sind. Dabei ist 1_{A_i} die *charakteristische Funktion* von A_i, mit

$$1_{A_i}(x) = \begin{cases} 1 & : x \in A_i \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

Das *Integral* einer Treppenfunktion f sei definiert als:

$$\int f(\omega)\mu(d\omega) := \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i)$$

3.2.3 Definition: Integral nicht-negativer messbarer Funktionen

Für eine nicht-negative messbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}_+$ definiert man

$$\int f(\omega)\mu(d\omega) := \sup_n \int f_n(\omega)\mu(d\omega)$$

wobei (f_n) eine monoton wachsende, punktweise gegen f konvergente Folge von Treppenfunktionen ist. Dieser Wert ist unabhängig von der speziellen Folge (f_n).

3.2.4 Definition: Integral messbarer Funktionen

Sei f eine messbare Funktion. Man zerlege f in eine Differenz zweier nicht negativer Funktionen $f = f^+ - f^-$, gemäß

$$f^+(\omega) := \begin{cases} f(\omega) & : f(\omega) \geq 0 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} \quad , \quad f^-(\omega) := \begin{cases} 0 & : f(\omega) \geq 0 \\ -f(\omega) & : \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist:

$$\int f(\omega)\mu(d\omega) := \int f^+(\omega)\mu(d\omega) - \int f^-(\omega)\mu(d\omega)$$

3.2.5 Eigenschaften des Integrals

Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und messbare Funktionen f, g gilt:

- $\int (\alpha f(\omega) + \beta g(\omega))\, \mu(d\omega) = \alpha \int f(\omega)\mu(d\omega) + \beta \int g(\omega)\mu(d\omega)$
- Dreiecksungleichung: $\left| \int f(\omega)\mu(d\omega) \right| \leq \int |f(\omega)|\, \mu(d\omega)$
- Ist ferner $f \leq g$ so folgt

$$\int f(\omega)\mu(d\omega) \leq \int g(\omega)\mu(d\omega)$$

3.2.6 Satz der monotonen Konvergenz (Levi)

Für eine nicht-negative, monoton wachsende, punktweise gegen f konvergierende Funktionenfolge f_n

$$0 \leq f_1(\omega) \leq f_2(\omega) \leq \cdots \to f(\omega)$$

gilt:

$$\int f_n(\omega)\mu(d\omega) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int f(\omega)\mu(d\omega)$$

3.2.7 Lemma von Fatou

Für eine nicht-negative Folge messbarer Funktionen f_n gilt:

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n(\omega)\ \mu(d\omega) \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n(\omega)\ \mu(d\omega)$$

3.2.8 Satz der majorisierten Konvergenz (Lebesque)

Für eine punktweise gegen f konvergierende Funktionenfolge $f_n(\omega) \to f(\omega)\ \forall\ \omega$ mit $|f_n(\omega)| \leq g(\omega)$, wobei g integrierbar sei, gilt:

$$\int f_n(\omega)\ \mu(d\omega) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int f(\omega)\ \mu(d\omega)$$

3.2.9 Transformationsgesetz

Seien Ω und E Mengen mit σ-Algebren $\mathscr{A}$ bzw. $\mathscr{B}$. Sei g eine $\mathscr{A}-\mathscr{B}$ messbare Abbildung von Ω nach E (das heißt $\forall\ B \in \mathscr{B}$ ist $g^{-1}(B) \in \mathscr{A}$). Dann erzeugt jedes Maß μ auf $[\Omega, \mathscr{A}]$ ein *Bildmaß* μ_g auf $[E, \mathscr{B}]$, definiert als:

$$\mu_g(B) := \mu\left(g^{-1}(B)\right) = \mu\left(\{\omega \in \Omega \mid g(\omega) \in B\}\right)$$

Dabei gilt das Transformationsgesetz:

$$\int\limits_E f(x)\mu_g(dx) = \int\limits_\Omega f(g(\omega))\mu(d\omega)$$

4 Banach-Räume

4.1 Normen

Sei E ein linearer $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$) Raum.

4.1.1 Definition: Norm

Eine *Norm* auf E ist eine Abbildung

$$E \xrightarrow{\|\cdot\|} \mathbb{R}_+ := [0, \infty)$$

mit:

- $\|x\| = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ für $\lambda \in \mathbb{K}$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Die Norm erzeugt in E eine Metrik: $d(x, y) := \|x - y\|$.

4.1.2 Definition: Banach-Raum

Ein *Banach-Raum* ist ein vollständiger, normierter Raum.

4.1.3 Satz über die Vollständigkeit von normierten Räumen

Ein normierter Raum E ist genau dann Vollständig, wenn jede absolut konvergente Reihe in E dort konvergiert.

Beweis:

- Sei E vollständig, und $(x_n) \subset E$ erzeuge eine absolut konvergente Reihe, das heißt

  $$z_n := \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|$$

  ist konvergent. Dann gilt für beliebiges $\varepsilon > 0$:

  $$\left\| \sum_{k=1}^{m} x_k - \sum_{k=1}^{n} x_k \right\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{m} x_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|x_k\| = \left| \sum_{k=1}^{m} \|x_k\| - \sum_{k=1}^{n} \|x_k\| \right| < \varepsilon$$

  für $m > n > N$. Solch ein N existiert immer, da (y_n) Cauchy-Folge ist. Somit ist auch $\sum_{k=1}^{n} x_k$ Cauchy-Folge und deshalb konvergent in E, da E vollständig ist. Schreibweise:

  $$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$$

- Sei (x_n) eine Cauchy-Folge in E, und jede absolut konvergente Reihe in E konvergiere dort. Zeigen: (x_n) konvergiert in E.

  (i) Konstruktion einer konvergenten Teilfolge. Wählen n_1 so dass $\|x_n - x_m\| < \frac{1}{2^1}$ für $n, m > n_1$ ist. Wählen $n_2 > n_1$ so dass $\|x_n - x_m\| < \frac{1}{2^2}$ für $n, m > n_2$ ist. Setzen dies fort: Wählen $n_k > n_{k-1}$ so dass $\|x_n - x_m\| < \frac{1}{2^k}$ für $n, m > n_k$ ist. Bekommen so eine Teilfolge (x_{n_k}) für die gilt:

  $$\|\underbrace{x_{n_k} - x_{n_{k+1}}}_{y_k}\| < \frac{1}{2^k}$$

und somit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|y_k\| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$$

das heißt $\sum\limits_{k=1}^{n} y_k$ ist absolut konvergent. Somit ist $\sum\limits^{n} y_k \to y$ auch konvergent. Also:

$$\sum_{k=1}^{r-1} y_k = x_{n_1} - x_{n_r} \;\Rightarrow\; x_{n_r} = x_{n_1} - \sum_{k=1}^{r-1} y_k \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} x_{n_1} - y =: x$$

(ii) Es gilt somit auch $x_n \to x$, denn: Für $\varepsilon > 0$ wählen $N \in \mathbb{N}$ so dass:

$$\|x_{n_r} - x\| < \frac{\varepsilon}{2} \;\; \forall\, n_r > N \quad \wedge \quad \|x_n - x_m\| < \frac{\varepsilon}{2} \;\; \forall\, n, m > N$$

gilt. Dann ist

$$\|x_n - x\| \leq \|x_n - x_{n_r}\| + \|x_{n_r} - x\| < \varepsilon \quad \square$$

4.1.4 Definition: Äquivalenz von Normen

Zwei Normen $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ auf E sind *äquivalent*, wenn sie die gleichen offenen Mengen erzeugen. Das heißt eine Menge $U \subset E$ ist in $\|\cdot\|_1$ genau dann offen, wenn sie in $\|\cdot\|_2$ offen ist.
Bemerkung: Äquivalenz von Normen ist eine Äquivalenzrelation.

4.1.5 Satz über äquivalente Normen

Zwei Normen $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ sind genau dann äquivalent, wenn Zahlen $c_1, c_2 > 0$ existieren, so dass gilt:

$$\|x\|_1 \leq c_1 \|x\|_2 \;,\; \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1 \quad \forall\, x \in E$$

Beweis:

- Richtung "$\Leftarrow$". Ist $\|x\|_1 \leq c_1 \|x\|_2 \quad \forall\, x \in E$, so gilt für $\varepsilon > 0$:

  $${}_2B^o_\varepsilon(y) \subset {}_1B^o_{c_1\varepsilon}(y)$$

  wobei ${}_iB^o_\varepsilon(y)$ jeweils die offene ε-Kugel um y bzgl. der durch die i-te Norm erzeugten Metrik ist. Also ist jede $\|\cdot\|_1$ offene Menge auch $\|\cdot\|_2$ offen. Analog zeigt man: Jede $\|\cdot\|_2$ offene Menge ist auch $\|\cdot\|_1$ offen. Die Normen sind also äquivalent.

- Richtung "$\Rightarrow$". Seien $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ äquivalent, das heißt jede $\|\cdot\|_1$ offene Menge sei auch $\|\cdot\|_2$ offen und umgekehrt. Insbesondere ist dann ${}_1B^o_1(0)$ $\|\cdot\|_2$ offen, das heißt für genügend kleines $\varepsilon > 0$ ist

  $${}_2B^o_\varepsilon(0) \subset {}_1B^o_1(0)$$

  das heißt

  $$\|y\|_2 < \varepsilon \;\Rightarrow\; \|y\|_1 < 1 \;\forall\, y \in E$$

  Für beliebiges $0 \neq x \in E$ sei jetzt $y := \dfrac{\varepsilon}{2\|x\|_2} x$. Dann folgt:

  $$\|y\|_2 = \frac{\varepsilon}{2\|x\|_2}\|x\|_2 = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \;\Rightarrow\; \|y\|_1 = \frac{\varepsilon}{2\|x\|_2}\|x\|_1 < 1 \;\Rightarrow\; \|x\|_1 < \underbrace{\frac{2}{\varepsilon}}_{c_1} \cdot \|x\|_2 \;\; \forall\, x \in E$$

  Analog zeigt man auch die umgekehrte Beziehung. $\square$

4.1.6 Satz über Normen im $\mathbb{R}^n$

In $\mathbb{R}^n$ sind alle Normen äquivalent.

Beweis:

- Sei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^n$ und für $\xi = \xi^i e_i$ sei
$$\|\xi\|_1 := \sum_{i=1}^n |\xi^i|$$
die zu vergleichende Norm. Dann folgt
$$\|\xi\| = \|\xi^i e_i\| \le \sum_{i=1}^n |\xi^i| \cdot \|e_i\| \le \overbrace{\max \|e_i\|}^{c} \cdot \sum_{i=1}^n |\xi_i| = c \cdot \|\xi\|_1$$
- Zu zeigen wäre noch: $\|\xi\|_1 \le d \cdot \|\xi\|$. Betrachten dazu $f(x) := \|x\|$. f ist $\|\cdot\|_1$ stetig, da
$$|f(x) - f(x_0)| = |\|x\| - \|x_0\|| \le \|x - x_0\| \le c\,\|x - x_0\|_1$$
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ definiert durch
$$M := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_1 = 1\}$$
M ist kompakt, da abgeschlossen und beschränkt. Somit nimmt f auf M ihr Infimum an. Also $\exists\ x_0 \in M$ mit
$$f(x) \ge \underbrace{f(x_0)}_{=:c' = \|x_0\| > 0} \qquad \forall\ x \in M$$
Bemerke: $\|x_0\|_1 = 1$. Haben also gezeigt: Für $\|x\|_1 = 1$ ist $\|x\| \ge c'$.
- Sei jetzt $x \ne 0$ beliebig. Dann ist
$$\left\| \frac{x}{\|x\|_1} \right\|_1 = 1 \ \to\ \left\| \frac{x}{\|x\|_1} \right\| \ge c' \ \to\ \|x\|_1 \le \frac{1}{c'}\,\|x\|$$
- Jede Norm $\|\cdot\|$ ist also äquivalent zu $\|\cdot\|_1$. Da Norm-Äquivalenz eine Äquivalenzrelation unter Normen ist, ist auch jede andere Norm äquivalent zu $\|\cdot\|$.

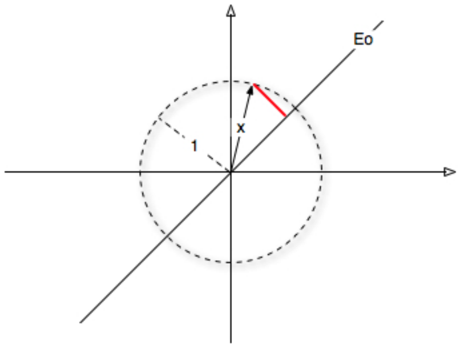
Folgerung: Die Einheitskugel $\{x \in E \mid \|x\| \le 1\}$ eines endlich dimensionalen, normierten Raumes ist Präkompakt.
Beweis: O.B.d.A ist $[E, \|\cdot\|] \cong [\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty]$. In diesem Spezialfall ist die Aussage trivial.

4.1.7 Lemma über die Existenz von *fast-senkrechten*

Sei E_0 ein abgeschlossener echter Unterraum des normierten Raumes E: $E_0 \subsetneq E$. Dann gibt es zu jeder Zahl $\varepsilon \in (0,1)$ ein Element $x \in E$ mit $\|x\| = 1$ und $\inf\limits_{y \in E_0} \|x - y\| > 1 - \varepsilon$.

Beweis: Sei $\varepsilon \in (0,1)$. Wählen $x_0 \in E \setminus E_0$. Dann gilt:
$$\underbrace{\inf_{y \in E_0} \|x_0 - y\|}_{\rho} > 0$$
denn sonst liese sich x_0 durch Elemente aus E_0 approximieren, was ein Widerspruch zu $x \notin E_0$ und der Abgeschlossenheit von E_0 sein würde. Wählen $y_0 \in E_0$ mit $\|x_0 - y_0\| < \dfrac{\rho}{1-\varepsilon}$. Solch ein y existiert immer, da ρ ein Infimum ist, und $\dfrac{\rho}{1-\varepsilon} > \rho$. Setzen nun
$$x := \frac{x_0 - y_0}{\|x_0 - y_0\|}\ ,\ \|x\| = 1$$
so dass für $y \in E_0$ gilt:
$$\|x - y\| = \left\| \frac{x_0 - y_0}{\|x_0 - y_0\|} - y \right\| = \underbrace{\frac{1}{\|x_0 - y_0\|}}_{> \frac{1-\varepsilon}{\rho}} \cdot \underbrace{\|x_0 - \overbrace{(y_0 + \|x_0 - y_0\|\, y)}^{\in E_0}\|}_{\ge \rho} > 1 - \varepsilon \quad \square$$

Veranschaulichendes Beispiel: $E = \mathbb{R}^2$ mit der Euklidischen Norm.



Folgerung: Die Einheitskugel eines unendlich dimensionalen, normierten Raumes E, ist nicht präkompakt.

Beweis: Wählen abgeschlossene Unterräume $\{0\} \subsetneq F_1 \subsetneq F_2 \subsetneq F_3 \subsetneq \cdots \subset E$. Dies geht immer, da E unendlich dimensional ist, und jeder endlich dimensionale Unterraum automatisch auch abgeschlossen ist. Wählen:

$$x_1 \in F_1 : \|x_1\| = 1$$

$$x_2 \in F_2 \setminus F_1 : \|x_2\| = 1 \ , \ \inf_{y \in F_1} \|x_2 - y\| > \frac{1}{2}$$

$$x_3 \in F_3 \setminus F_2 : \|x_3\| = 1 \ , \ \inf_{y \in F_2} \|x_3 - y\| > \frac{1}{2}$$

$$\ldots$$

und bekommen so die Folge (x_n) in der Einheitskugel $B_1(0)$ mit

$$\|x_n - x_m\| > \frac{1}{2} \quad \forall\, n \neq m$$

Somit brauch man z.B. für $\varepsilon = \frac{1}{4}$ unendlich viele Kugeln B_ε^o um schon alleine die Folge (x_n) zu überdecken. Demnach ist die Einheitskugel $B_1(0)$ <u>nicht</u> präkompakt. $\square$

4.2 Der Raum $L_p(M)$

4.2.1 Einführung

Sei $p \geq 1$. Sei M ein metrischer Raum, z.B. $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}$, $[a,b]$ oder $[a,\infty)$. $L_p(M)$ bestehe aus allen stetigen, reellwertigen Funktionen x auf M mit

$$\int\limits_M |x(t)|^p \; dt < \infty$$

Definieren:

$$\|x\|_p := \left(\int\limits_M |x(t)|^p \; dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

Es gilt: $\|\cdot\|_p$ ist eine Norm.

Beweis: Für $p = 1$ ist dies klar! Betrachten also $p > 1$. Dazu sei $q > 1$ so dass $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ ist.

- **Young-Ungleichung:** Für positive α, β, p, q mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt:

$$\alpha\beta \leq \frac{a^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}$$

denn:

$$\ln(\alpha\beta) = \ln\alpha + \ln\beta = \frac{1}{p}\ln\alpha^p + \frac{1}{q}\ln\beta^q \leq \ln\left(\frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}\right) \overset{\text{ln() monoton wachsend}}{\longrightarrow} \alpha\beta \leq \frac{a^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}$$

- **Hölder-Ungleichung:** Für p, q mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt:

$$\int\limits_M |x(t)y(t)| \;\; dt \leq \left(\int\limits_M |x(t)|^p \;\; dt\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int\limits_M |y(t)|^q \;\; dt\right)^{\frac{1}{q}} = \|x\|_p \cdot \|x\|_q$$

denn für $\alpha := \frac{|x(t)|}{\|x\|_p}$, $\beta := \frac{|y(t)|}{\|y\|_q}$ folgt aus der Young-Ungleichung:

$$\frac{|x(t)y(t)|}{\|x\|_p \|x\|_q} \leq \frac{|x(t)|^p}{p\|x\|_p^p} + \frac{|y(t)|^q}{q\|y\|_q^q} \;\Rightarrow\; \frac{1}{\|x\|_p \|y\|_q}\int\limits_M |x(t)y(t)| \;\; dt = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \;\Rightarrow\; \int\limits_M |x(t)y(t)| \;\; dt = \|x\|_p \cdot \|y\|_q$$

- **Minkowski Ungleichung:** Für $p \geq 1$ gilt:

$$\underbrace{\left(\int |x(t) + y(t)|^p \;\; dt\right)^{\frac{1}{p}}}_{\|x+y\|_p} \leq \underbrace{\left(\int |x(t)|^p \;\; dt\right)^{\frac{1}{p}}}_{\|x\|_p} + \underbrace{\left(\int |y(t)|^p \;\; dt\right)^{\frac{1}{p}}}_{\|y\|_p}$$

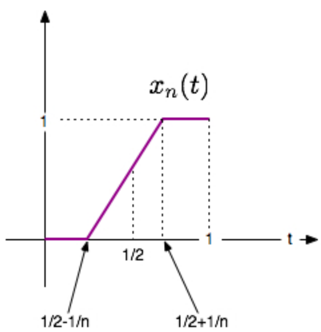
Beweis: Der Fall $p = 1$ ist klar. Sei also $p > 1$, dazu $q > 1$ so dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ist. Dann ist

$$\int |x+y|^p \;\; dt \leq \int |x|\,|x+y|^{p-1} \;\; dt + \int |y|\,|x+y|^{p-1} \;\; dt \overset{\text{Hölder}}{\leq} \|x\|_p \cdot \left\||x+y|^{p-1}\right\|_q + \|y\|_p \left\||x+y|^{p-1}\right\|_q$$

$$\overset{*}{=} \left(\|x\|_p + \|y\|_p\right) \|x+y\|_p^{\frac{p}{q}} \;\Rightarrow\; \|x+y\|_p = \|x+y\|_p^{p-\frac{p}{q}} \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

Somit erfüllt $\|\cdot\|_p$ die $\triangle$-Ungleichung. Trivialerweise ist sie auch positiv definit und es gilt $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \, \|f\|_p$ für $\lambda \in \mathbb{R}$. Somit ist sie eine Norm.

Warnung: $\left[\mathcal{C}[a,b], \|\cdot\|_p\right]$ ist zwar ein normierter Raum, aber <u>nicht</u> vollständig.
Gegenbeispiel: Sei $[a,b] = [0,1]$ und $(x_n) \subset \mathcal{C}[0,1]$ eine Funktionenfolge definiert gemäß folgender Illustration:



Dann ist diese Folge Cauchy bzgl. $\|\cdot\|_p$, denn

$$\|x_n - x_m\|_p \leq 2\left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{p}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Für die Grenzfunktion $x \in \mathcal{C}[0,1]$ müsste jedoch gelten

$$x(t) = \begin{cases} 0 & : t < \frac{1}{2} \\ \\ 1 & : t > \frac{1}{2} \end{cases}$$

was ein Widerspruch zur Stetigkeit ist! Das heißt (x_n) hat in $\mathcal{C}[0,1]$ keinen Grenzwert. Somit kann $\left[\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_p\right]$ nicht vollständig sein!

4.2.2 Definition: $L_p(M)$

Wir haben in der Einführung der Norm $\|\cdot\|_p$ gesehen, dass der dadurch entstehende normierte Raum $\left[\mathcal{C}(M), \|\cdot\|_p\right]$ im allgemeinen nicht vollständig ist. Dies lag unter anderem an der Forderung der Stetigkeit der betrachteten Funktionen, die sich als ungeeignet erwies. Würde man diese andernfalls weglassen, so würden gewisse Anforderungen an die Norm verletzt sein. Insbesondere gäbe es dann Funktionen $x \neq 0$, die sich von 0 nur auf Nullmengen unterscheiden und somit $\|x\|_p = 0$ ergäben. Dies ist jedoch eine Verletzung der positiv-Definitheit der Norm.

Fordern somit: Betrachtete Funktionen sollen messbar sein im Sinne des Maßes auf M und des Lebesque Integrals. Führen außerdem den Begriff der *äquivalenten* Funktionen ein: Zwei Funktionen f, g auf M seien genau dann äquivalent, wenn sie sich nur auf einer Nullmenge unterscheiden. Dies ist gleichbedeutend mit $\|f - g\|_p = 0$.

Dies gibt Anlass zum Begriff der Äquivalenzklassen von Funktionen: Jede Äquivalenzklasse X wird dann als einzelnes Element im $L_p(M)$ betrachtet. Jede Äquivalenzklasse X ist dann eine Restklasse bzgl. des Raumes $\mathcal{N}(M)$ aller *Nullfunktionen*, das heißt Funktionen deren Träger eine Nullmenge ist:

$$X = x + \mathcal{N} := \{x + y \mid y \in \mathcal{N}\} \quad \text{mit} \quad x \in X$$

Insbesondere spielt dann bei der Norm-Bildung von X der eigentliche *Vertreter* $x \in X$ keine Rolle.

4.2.3 Satz über die Vollständigkeit von $L_p(M)$

Der normierte Raum $\left[L_p(M), \|\cdot\|_p\right]$ ist vollständig.

Beweis: Sei (x_n) eine Folge aus $L_p(M)$ mit $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_p < \infty$.

- Gesucht ist ein $x \in L_p$ mit $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = x$. Es gilt:

$$\left(\int \left(\sum_{n=1}^{k} |x_n(t)|\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \overset{\text{Minkowski}}{\leq} \sum_{n=1}^{k} \left(\int |x_n(t)|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} = \sum_{n=1}^{k} \|x_n\|_p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_p < \infty$$

  Setzen

$$z_k(t) := \left(\sum_{n=1}^{k} |x_n(t)|\right)^p$$

  Dann ist die Folge $z_k(t)$ und demnach auch $\int z_k(t)\; dt$ monoton wachsend. Letztere ist außerdem nach obiger Rechnung beschränkt und somit konvergent. Nach dem Satz von Lewi gilt dann:

$$\int \lim_{k\to\infty} z_k(t)\; dt = \underbrace{\lim_{k\to\infty} \int z_k(t)\; dt}_{\substack{\text{existiert} \\ \text{da } \int z_k dt \\ \text{monoton wachsend}}} < \infty$$

also existiert fast überall der Grenzwert

$$\lim_{k\to\infty} z_k(t) =: z(t) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_n(t)|\right)^p$$

das heißt $y_k(t) := \sum_{n=1}^{k} x_n(t)$ ist fast überall konvergent: $y_k(t) \overset{\text{fast überall}}{\longrightarrow} x(t)$

- Noch zu zeigen: $\|y_k - x\|_p \to 0$, das heißt

$$\int |y_k(t) - x(t)|^p \, dt \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Wegen $y_k(t) \overset{\text{fast überall}}{\longrightarrow} x(t)$ ist auch $|x(t) - y_k(t)|^p \overset{\text{fast überall}}{\longrightarrow} 0$. Außerdem ist

$$|x(t) - y_k(t)|^p = \left|\sum_{n=k+1}^{\infty} x_n(t)\right|^p \leq \left(\sum_{n=k+1}^{\infty} |x_n(t)|\right)^p \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n(t)|\right)^p \overset{\text{integrabel}}{=} z(t)$$

das heißt $|x(t) - y_k(t)|^p$ ist beschränkt. Somit folgt nach dem Lebesque Grenzwertsatz:

$$\int |y_k(t) - x(t)|^p \, dt \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int 0 \; dt = 0 \quad \square$$

4.3 Lineare Funktionale

Sei E ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$).

4.3.1 Definition: Lineares Funktional

Ein *lineares Funktional* oder *Linearform* a auf E ist eine lineare Abbildung $a : E \to \mathbb{K}$:

$$x \overset{a}{\mapsto} \langle x, a\rangle$$

also:

$$\langle \lambda x + \mu y, a\rangle = \lambda \langle x, a\rangle + \mu \langle y, a\rangle \;\; \forall \; x, y \in E \; \forall \; \lambda, \mu \in \mathbb{K}$$

4.3.2 Definition: Stetigkeit

Ein lineares Funktional ist *stetig* :⇔ Für $x_n \to x$ gilt $\langle x_n, a\rangle \to \langle x, a\rangle$.
Bemerkungen:

- Wegen Linearität genügt es die Stetigkeit an der Stelle $x = 0$ nachzuweisen.
- Jedes lineare Funktional auf endlich dimensionalen, normierten Räumen ist stetig.

Typische Beispiele:

(i) $E = \mathcal{C}[a, b]$ ausgestattet mit $\|\cdot\|_\infty$:

$$\|x\|_\infty := \sup_{x\in[a,b]} |x(t)|$$

Jedes $\gamma \in \mathcal{C}[a, b]$ erzeugt ein lineares Funktional a durch:

$$\langle x, a\rangle := \int_a^b x(t)\gamma(t) \; dt$$

Dieses ist stets stetig.

(ii) $E = \mathcal{C}[a, b]$ ausgestattet mit $\|\cdot\|_\infty$. Jedes $t_0 \in [a, b]$ erzeugt ein lineares Funktional a durch

$$\langle x, a\rangle := x(t_0)$$

Doch dieses Funktional ist im allgemeinen nicht stetig!

4.3.3 Satz über die Stetigkeit und Beschränktheit von Linearformen

Ein lineares Funktional a ist genau dann stetig, wenn eine positive Zahl ρ existiert, mit

$$\langle x, a \rangle \leq \rho \, \|x\| \quad \forall \, x \in E$$

Man sagt: a ist *beschränkt*.

Beweis:
Richtung "$\Leftarrow$". Es genügt die Stetigkeit in $x = 0$ nachzuweisen. Doch die ist trivial.
Richtung "$\Rightarrow$". Indirekt: Annahme:

$$\forall \, n \in \mathbb{N} : \exists \, x_n \in E : |\langle x_n, a \rangle| > n \, \|x_n\|$$

Sei $y_n := \dfrac{x_n}{n \, \|x_n\|}$. Dann ist $\|y_n\| = \dfrac{1}{n}$ also $y_n \to 0$, jedoch

$$|\langle y_n, a \rangle| > 1 \;\Rightarrow\; \langle y_n, a \rangle \not\to 0$$

das heißt a ist nicht stetig. Dies ist ein Widerspruch.

4.3.4 Definition: Der Raum E'

Die Menge aller stetigen, linearen Funktionale auf E hat eine natürliche lineare Struktur, ist also ein linearer Raum. Diesen Raum bezeichnen wir mit E'.

4.3.5 Satz über stetige Linearformen

Es sei a eine stetige Linearform auf dem normierten Raum E. Dann gilt:

$$\inf \{\rho : |\langle x, a \rangle| \leq \rho \, \|x\| \;\; \forall \, x \in E\} = \sup \{|\langle x, a \rangle| : \|x\| \leq 1\}$$

und

$$|\langle x, a \rangle| \leq (\inf \{\rho : |\langle x, a \rangle| \leq \rho \, \|x\| \;\; \forall \, x \in E\}) \cdot \|x\|$$

Beweis:
Sei

$$M_1 := \{\rho : |\langle x, a \rangle| \leq \rho \, \|x\| \;\; \forall \, x \in E\} \quad , \quad M_2 := \{|\langle x, a \rangle| : \|x\| \leq 1\}$$

- Sei $\rho \in M_1$ und $\|x\| \leq 1$. Dann gilt $|\langle x, a \rangle| \leq \rho \cdot 1 = \rho$. Also: jedes $\rho \in M_1$ ist eine obere Schranke von M_2. Also

  $$\rho \geq \sup M_2 \quad \forall \rho \in M_1$$

  Also

  $$\inf M_1 \geq \sup M_2$$

- Sei σ ein obere Schranke von M_2 und es sei $0 \neq x \in E$. Dann gilt:

  $$|\langle x, a \rangle| = \left| \left\langle \|x\| \frac{x}{\|x\|}, a \right\rangle \right| = \|x\| \cdot \left| \left\langle \frac{x}{\|x\|}, a \right\rangle \right| \leq \sigma \, \|x\|$$

  das heißt $\sigma \in M_1$. Somit ist $\inf M_1 \leq \sigma$ für jede obere Schranke σ von M_2, insbesondere für $\sigma = \sup M_2$. Somit folgt zusammen mit dem vorigen Ergebnis:

  $$\inf M_1 = \sup M_2$$

- Seien $\rho_n \in M_1$ mit $\rho_n \to \inf M_1$. Dann gilt $|\langle x, a \rangle| \leq \rho_n \, \|x\| \quad \forall x \in E$. Somit ist auch

  $$|\langle x, a \rangle| \leq \left(\lim_{n \to \infty} \rho_n \right) \cdot \|x\| = (\inf M_1) \cdot \|x\| \quad \forall x \in E$$

4.3.6 Konstruktion des Banach-Raumes E'

Der normierte Raum E' wird durch den Ansatz

$$\|a\| := \inf\{\rho : |\langle x, a\rangle| \leq \rho\,\|x\| \ \ \forall\, x \in E\} = \sup\{|\langle x, a\rangle| : \|x\| \leq 1\}$$

zu einem Banach-Raum (dualer Raum von E). Dabei gilt:

$$|\langle x, a\rangle| \leq \|x\| \cdot \|a\|$$

Beweis:

- Dreiecksungleichung:

$$|\langle x, a+b\rangle| = |\langle x, a\rangle + \langle x, b\rangle| \leq |\langle x, a\rangle| + |\langle x, b\rangle| \leq (\|a\| + \|b\|) \cdot \|x\| \quad \forall x \in E$$

$$\Rightarrow \ \ \|a+b\| = \sup\{|\langle x, a+b\rangle| : \|x\| \leq 1\} \leq \sup\{(\|a\| + \|b\|) \cdot \|x\| : \|x\| \leq 1\} = \|a\| + \|b\|$$

- Positive Homogenität:

$$|\langle x, \lambda a\rangle| = |\lambda\,\langle x, a\rangle| = |\lambda| \cdot |\langle x, a\rangle| \leq |\lambda| \cdot \|x\| \cdot \|a\| = |\lambda| \cdot \|a\| \cdot \|x\| \quad \forall x \in E, \ \lambda \in \mathbb{K}$$

$$\Rightarrow \ \ \|\lambda a\| \leq |\lambda| \cdot \|a\|$$

  Im Fall $\lambda \neq 0$ gilt dann analog:

$$\|a\| = \left\| \frac{1}{\lambda}(\lambda a) \right\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \cdot \|\lambda a\| \ \ \Rightarrow \ \ \|\lambda a\| \geq |\lambda| \cdot \|a\|$$

  Somit ist für $\lambda \neq 0$: $\|\lambda a\| = |\lambda| \cdot \|a\|$. Für $\lambda = 0$ gilt dies sowieso, da $\|0\| = 0$ ist.

- Positiv Definitheit:

$$\|a\| = 0 \ \ \Leftrightarrow \ \ |\langle a, x\rangle| \leq 0\,\|x\| = 0 \ \forall x \in E \ \ \Leftrightarrow \ \ a = 0$$

- Vollständigkeit: Sei (a_n) eine Cauchyfolge, $x \in E$ fest und $\varepsilon > 0$. Dann ist

$$|\langle x - a_n\rangle - \langle x, a_m\rangle| = |\langle x, a_n - a_m\rangle| \leq \|x\| \cdot \|a_n - a_m\|$$

  das heißt $\langle x, a_n\rangle$ ist eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$. Da $\mathbb{R}$ vollständig ist, existiert der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \langle x, a_n\rangle =: \langle x, a\rangle$. Offenbar ist das hierdurch definierte a linear, und es gilt:

$$|\langle x, a\rangle - \langle x, a_m\rangle| = \lim_{n\to\infty} |\langle x, a_n\rangle - \langle x, a_m\rangle| \leq \varepsilon\,\|x\| \quad \forall x \in E \ , \ m > N_\varepsilon$$

  für geeignetes N_ε, also

$$|\langle x, a\rangle| \leq |\langle x, a\rangle - \langle x, a_m\rangle| + |\langle x, a_m\rangle| \leq (1 + \|a_m\|) \cdot \|x\| \quad \text{für} \ \ m > N_1 \ \rightarrow \ a \text{ stetig} \ \rightarrow \ a \in E'$$

  und

$$\|a - a_m\| \leq \varepsilon \ \ \text{für} \ \ m > N_\varepsilon$$

  Somit ist

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n$$

  und E' ist vollständig. $\square$

Bemerkungen

- Sei $a \in E'$. Wegen Linearität von a ist $\sup_{\|x\| \leq 1} |\langle x, a \rangle| = \sup_{\|x\|=1} |\langle x, a \rangle|$
- Folgende Begriffe sind äquivalent:
  - Stetiges lineares Funktional/Linearform
  - Beschränktes lineares Funktional/Linearform
- Für $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ ist l_p' Isomorph zu l_q. Dabei ist für $p > 1$

$$l_p := \left\{ (\xi_n) \subset \mathbb{R} \text{ Folge} : \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p \text{ konvergent} \right\}$$

ausgestattet mit der Norm

$$\|\xi\| := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

ein normierter Raum. Jede Folge $\eta \in l_q$ ordnet jeder Folge $\xi \in l_p$ eine Zahl zu:

$$\langle \xi, \eta \rangle := \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n \cdot \xi_n$$

und dies auf linearer Weise. Aufgrund der Hölderschen Ungleichung ist diese Zuordnung wohldefiniert, und η wird so zu einem linearen, beschränkten Funktional auf l_p. Es ergibt sich sogar: Jede beschränkte Linearform a auf l_p wird durch ein geeignetes (eindeutiges) $\eta \in l_q$ erzeugt. Somit ist diese Zuordnung ein Isomorphismus: $l_p' \cong l_q$.

- Analog ist auch $L_p' \cong L_q$

4.3.7 Das Hahn-Banach Theorem

Es sei E ein normierter Raum und $E_0 \subset E$ ein Unterraum. Ist a_0 eine stetige Linearform auf E_0, so existiert eine stetige Linearform a auf E mit:

(i) $\langle x, a \rangle = \langle x, a_0 \rangle \quad \forall\, x \in E_0$, das heißt $a\,|_{E_0} = a_0$

(ii) $\|a\| = \|a_0\|$

Bemerkungen:

- a ist dann eine *Fortsetzung* oder *Erweiterung* von a_0.
- a muss auf $E \setminus E_0$ definiert werden, so dass a stetig, linear und gleiche Norm wie a_0 hat.
- Die Forderung $\|a\| < \|a_0\|$ kann nicht erfüllt werden, da

$$\|a\| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} |\langle x, a \rangle| \geq \sup_{\substack{x \in E_0 \\ \|x\| \leq 1}} |\langle x, a \rangle| = \|a_0\|$$

- Ist E_0 dicht in E, so ist die Fortsetzung a eindeutig bestimmt (direktes Resultat der Stetigkeit).
- Allgemein ist jedoch a nicht eindeutig bestimmt.
- Beispiel: Betrachten wir den Raum $E = \mathbb{R}^2$ so ist jede Linearform a auf E anschaulich gegeben durch eine Ebene $\mathcal{E}_a$ im $\mathbb{R}^3$ die durch 0 geht. Ein 1-dimensionaler Unterraum E_0 wäre eine Gerade im $\mathbb{R}^2$ die durch 0 geht, so dass a_0 entsprechend eine Gerade $\mathcal{G}_{a_0}$ im $\mathbb{R}^3$ *über* E_0 ist. Eine Fortsetzung a von a_0 wäre dann genau eine Ebene die $\mathcal{G}_{a_0}$ enthält. Diese ist allgemein so nicht eindeutig, jedoch durch die Forderung $\|a\| = \|a_0\|$ eindeutig bestimmt.

4.3.8 Spezialfall des Hahn-Banach Theorems

Es sei E ein normierter reeller Raum, $E_0 \subset E$ ein Teilraum und $x_1 \in E \setminus E_0$. Dann lässt sich jede stetige Linearform a_0 auf E_0 normerhaltend auf

$$\mathscr{E} := \operatorname{span}\{E_0 \cup \{x_1\}\} = \{x + \lambda x_1 \mid x \in E_0,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

fortsetzen zu a_1.

Beweis:

I Wie sollte $\alpha := \langle x_1, a_1 \rangle$ gewählt werden? Wegen

$$\langle x + \lambda x_1, a_1 \rangle = \langle x, a_0 \rangle + \lambda\alpha\ ,\ \ x \in E_0, \lambda \in \mathbb{R}$$

und $\|a_1\| = \|a_0\|$ muss stets gelten

$$|\langle x + \lambda x_1, a_1 \rangle| = |\langle x, a_0 \rangle + \lambda\alpha| \leq \|a_0\| \cdot \|x + \lambda x_1\|$$

Speziell für $\lambda = 1$:

$$|\langle x, a_0 \rangle + \alpha| \leq \|a_0\| \cdot \|x + x_1\| \ \ \forall\ x \in E_0$$

also

$$-\|a_0\| \cdot \|x + x_1\| \leq \langle x, a_0 \rangle + \alpha \leq \|a_0\| \cdot \|x + x_1\| \ \ \forall\ x \in E_0$$

$$\Rightarrow\ -\langle x, a_0 \rangle - \|a_0\| \cdot \|x + x_1\| \leq \alpha \leq \|a_0\| \cdot \|x + x_1\| - \langle x, a_0 \rangle$$

Somit muss gelten:

$$\sup_{x \in E_0} \left(-\langle x, a_0 \rangle - \|a_0\| \cdot \|x + x_1\|\right) \leq \alpha \leq \inf_{x \in E_0} \left(\|a_0\| \cdot \|x + x_1\| - \langle x, a_0 \rangle\right)$$

II Frage: Ist ein solches α zu finden? Das heißt gilt

$$\sup_{x \in E_0} \left(-\langle x, a_0 \rangle - \|a_0\| \cdot \|x + x_1\|\right) \overset{?}{\leq} \inf_{x \in E_0} \left(\|a_0\| \cdot \|x + x_1\| - \langle x, a_0 \rangle\right)$$

Seien $x', x'' \in E_0$. Dann ist

$$\langle x', a_0 \rangle - \langle x'', a_0 \rangle = \langle x' - x'', a_0 \rangle \leq \|a_0\| \cdot \|x' - x''\| \overset{\substack{\triangle \\ \text{Ungleichung}}}{\leq} \|a_0\| \cdot \|x' + x_1\| + \|a_0\| \cdot \|x'' + x_1\|$$

$$\Rightarrow\ -\|a_0\| \cdot \|x'' + x_1\| - \langle x'', a_0 \rangle \leq \|a_0\| \cdot \|x' + x_1\| - \langle x', a_0 \rangle \quad \forall\ x', x'' \in E_0$$

$$\Rightarrow\ -\|a_0\| \cdot \|x'' + x_1\| - \langle x'', a_0 \rangle \leq \inf_{x' \in E_0} \left(\|a_0\| \cdot \|x' + x_1\| - \langle x', a_0 \rangle\right) \quad \forall\ x'' \in E_0$$

$$\Rightarrow\ \underbrace{\sup_{x'' \in E_0} \left(-\|a_0\| \cdot \|x'' + x_1\| - \langle x'', a_0 \rangle\right)}_{S} \leq \underbrace{\inf_{x' \in E_0} \left(\|a_0\| \cdot \|x' + x_1\| - \langle x', a_0 \rangle\right)}_{J}$$

III Definieren somit a_1 wie folgt: Wählen α zwischen S und J und setzen linear fort:

$$\langle x + \lambda x_1, a_1 \rangle := \langle x, a_0 \rangle + \lambda\alpha$$

IV Dieses a_1 erfüllt alle geforderten Eigenschaften:

- Linearität:

$$\langle \mu(x + \lambda x_1) + \mu'(x' + \lambda' x_1), a_1 \rangle = \langle \mu x + \mu' x', a_0 \rangle + (\mu\lambda + \mu'\lambda')\,\alpha = \mu\underbrace{\left(\langle x, a_0 \rangle + \lambda\alpha\right)}_{\langle x + \lambda x_1, a_0 \rangle} + \mu'\underbrace{\left(\langle x', a_0 \rangle + \lambda'\alpha\right)}_{\langle x' + \lambda' x_1, a_0 \rangle}$$

- Zu zeigen: $\|a_1\| = \|a_0\|$. Es wurde bereits gezeigt: $\|a_1\| \geq \|a_0\|$. Für die andere Richtung zeigen wir:
$$|\langle x + \lambda x_1, a_1 \rangle| \leq \|a_0\| \cdot \|x + \lambda x_1\| \quad \forall\, x \in E_0, \lambda \neq 0$$
Es genügt den Spezialfall $\lambda = 1$ zu betrachten, da dann allgemein gilt
$$|\langle x + \lambda x_1, a_1 \rangle| = |\lambda| \cdot \left| \left\langle \frac{x}{\lambda} + x_1, a_1 \right\rangle \right| \leq |\lambda|\, \|a_0\| \cdot \left\| \frac{x}{\lambda} + x_1 \right\| = \|a_0\| \cdot \|x + \lambda x_1\|$$
Doch der Fall $\lambda = 1$ ist automatisch erfüllt, da α so gewählt wurde dass
$$\underbrace{|\langle x, a_0 \rangle + \alpha|}_{=|\langle x + x_1, a_1 \rangle|} \leq \|a_0\| \cdot \|x + x_1\|$$
gilt.

Somit ist a_1 genau solch eine gesuchte Fortsetzung von a_0 auf $\mathscr{E}$. $\square$

4.3.9 Folgerungen aus dem Hahn-Banach-Theorem

Für einen normierten Raum E gilt:

(i) Zu $x \in E \setminus \{0\}$ und $c \in \mathbb{R}$ existiert ein $a \in E'$ mit $\langle x, a \rangle = c$ und $\|a\| = \dfrac{|c|}{\|x\|}$.

(ii) Für beliebige $x \in E,\ a \in E'$ ist $\|x\| = \sup\limits_{\|a\| \leq 1} |\langle x, a \rangle|$

Beweis:

(i) Definieren zunächst a_0 auf $\operatorname{span}\{x\}$ gemäß $\langle \lambda x, a_0 \rangle := \lambda c$. Dann ist
$$|\langle \lambda x, a_0 \rangle| = |\lambda c| = \frac{|c|}{\|x\|} \cdot \underbrace{|\lambda| \cdot \|x\|}_{\|\lambda x\|} \;\Rightarrow\; \|a_0\| \leq \frac{|c|}{\|x\|} \quad (*)$$
$$\left| \left\langle \frac{x}{\|x\|}, a_0 \right\rangle \right| = \frac{1}{\|x\|} |\langle x, a_0 \rangle| = \frac{c}{\|x\|} \;\Rightarrow\; \|a_0\| \geq \frac{|c|}{\|x\|} \quad (**)$$
$$(*) \wedge (**) \;\Rightarrow\; \|a_0\| = \frac{|c|}{\|x\|}$$
Setzen wir diese Linearform normerhaltend fort auf E' (vgl. Hahn-Banach Theorem: 4.3.7), so ist $\|a\| = \dfrac{|c|}{\|x\|}$ und $\langle x, a \rangle = c$. $\square$

(ii) Für $x = 0$ ist die Behauptung trivial. Für $x \neq 0$ ist
$$|\langle x, a \rangle| \leq \|a\| \cdot \|x\| \overset{\|a\| \leq 1}{\leq} \|x\| \;\rightarrow\; \sup_{\|a\| \leq 1} |\langle x, a \rangle| \leq \|x\|$$
Wegen voriger Folgerung existiert ein $a \in E'$ mit
$$\langle x, a \rangle = \|x\| \;\wedge\; \|a\| = \frac{\|x\|}{\|x\|} = 1$$
das heißt $\sup\limits_{\|a\| \leq 1} |\langle x, a \rangle| \geq \|x\|$. Somit folgt die Behauptung. $\square$

4.4 Schwache Konvergenz

4.4.1 Definition: Schwache Konvergenz

Eine Folge (x_n) *konvergiert schwach* gegen $x \in E$, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, a\rangle = \langle x, a\rangle \quad \forall\, a \in E'$$

Man schreibt $x_n \rightharpoonup x$ und nennt x den *Grenzwert* von x_n.

4.4.2 Eigenschaften der schwachen Konvergenz

(1) Der Grenzwert einer schwach konvergenten Folge (x_n) ist eindeutig bestimmt.
Beweis: Es sei $x_n \rightharpoonup x$ und $x_n \rightharpoonup y$, das heißt $\langle x, a\rangle = \langle y, a\rangle \;\forall\, a \in E'$ also $\langle x - y, a\rangle = 0 \;\forall\, a \in E'$. Wäre $x \neq y$ so gäbe es nach Satz 4.3.9 ein $a \in E'$ mit $\langle x - y, a\rangle = 1$ was ein Widerspruch ist.

(2) Für $x_n \rightharpoonup x$, $y_n \rightharpoonup y$ und Skalaren $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist $\lambda x_n + \mu y_n \rightharpoonup \lambda x + \mu y$.
Beweis: Klar!

(3) Jede konvergente Folge ist schwach konvergent.
Beweis: Folgt direkt aus Definition der Stetigkeit für $a \in E'$

(4) Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht!
Beispiel: Für

$$E = l_2,\; e_n := (0, .., 0, \underset{\substack{\uparrow\\ n}}{1}, 0, .., 0)$$

ist $\|e_n\| = 1 \;\forall\, n \in \mathbb{N}$ das heißt $e_n \not\to 0$. Doch es gilt: $e_n \rightharpoonup 0$, denn für $\xi \in l_2 \cong l_2'$ ist

$$\langle e_n, \xi\rangle = \xi_n \overset{\|\xi\|<\infty}{\longrightarrow} 0 = \langle 0, \xi\rangle$$

4.4.3 Definition: Schwach beschränkte Teilmenge

Eine Teilmenge $M \subset E$ heißt *schwach beschränkt*, wenn für alle $a \in E'$ ein $\rho_a \geq 0$ existiert mit

$$|\langle x, a\rangle| \leq \rho_a \quad \forall\, x \in M$$

das heißt das Bild $\langle M, a\rangle$ ist beschränkt.

4.4.4 Satz über schwach beschränkte und beschränkte Mengen

Eine Menge $M \subset E$ ist genau dann schwach beschränkt, wenn sie beschränkt ist.

Beweis: Die Richtung "$\Leftarrow$" ist klar, denn

$$(\|x\| < \rho \quad \forall\, x \in M) \;\Rightarrow\; |\langle x, a\rangle| \leq \|a\| \cdot \|x\| \leq \|a\| \cdot \rho =: \rho_a$$

Die Umkehrung ist eine Folgerung aus dem Prinzip der *gleichmäßigen Beschränktheit.*

4.4.5 Definition: Stetiges, positives, sublineares Funktional

Eine auf einem normierten Raum F definierte Funktion $f : F \to \mathbb{R}$ heißt *stetiges, positives, sublineares Funktional*, wenn gilt:

- $f(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in F$ (Positivität)
- Aus $x_n \to x$ folgt $f(x_n) \to f(x)$ (Stetigkeit)
- $f(x + y) \leq f(x) + f(y) \quad \forall\, x, y \in F$
- $f(\lambda x) = \lambda f(x) \quad \forall\, x \in E,\; \lambda \geq 0$

Beispiel: Die Norm $\|\cdot\|$ und $f(x) := |\langle x, a\rangle|$ mit $a \in F'$ sind beide stetige, positive, sublineare Funktionale.

4.4.6 Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit

Wenn für eine Familie $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ positiver, stetiger, sublinearer Funktionale f_α auf dem Banach-Raum F für jedes $y \in F$ die Menge $\mathcal{G}(y) := \{f_\alpha(y) \mid a \in A\}$ beschränkt ist, dann existiert eine positive Zahl ρ mit

$$f_\alpha(y) \le \rho \|y\| \quad \forall\, \alpha \in A,\ y \in F$$

Bemerkung: Zur Motivierung des Namens des Theorems betrachte äquivalente Formulierung: Es existiert eine positive Zahl ρ mit

$$f_\alpha(y) \le \rho \ \ \forall\, \alpha \in A,\ y \in B_1(0)$$

Beweis:

- Beginnen mit dem Standpunkt

  $$\forall\, y \in F : \exists\, \rho_y > 0 : \forall\, \alpha \in A : f_\alpha(y) \le \rho_y$$

  Sei $\varepsilon > 0$ und

  $$M_k^\alpha := \left\{ y \in F : f_\alpha(y) + f_\alpha(-y) \le \frac{k\varepsilon}{2} \right\} \ ,\ k = 1, 2, 3, ..$$

  und ferner

  $$M_k := \bigcap_{\alpha \in A} M_k^\alpha$$

  Dann gilt: M_k ist für jedes $k \in \mathbb{N}$ abgeschlossen, denn: Die Menge

  $$(M_k^\alpha)^c = \left\{ z \in F : f_\alpha(z) + f_\alpha(-z) > \frac{k\varepsilon}{2} \right\}$$

  ist offen, da Urbild der offenen Menge $\left(\frac{k\varepsilon}{2}, \infty\right)$ bzgl. der stetigen Funktion $g_\alpha(z) := f_\alpha(z) + f_\alpha(-z)$. Somit sind die M_k^α abgeschlossen, und somit auch deren Schnitt $\bigcap\limits_{\alpha \in A} M_k^\alpha$

- Ferner ist

  $$\bigcap_{k=1}^{\infty} M_k = F$$

  denn: Zu $y \in F$ existiert ein ρ_y so dass $f_\alpha \le \rho_y\ \forall\, \alpha \in A$ und analog auch ein ρ_{-y} so dass $f_\alpha(-y) \le \rho_{-y}\ \forall\, \alpha \in A$. Also

  $$\forall\, \alpha \in A : f_\alpha(y) + f_\alpha(-y) \le \rho_y + \rho_{-y} \le \frac{k_y \varepsilon}{2}$$

  für genügend großes $k_y \in \mathbb{N}$. Somit ist $y \in M_{k_y}^\alpha\ \forall\, \alpha \in A$ also $y \in M_{k_y}$.

- Nach dem Baireschen Kategoriensatz (vgl. 2.3.2) existiert somit ein $k_0 \in \mathbb{N}$ und eine offene Kugel $B_\delta^o(y_0),\ \delta > 0$ mit $B_\delta^o(y_0) \subset M_{k_0}$, das heißt

  $$\|y\| < \delta \ \Rightarrow\ y_0 + y \in B_\delta^o(y_0) \subset M_{k_0} \subset M_{k_0}^\alpha \ \ \forall\, \alpha \in A$$

  $$\Rightarrow\ f_\alpha(y_0 + y) \le f_\alpha(y_0 + y) + f_\alpha(-y_0 - y) \le \frac{k_0 \varepsilon}{2}$$

  $$\Rightarrow\ f_\alpha(y) = f_\alpha((y_0 + y) + (-y_0)) \le \underbrace{f_\alpha(y_0 + y)}_{\le \frac{k_0\varepsilon}{2}} + \underbrace{f_\alpha(-y_0)}_{\le f_\alpha(y_0) + f_\alpha(-y_0) \le \frac{k_0\varepsilon}{2}} \le \frac{k_0 \varepsilon}{2} < k_0 \varepsilon$$

- Somit folgt: Für $\|y\| < \delta$ ist $f_\alpha(y) \le k_0\varepsilon\ \ \forall\, \alpha \in A$. Für beliebiges $x \in F$ ist demnach:

  $$\left\| \frac{x\delta}{2\|x\|} \right\| = \frac{\delta}{2} < \delta \ \Rightarrow\ f_\alpha\left(\frac{\delta x}{2\|x\|}\right) \le k_0 \varepsilon$$

  also

  $$f_\alpha(x) \le \underbrace{\frac{2k_0\varepsilon}{\delta}}_{=:\rho} \|x\| \quad \forall\, \alpha \in A$$

□

4.4.7 Folgerung über schwach beschränkte Mengen

Jede schwach beschränkte Menge $M \subset E$ eines normierten Raumes ist beschränkt.

Beweis: Sei M schwach beschränkt, das heißt

$$\forall\ a \in E' : \exists\ \rho_\alpha : |\langle x, a\rangle| \leq \rho_\alpha \quad \forall\ x \in M$$

Bemerke: E' ist ein Banachraum. Darauf seien für $x \in M$ die positiven, stetigen, sublinearen Funktionale f_x definiert, gemäß

$$f_x(a) := |\langle x, a\rangle|$$

Das heißt für jedes $a \in E'$ ist

$$\{f_x(a) : x \in M\}$$

beschränkt. Nach dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit existiert somit ein $\rho > 0$ so dass

$$f_x(a) \leq \rho \cdot \|a\| \quad \forall\ x \in M, \forall\ a \in E'$$

also

$$|\langle x, a\rangle| = f_x(a) \leq \rho \quad \forall\ x \in M, a \in E' \quad \text{mit} \quad \|a\| \leq 1$$

und demnach

$$\|x\| = \sup_{\|a\| \leq 1} |\langle x, a\rangle| \leq \rho \quad \forall\ x \in M \qquad \square$$

Bemerkung: Insbesondere ist somit auch Satz 4.4.4 bewiesen.

4.5 Beschränkte lineare Abbildungen

Es seien E, F normierte Räume, und $T : E \to F$ linear, das heißt

$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda Tx + \mu Ty$$

Beispiele:

(i) $E = \mathbb{R}^n,\ F = \mathbb{R}^m$ ausgestattet mit der Euklidischen Norm. Dann ist jede reelle $m \times n$ Matrix T eine stetige, lineare Abbildung zwischen E und F.

(ii) Sei $E = \mathcal{C}^1(0,1)$ der Raum der stetig differenzierbaren Funktionen auf $(0,1)$, und $\|x\| := \sup\limits_{0<t<1} |x(t)|$. Sei analog $F := \mathcal{C}(0,1)$ der Raum aller stetigen Funktionen, mit $\|y\| := \sup\limits_{0<t<1} |y(t)|$. Dann ist die Abbildung $T : E \to F$ definiert durch

$$(Tx)(t) := x'(t)$$

zwar linear aber nicht stetig.

(iii) Seien $E = F = \mathcal{C}[0,1]$ und K eine stetige Funktion auf $[0,1]\times[0,1]$. Dann ist der so genannte *Integraloperator* $T : E \to F$ *mit Kern* K definiert durch

$$Tx(t) := \int_0^1 K(s,t)x(s)\ ds$$

linear und stetig.

Die Begriffe lineare Abbildung und *Operator* sind Synonyme.

4.5.1 Satz: Stetigkeit linearer Abbildungen

Für lineare Abbildung $T : E \to F$ zwischen den normierten Räumen E und F sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) Für Folge $x_n \to x \in E$ ist auch $Tx_n \to Tx \in F$.

(2) Für Folge $x_n \to 0 \in E$ ist auch $Tx_n \to 0 \in F$.

(3) Das Bild
$$\{Tx : x \in F,\ \|x\| \leq 1\}$$
der Einheitskugel $B_1(0) \subset E$ ist beschränkt.

(4) Es existiert eine Zahl $\rho \geq 0$ mit $\|Tx\| \leq \rho \|x\| \quad \forall\, x \in E$.

Beweis: Analog zu Funktionalen.

4.5.2 Definition: Stetige/beschränkte Operatoren

Ein Operator (lineare Abbildung) $T : E \to F$ ist *stetig* bzw. *beschränkt* wenn er diese Eigenschaft (vgl. Satz 4.5.1) erfüllt.

4.5.3 Satz über beschränkte Operatoren

Für beschränkten Operator $T : E \to F$ gilt:

$$\inf \{\rho : \|Tx\| \leq \rho \|x\| \ \ \forall\, x \in E\} = \inf \{\rho : \|Tx\| \leq \rho \ \ \forall\ \ \|x\| \leq 1\} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|$$

4.5.4 Definition: Norm eines Operators

Für einen beschränkten Operator setzt man

$$\|T\| := \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \inf_{\|Tx\| \leq \rho \|x\| \ \forall\ x} \rho$$

4.5.5 Lemma über beschränkte Operatoren

Es gilt für beliebigen Vektor $x \in E$:
$$\|Tx\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$$

4.5.6 Satz über $\mathcal{L}(E, F)$

Die Menge $\mathcal{L}(E, F)$ aller beschränkten, linearen Abbildungen von E nach F ist ein normierter Raum. Ist F vollständig, so ist auch $\mathcal{L}(E, F)$ vollständig. Für $T \in \mathcal{L}(E, F)$ und $S \in \mathcal{L}(F, G)$ gilt außerdem:

$$\|S \cdot T\| \leq \|S\| \cdot \|T\|$$

Beweis: Aus
$$\|STx\| \leq \|S\| \cdot \|Tx\| \leq \|S\| \cdot \|T\| \cdot \|x\| \quad \forall\, x$$
folgt
$$\|ST\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|STx\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|S\| \cdot \|T\| \cdot \|x\| = \|S\| \cdot \|T\|$$

Bemerkungen: Der Raum $\mathcal{L}(E) := \mathcal{L}(E, E)$ ist eine Gruppe bzgl. Addition von Operatoren, und eine Halbgruppe bzgl. der Verkettung (es existiert nicht unbedingt zu jedem $T \in \mathcal{L}(E)$ ein Inverses). Ferner ist $\mathcal{L}(E)$ <u>nicht</u> Nullteilerfremd, das heißt aus $T_2 T_1 = 0$ folgt nicht unbedingt $T_1 = 0 \vee T_2 = 0$.

4.6 Der inverse Operator

Es seien E und F lineare Räume.

4.6.1 Definition: Linksinvers, rechtsinvers

Gegeben sei eine Abbildung $T : E \to F$. Dann ist $S : F \to E$ *linksinvers* zu T, wenn $ST = \mathrm{Id}_E$ und *rechtsinvers* zu T wenn $TS = \mathrm{Id}_F$.

4.6.2 Satz über rechts & linksinverse Abbildungen

Für eine Abbildung $T : E \to F$ gilt:

(i) $\exists$ eine linksinverse Abbildung $\Leftrightarrow$ T ist injektiv.

(ii) $\exists$ eine rechtsinverse Abbildung $\Leftrightarrow$ T ist surjektiv.

(iii) Existiert zu T eine linksinverse Abbildung $S_1 : F \to E$ und eine rechtsinverse Abbildung $S_2 : F \to E$, so folgt $S_1 = S_2$.
Beweis: Es ist

$$S_1 = S_1 \underbrace{(TS_2)}_{\mathrm{Id}_F} = S_1 T S_2 = \underbrace{(S_1 T)}_{\mathrm{Id}_E} S_2 = S_2$$

Bemerkung: Für eine lineare Abbildung $T : E \to F$ ist die Injektivität äquivalent zu

$$\ker(T) := \{x \in E : Tx = 0\} = \{0\}$$

Dabei ist $\ker(T)$ der so genannte *Kern* oder *Nullraum* von T.

4.6.3 Definition: Invertierbare Abbildung

Eine Abbildung $T : E \to F$ ist *invertierbar*, wenn T bijektiv, das heißt injektiv und surjektiv, ist. Dann existiert nach obigem Satz eine eindeutig bestimmte, *zu T inverse*, Abbildung $T^{-1} : F \to E$ mit

$$T^{-1}T = \mathrm{Id}_E \ , \ TT^{-1} = \mathrm{Id}_F$$

Ferner folgt: Sind $S : E \to F, T : F \to G$ invertierbar, dann ist auch TS invertierbar, mit

$$(TS)^{-1} = S^{-1}T^{-1}$$

Bemerkung: Die Definitionen und Satz 4.6.2 über inverse Abbildungen, gelten allgemeiner für zwei nicht leere Mengen E und F.

4.6.4 Lemma über die Linearität inverser Operatoren

Sind E, F lineare Räume, $T : E \to F$ linear und invertierbar, dann ist auch T^{-1} linear.

Beweis: Zu zeigen wäre

$$T^{-1}(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 T^{-1} y_1 + \lambda_2 T^{-1} y_2$$

Doch dies ist äquivalent zur Bedingung:

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = T\left(\lambda_1 T^{-1} y_1 + \lambda_2 T^{-1} y_2\right)$$

da T invertierbar ist. Tatsächlich ist

$$T\left(\lambda_1 T^{-1} y_1 + \lambda_2 T^{-1} y_2\right) = \lambda_1 \underbrace{TT^{-1}}_{\mathrm{Id}} y_1 + \lambda_2 \underbrace{TT^{-1}}_{\mathrm{Id}} y_2 = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$$

□

4.6.5 Satz von Banach über den inversen Operator

Sind E, F Banach-Räume, und die beschränkte lineare Abbildung $T : E \to F$ ist invertierbar, so ist auch T^{-1} beschränkt.

Beweis:

- Es seien
$$U := \{x \in E : \|x\| \leq 1\} \quad , \quad V := \{y \in F : \|y\| \leq 1\}$$
die abgeschlossenen Einheitskugeln in E und F. Zu zeigen wäre:
$$\exists\ \rho > 0 : T^{-1}(V) \subset \rho U := \{\rho u : u \in U\}$$
das heißt $V \subset \rho T(U)$. Da T surjektiv ist, ist image$(T) = F$ und somit
$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(nU) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{T(nU)}$$
denn für jedes $y \in F$ existiert ein $n > \left\|T^{-1}(y)\right\|$ also $y \in T(nU)$. Dabei bezeichne $\overline{T(nU)}$ die abgeschlossene Hülle von $T(nU)$.

- Nach dem Baireschen Kategoriensatz (vgl. 2.3.2), enthält eine dieser abgeschlossenen Mengen $\overline{T(n_0U)}$ eine Kugel $B^o_\sigma(y_0) \subset \overline{T(n_0U)}$. Dabei ist $\overline{T(n_0U)}$ nullsymmetrisch, das heißt für $z \in \overline{T(n_0U)}$ ist auch $-z \in \overline{T(n_0U)}$, denn $T(n_0U)$ ist nullsymmetrisch und daher auch der Abschluss. Ferner ist $T(n_0U)$ und deshalb auch $\overline{T(n_0U)}$ aufgrund der Dreiecksungleichung konvex, das heißt für
$$z_1, z_2 \in \overline{T(n_0U)}\ ,\ \lambda_1, \lambda_2 \geq 0\ ,\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1$$
folgt
$$\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 \in \overline{T(n_0U)}$$

- Es gilt: $B^o_\sigma(0) \subset \overline{T(n_0U)}$, denn für $\|y\| \leq \sigma$ ist
$$y = \frac{1}{2}\underbrace{(y + y_0)}_{\in B^o_\sigma(y_0) \subset \overline{T(n_0U)}} + \underbrace{\frac{1}{2}(-\underbrace{(-y + y_0)}_{\in B^o_\sigma(y_0) \subset \overline{T(n_0U)}})}_{\in \overline{T(n_0U)}} \in \overline{T(n_0U)}$$
und somit
$$B^o_{\varepsilon_0} := B^o_{\sigma/n_0}(0) = \frac{1}{n_0} B^o_\sigma(0) \subset \overline{T(U)}\ ,\ \varepsilon_0 := \frac{\sigma}{n_0}$$

- Zeigen jetzt: Es gilt sogar
$$B^o_{\varepsilon_0} \subset T(U)$$
Sei nun $y \in B^o_{\varepsilon_0}$. Wählen ein $\varepsilon > 0$ mit $\|y\| < \varepsilon < \varepsilon_0$ und betrachten $\overline{y} := \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} y$. Dann ist $\overline{y} \in B^o_{\varepsilon_0} \subset \overline{T(U)}$, es existiert also ein $y_0 = Tx_0 \in T(U)$ mit
$$\|\overline{y} - y_0\| < \alpha\varepsilon_0$$
wobei α so klein gewählt wurde, dass
$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\frac{1}{1-\alpha} < 1$$
ausfällt. Betrachten als nächstes $(\overline{y} - y_0)/\alpha \in B^o_{\varepsilon_0}$. Es existiert wieder ein $y_1 = Tx_1 \in T(U)$ mit
$$\left\|\frac{\overline{y} - y_0}{\alpha} - y_1\right\| < \alpha\varepsilon_0$$
das heißt
$$\|\overline{y} - (y_0 + \alpha y_1)\| < \alpha^2\varepsilon_0$$
Behandeln jetzt $(\overline{y} - (y_0 + \alpha y_1))/\alpha^2$ nach derselben Methode, um $y_2 = Tx_2 \in T(U)$ mit
$$\left[\overline{y} - (y_0 + \alpha y_1 + \alpha^2 y_2)\right] < \alpha^3\varepsilon_0$$

zu erhalten. Auf diese Weise wird induktiv eine Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ in U mit

$$\left\| \overline{y} - T\left(\sum_{i=0}^{n} \alpha^i x_i\right) \right\| < \alpha^{n+1}\varepsilon_0$$

definiert. Wegen $\alpha < 1$ konvergiert $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \alpha^i x_i$ absolut. Da E vollständig ist, existiert nach Satz 4.1.3

$$\overline{x} := \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i x_i \in E$$

und nach Konstruktion ist $T\overline{x} = \overline{y}$. Setzen $x := \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\overline{x}$ so dass gilt $Tx = y$ und nach Wahl von α:

$$\|x\| = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\|\overline{x}\| \leq \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i \|x_i\| \leq \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\frac{1}{1-\alpha} < 1$$

Somit ist $y \in T(U)$.

- Schließlich folgt

$$V \subset \frac{2}{\varepsilon_0} B^o_{\varepsilon_0} \subset \underbrace{\frac{2}{\varepsilon_0}}_{\rho} T(U)$$

□

4.6.6 Satz über die Invertierbarkeit von Operatoren $T \in \mathcal{L}(E)$ mit $\|T\| < 1$

Sei E ein Banach-Raum und $T \in \mathcal{L}(E)$ mit $\|T\| < 1$. Dann ist $(\mathrm{Id} - T)$ invertierbar, mit

$$(\mathrm{Id} - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k$$

und

$$\left\|(\mathrm{Id} - T)^{-1}\right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|T\|^k = \frac{1}{1 - \|T\|}$$

Beweis:

- Die Folge

$$\left(\sum_{k=0}^{n} T^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

ist Cauchyfolge in $\mathcal{L}(E)$, denn für $m > n \in \mathbb{N}$ ist

$$\left\|\sum_{k=0}^{m} T^k - \sum_{k=0}^{n} T^k\right\| = \left\|\sum_{k=n+1}^{m} T^k\right\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \left\|T^k\right\| \overset{4.5.6}{\leq} \sum_{k=n+1}^{m} \underbrace{\|T\|}_{<1}{}^k$$

und $\sum\limits_{k=0}^{n} \|T\|^k$ ist Cauchyfolge in $\mathbb{R}$. Da $\mathcal{L}(E)$ vollständig ist, existiert ein $S \in \mathcal{L}(E)$ mit $\sum\limits_{k=0}^{n} T^k \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} S$.

Alternativ ist wegen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\|T^k\right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|T\|^k = \frac{1}{1 - \|T\|} < \infty \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} T^k \text{ absolut konvergent}$$

und Satz 4.1.3 die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} T^k$ konvergent in $\mathcal{L}(E)$, da $\mathcal{L}(E)$ ein Banachraum ist.

- Zu zeigen wäre noch: $S(\mathrm{Id}-T)=\mathrm{Id}=(\mathrm{Id}-T)S$. Es ist

$$\left(\sum_{k=0}^{n}T^k\right)(\mathrm{Id}-T)=(\mathrm{Id}-T)\left(\sum_{k=0}^{n}T^k\right)=\mathrm{Id}-T^{n+1}$$

  Doch $T^{n+1}\to 0$ da

$$\left\|\lim_{n\to\infty}T^{n+1}\right\|\overset{\|\cdot\|\text{ Stetig}}{=}\lim_{n\to\infty}\left\|T^{n+1}\right\|\le\lim_{n\to\infty}\|T\|^{n+1}=0$$

  und $\|\cdot\|$ positiv definit ist. Somit geht $\left(\mathrm{Id}-T^{n+1}\right)\to\mathrm{Id}$ und deshalb auch

$$\left(\sum_{k=0}^{n}T^k\right)(\mathrm{Id}-T)\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\mathrm{Id}$$

  Doch wegen

$$\left(\sum_{k=0}^{n}T^k\right)(\mathrm{Id}-T)\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}S(\mathrm{Id}-T)$$

  und der Eindeutigkeit des Grenzwertes muss $\mathrm{Id}=S(\mathrm{Id}-T)$ sein. Analog zeigt man auch: $(\mathrm{Id}-T)S=\mathrm{Id}$, also

$$S=\sum_{k=0}^{\infty}T^k=(\mathrm{Id}-T)^{-1}$$

- Ferner ist

$$\left\|(\mathrm{Id}-T)^{-1}\right\|=\left\|\sum_{k=0}^{\infty}T^k\right\|=\left\|\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}T^k\right\|\overset{\|\cdot\|\text{ stetig}}{=}\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=0}^{n}T^k\right\|\le\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left\|T^k\right\|\le\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\|T\|^k=\sum_{k=0}^{\infty}\|T\|^k\qquad\square$$

4.6.7 Satz: Operatoren in einer Umgebung invertierbarer Operatoren $T_0\in\mathcal{L}(E)$

Es sei E ein Banach-Raum und $T_0\in\mathcal{L}(E)$ invertierbar. Dann ist auch jeder beschränkte Operator der Form T_0+T mit $\|T\|<\dfrac{1}{\left\|T_0^{-1}\right\|}$ invertierbar. Die Menge aller beschränkten, invertierbaren Operatoren in $\mathcal{L}(E)$ ist also offen!

Beweis: Es gilt

$$T_0+T=T_0\left(\mathrm{Id}-T_0^{-1}(-T)\right)\ ,\ \left\|T_0^{-1}(-T)\right\|\le\left\|T_0^{-1}\right\|\cdot\|-T\|=\left\|T_0^{-1}\right\|\cdot\|T\|<1$$

Durch den vorigen Satz folgt somit dass $\left(\mathrm{Id}-T_0^{-1}(-T)\right)$ invertierbar ist und

$$(T_0+T)^{-1}=\left[T_0\left(\mathrm{Id}-T_0^{-1}(-T)\right)\right]^{-1}=\left(\mathrm{Id}-T_0^{-1}(-T)\right)^{-1}T_0^{-1}$$

4.6.8 Definition: Eigenwert, Spektrum, Resolventenmenge

Sei E ein komplexer Banachraum und $T\in\mathcal{L}(E)$.

- Eine (komplexe) Zahl λ heißt *Eigenwert* von T, wenn ein $0\ne x\in E$ existiert, mit $Tx=\lambda x$.
- Das *Spektrum* $\sigma(T)$ von T besteht aus allen komplexen Zahlen $\lambda\in\mathbb{C}$, für die die Abbildung $T-\lambda\,\mathrm{Id}$ nicht invertierbar ist.
- Die Menge $\rho(T):=\mathbb{C}\setminus\sigma(T)$ ist die so genannte *Resolventenmenge* von T.

Bemerkungen:

(i) Jeder Eigenwert von T gehört zum Spektrum $\sigma(T)$.

(ii) Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht, denn $(T-\lambda\,\mathrm{Id})$ mag zwar injektiv sein ($\to\lambda$ kein Eigenwert), muss aber in unendlich dimensionalen Räumen nicht unbedingt surjektiv sein ($\to$ nicht invertierbar).

(iii) Ist $(T - \lambda_0 \operatorname{Id})$ invertierbar (das heißt $\lambda_0 \in \rho(T)$), dann ist für λ mit $|\lambda - \lambda_0| < \dfrac{1}{\|(T - \lambda_0 \operatorname{Id})^{-1}\|}$ auch $(T - \lambda \operatorname{Id})$ invertierbar, das heißt $\lambda \in \rho(T)$. Dies folgt direkt aus dem vorigen Satz (4.6.7).
Somit ist $\rho(T)$ offen, also $\sigma(T)$ abgeschlossen.

(iv) $\sigma(T)$ ist beschränkt. Denn für $|\lambda| > \|T\|$ ist

$$T - \lambda \operatorname{Id} = -\lambda \left(\operatorname{Id} - \frac{1}{\lambda} T \right) \quad , \quad \left\| \frac{1}{\lambda} T \right\| < 1$$

nach Satz 4.6.6 invertierbar, und somit $\lambda \notin \sigma(T)$. Somit folgt aus $\lambda \in \sigma(T)$ dass $|\lambda| \leq \|T\|$ ist.

(v) Aus den letzten beiden Bemerkungen folgt: $\sigma(T)$ ist in $\mathbb{C}$ kompakt.

(vi) Es gilt sogar: Für $\lambda \in \sigma(T)$ ist

$$|\lambda| \leq \inf_n \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|T\|$$

(ohne Beweis)

5 Hilbert-Räume

5.1 Skalarprodukt und Norm

5.1.1 Definition: Skalarprodukt

Ein Skalarprodukt auf einem $\mathbb{K}$ $(= \mathbb{R}, \mathbb{C})$ linearen Raum $\mathcal{H}$, ist eine Abbildung von $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{K}$, $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ mit den Eigenschaften:

1. **Positiv definitheit:** $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}$ und sogar $\langle x, x \rangle \geq 0$ für $x \in \mathcal{H}$. Ferner gelte: $\langle x, x \rangle = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$.
2. **Hermitesch:** Für $x, y \in \mathcal{H}$ ist $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
3. **Linearität im 1. Argument:** Für $x, y, z \in \mathcal{H},\ \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ ist $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$

Weitere Eigenschaften des Skalarproduktes

i. Für $x, y, z \in \mathcal{H},\ \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ ist $\langle z, \lambda x + \mu y \rangle = \overline{\lambda} \langle z, x \rangle + \overline{\mu} \langle z, y \rangle$.
Somit ist ein Skalarprodukt eine positiv definite, hermitesche sesquilinearform.

ii. **Cauchy Schwarzsche Ungleichung:** Für $x, y \in \mathcal{H}$ ist

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$$

Beweis: O.B.d.A sei $y \neq 0$. Für jedes $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

$$0 \leq \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle = \langle x, x \rangle + \overline{\lambda} \langle x, y \rangle + \lambda \langle y, x \rangle + \lambda \overline{\lambda} \langle y, y \rangle$$

Insbesondere für $\lambda := -\dfrac{\langle x, x \rangle}{\langle y, y \rangle}$ folgt:

$$0 \leq \langle x, x \rangle - \frac{\overline{\langle x, y \rangle} \langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} - \frac{\langle x, y \rangle \overline{\langle x, y \rangle}}{\langle y, y \rangle} + \frac{\langle x, y \rangle \overline{\langle x, y \rangle}}{\langle y, y \rangle}$$

$$\Rightarrow \;\; 0 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - |\langle x, y \rangle|^2 \quad \square$$

iii. **Dreiecksungleichung:** Für $x, y \in \mathcal{H}$ ist

$$\sqrt{\langle x + y, x + y \rangle} \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle}$$

Beweis: Es gilt

$$\langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + \underbrace{\langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle}}_{2\Re\{\langle x, y \rangle\}} \leq \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + 2 \underbrace{|\langle x, y \rangle|}_{\leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y \rangle}}$$

also

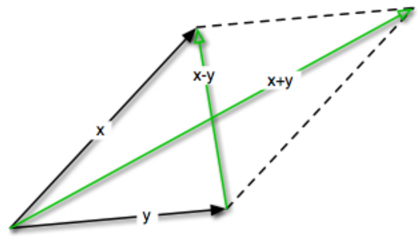
$$\langle x + y, x + y \rangle \leq \left(\sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle} \right)^2 \quad \square$$

iv. **Parallelogrammgleichung:** Für $x, y \in \mathcal{H}$ ist

$$\langle x + y, x + y \rangle + \langle x - y, x - y \rangle = 2 \left(\langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle \right)$$

Spezielles Beispiel: Im $\mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt gilt für ein durch Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^2$ aufgespanntes Parallelogramm:

$$\|x + y\|^2 + \|y - x\|^2 = 2 \left(\|x\|^2 + \|y\|^2 \right) \;,\;\; \|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$



(vgl. folgende Definition der Norm $\|\cdot\|$)

5.1.2 Definition: Prähilbertraum

Ein *Prähilbertraum* $\mathcal{H}$ ist ein $\mathbb{K}$ $(= \mathbb{R}, \mathbb{C})$-linearer Raum ausgestattet mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{K}$. Dabei induziert das Skalarprodukt in $\mathcal{H}$ eine Norm, definiert durch

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}\ ,\ x \in \mathcal{H}$$

Wegen den oben genannten Eigenschaften, ist $\|\cdot\|$ tatsächlich eine Norm. Somit ist $\mathcal{H}$ insbesondere ein metrischer Raum, mit der durch die Norm induzierten Metrik.

Beispiele:

(i) Der Raum l_2 mit dem Skalarprodukt

$$\langle \xi, \eta \rangle := \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \overline{\eta_i}$$

(ii) Der $L_2(-\pi, \pi)$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} x(t) y(t)\ dt$$

5.1.3 Definition: Hilbertraum

Ein *Hilbertraum* $\mathcal{H}$ ist ein bzgl. der durch das Skalarprodukt induzierten Norm $\|\cdot\|$ **vollständiger** Prähilbertraum. Somit ist jeder Hilbertraum insbesondere ein vollständiger, normierter Raum, also ein Banachraum.

5.1.4 Rekonstruktion des Skalarproduktes

Aus der durch das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induzierten Norm $\|\cdot\|$ lässt sich auf einem Prähilbertraum das Skalarprodukt rekonstruieren:

$$\langle x, y \rangle = \begin{cases} \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) & : \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ \\ \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\,\|x+iy\|^2 - i\,\|x-iy\|^2\right) & : \mathbb{K} = \mathbb{C} \end{cases}$$

Ferner gilt: Gilt auf einem normierten Raum für die Norm die Parallelogrammgleichung, dann lässt sich so ein Skalarprodukt einführen, das die gegebene Norm erzeugt.

5.1.5 Stetigkeit des Skalarproduktes

Für $x_n \to x$ und $y_n \to y$ ist $\langle x_n, y_n \rangle \to \langle x, y \rangle$, das heißt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist stetig als Funktion von 2 Variablen.
Beweis:

$$|\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| \leq \underbrace{|\langle x_n - x, y_n \rangle|}_{\leq \|x_n - x\| \cdot \|y_n\|} + \underbrace{|\langle x, y_n - y \rangle|}_{\leq \|x\| \cdot \|y_n - y\|} \leq \underbrace{\|x_n - x\|}_{\to 0} \cdot \underbrace{\|y_n\|}_{\substack{\text{beschränkt} \\ \text{da konvergent}}} + \|x\| \cdot \underbrace{\|y_n - y\|}_{\to 0} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

5.2 Orthogonalität

5.2.1 Definition: Orthogonale Elemente

Zwei Elemente $x, y \in \mathcal{H}$ des Prähilbertraumes $\mathcal{H}$ heißen *orthogonal*, falls gilt:

$$\langle x, y \rangle = 0$$

Schreibweise: $x \perp y$.
Für eine Teilmenge $M \subset \mathcal{H}$ und Element $x \in \mathcal{H}$ schreibt man $x \perp M$ falls gilt

$$x \perp y \quad \forall\, y \in M$$

5.2.2 Satz des Pythagoras

Sind $x, y \in \mathcal{H}$ orthogonale Elemente des Prähilbertraumes $\mathcal{H}$, dann gilt

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Allgemeiner gilt sogar: Für paarweise orthogonale $x_1, .., x_n \in \mathcal{H},\ n \geq 2$ gilt:

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$$

Beweis:

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i, \sum_{j=1}^{n} x_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\langle x_i, x_j \rangle}_{\substack{0 \\ \text{für } i \neq j}} = \sum_{i=1}^{n} \langle x_i, x_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 \qquad \square$$

5.2.3 Definition: Teilraum

Eine nicht-leere Teilmenge $M \subset \mathcal{H}$ eines Prähilbertraumes $\mathcal{H}$ heißt *Teilraum* von $\mathcal{H}$ falls gilt:

(1) Für $x, y \in M,\ \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ folgt $\lambda x + \mu y \in M$ (abgeschlossen im algebraischen Sinne).

(2) M ist abgeschlossen (im topologischen Sinne).

5.2.4 Satz über das Bild und den Kern eines Operators

Es sei $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ein linearer, beschränkter Operator auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Dann sind $\overline{\text{image}(T)}$ und $\ker(T)$ Teilräume von $\mathcal{H}$.
Beweis: Klar!

5.2.5 Satz über die beste Approximation

Es sei $M \subset \mathcal{H}$ ein Teilraum des Prähilbertraumes $\mathcal{H}$ und $x \in \mathcal{H} \setminus M$. Für $y_0 \in M$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. $(x - y_0) \perp M$.

2. $\|x - y_0\| \leq \|x - y\| \quad \forall\, y \in M$. Man sagt: y_0 ist die *beste Approximation* von x auf M.

Beweis:

- Richtung (1) $\Rightarrow$ (2). Es sei $x \in \mathcal{H} \setminus M$, $y_0 \in M$ und $\langle x - y_0, y \rangle = 0 \ \forall \ y \in M$. Dann gilt für beliebige $y \in M$ wegen $\langle x - y_0, \underbrace{y - y_0}_{\in M} \rangle = 0$ der Satz von Pythagoras, das heißt

$$\|x - y\|^2 = \|x - y_0 + y_0 - y\|^2 = \|x - y_0\|^2 + \|y_0 - y\|^2 \geq \|x - y_0\|^2$$

  also

$$\|x - y_0\| \leq \|x - y\|$$

- Richtung (2) $\Rightarrow$ (1). Es gelte $\|x - y_0\| \leq \|x - y\| \quad \forall \ y \in M$. Beweis durch Widerspruch: Es existiere ein $y_1 \in M$ mit $\langle x - y_0, y_1 \rangle \neq 0$, dann ist

$$y_0 + \frac{\langle x - y_0, y_1 \rangle}{\|y_1\|} \cdot \frac{y_1}{\|y_1\|} \in M$$

  eine bessere Approximation, denn

$$\left\| x - y_0 - \frac{\langle x - y_0, y_1 \rangle}{\|y_1\|} \cdot \frac{y_1}{\|y_1\|} \right\|$$

$$= \langle x - y_0, x - y_0 \rangle + \frac{|\langle x - y_0, y_1 \rangle|^2}{(\langle y_1, y_1 \rangle)^2} \langle y_1, y_1 \rangle - \frac{\overline{\langle x - y_0, y_1 \rangle}}{\langle y_1, y_1 \rangle} \langle x - y_0, y_1 \rangle - \frac{\langle x - y_0, y_1 \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle} \langle y_1, x - y_0 \rangle$$

$$= \|x - y_0\|^2 - \underbrace{\frac{|\langle x - y_0, y_1 \rangle|^2}{\langle y_1, y_1 \rangle}}_{>0} < \|x - y_0\|^2$$

$\square$

5.2.6 Satz über die Existenz einer besten Approximation

Es sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum (also ein <u>vollständiger</u> Prähilbertraum), $M \subset \mathcal{H}$ ein Teilraum von $\mathcal{H}$ und $x \in \mathcal{H} \setminus M$. Dann gibt es genau eine beste Approximation von x in M.

Beweis: Es sei $x \in \mathcal{H} \setminus M$
Existenz: Es sei $a := \inf_{y \in M} \|x - y\|$. Da $x \notin M$ und M abgeschlossen ist, ist $a > 0$, denn sonst gäbe es eine Folge $y_n \in M$ mit $y_n \to x$ und somit $x \in M$, was ein Widerspruch wäre. Wählen $(y_n) \subset M$ mit $\|x - y_n\| \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} a$. Solch eine Folge existiert aufgrund der Definition des Infimums. Durch die Parallelogrammgleichung

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$$

folgt für $u := x - y_n, \ v := x - y_m, \ m > n$

$$\|y_m - y_n\|^2 = 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2 - 4\underbrace{\left\| x - \frac{y_n + y_m}{2} \right\|^2}_{\geq a^2} \leq 2\underbrace{\|x - y_n\|^2}_{\to a^2} + 2\underbrace{\|x - y_m\|^2}_{\to a^2} - 4a^2 \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\Rightarrow \ \|y_m - y_n\| \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

das heißt (y_n) ist Cauchyfolge. Da $\mathcal{H}$ vollständig ist, ist (y_n) in $\mathcal{H}$ konvergent, $y := \lim_{n \to \infty} y_n$. Da M abgeschlossen ist, muss $y \in M$ sein, das heißt

$$\|x - y_n\| \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} \|x - y\| \ \Rightarrow \ \|x - y\| = a$$

weshalb

$$\|x - y\| = \min_{y' \in M} \|x - y'\|$$

ist. Somit ist y beste Approximation von x in M.
Eindeutigkeit: Es sei y_0 beste Approximation von x in M. Für jedes $y_0' \in M$ gilt dann

$$\|x - y_0'\|^2 = \|x - y_0 + y_0 - y_0'\|^2 \overset{\langle x-y_0, y_0-y_0'\rangle = 0}{=} \|x - y_0\|^2 + \|y_0 - y_0'\|^2$$

Ist auch y_0' beste Approximation von x, so muss gelten

$$\|x - y_0'\| \leq \|x - y_0\| \ \wedge \ \|x - y_0\| \leq \|x - y_0'\|$$

das heißt $\|x - y_0\| = \|x - y_0'\|$. Demnach ist $\|y_0 - y_0'\| = 0$ und somit $y_0 = y_0'$.
□

5.2.7 Definition: Orthogonale Projektion

Es sei $M \subset \mathcal{H}$ ein Teilraum des Hilbertraums $\mathcal{H}$. Die *orthogonale Projektion* P_M ist genau die Abbildung $P_M : \mathcal{H} \to M$, die jedem $x \in \mathcal{H}$ seine beste Approximation in $\mathcal{H}$ zuordnet. Dabei ist für $x \in M$ offensichtlich $P_M x = x$.

Dabei gilt: P_M ist linear.
Beweis: Zu zeigen wäre: Für $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und $x, y \in \mathcal{H}$ ist $P_M(\lambda x + \mu y) = \lambda P_M x + \mu P_M y$, das heißt $\lambda P_M x + \mu P_M y$ ist beste Approximation von $\lambda x + \mu y$ in M. Also zu zeigen:

$$\langle \lambda x + \mu y - (\lambda P_M x + \mu P_M y), z\rangle = 0 \ \ \forall \ z \in M$$

Doch dies ist tatsächlich der Fall, denn

$$\langle \lambda x + \mu y - (\lambda P_M x + \mu P_M y), z\rangle = \lambda \underbrace{\langle x - P_M x, z\rangle}_{0} + \mu \underbrace{\langle y - P_M y, z\rangle}_{0} = 0$$

□

5.2.8 Definition: Orthogonales Komplement

Zu einer Teilmenge $M \subset \mathcal{H}$ eines Prähilbertraumes $\mathcal{H}$ heißt:

$$M^\perp := \{x \in \mathcal{H} : x \perp M\} = \{x \in \mathcal{H} : \langle x, y\rangle = 0 \ \ \forall \ y \in M\}$$

das *orthogonale Komplement* von M.

Bemerkung: $M^\perp$ ist aufgrund der Linearität und Stetigkeit von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Teilraum von $\mathcal{H}$.

5.2.9 Satz: Zerlegung eines Vektors

Sei $M \subset \mathcal{H}$ ein Teilraum des Hilbertraums $\mathcal{H}$ und $x \in \mathcal{H}$.

1. Dann lässt sich x schreiben als $x = x_1 + x_2$ mit $x_1 \in M, \ x_2 \in M^\perp$.
2. Diese Darstellung ist eindeutig.
3. Es gilt: $\|x\| = \sqrt{\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2}$

Schreibweise: $\mathcal{H} = M \oplus M^\perp$. Wird x aufgefasst als Paar $(x_1, x_2), \ x_1 \in M, \ x_2 \in M^\perp$, so gelten formal die gleichen Rechenregeln (insbesondere Addition, Multiplikation mit Skalaren und Normbildung) wie im $\mathbb{R}^2$ mit der Euklidischen Metrik.

Beweis:

1. $x = \underbrace{P_M x}_{x_1 \in M} + \underbrace{(x - P_M x)}_{x_2 \in M^\perp}$

2. Es sei $x = x_1 + x_2 = x_3 + x_4$ mit $x_1, x_3 \in M,\ x_2, x_4 \in M^\perp$. Dann ist $0 = \underbrace{(x_1 - x_3)}_{\in M} + \underbrace{(x_2 - x_4)}_{\in M^\perp}$ mit $\langle x_1 - x_3, x_2 - x_4\rangle = 0$.

   Mit dem Satz des Pythagoras erhält man

$$0 = \|(x_1 - x_3) + (x_2 - x_4)\|^2 = \|x_1 - x_3\|^2 + \|x_2 - x_4\|^2 \ \rightarrow\ x_1 = x_3 \ \wedge\ x_2 = x_4$$

3. Folgt sofort aus dem Satz des Pythagoras, denn $x_1 \perp x_2$.

□

5.2.10 Eigenschaften der Orthogonalprojektion

Die Orthogonalprojektion P_M auf einen Teilraum $M \subset \mathcal{H}$ des Hilbertraums $\mathcal{H}$ erfüllt folgende Eigenschaften:

a) P_M ist linear (bereits gezeigt).

b) $\|P_M\| = 1$ falls $M \neq \{0\}$
Beweis: Durch $x = \underbrace{P_M x}_{\in M} + \underbrace{(x - P_M x)}_{\in M^\perp}$ folgt zum einen

$$\|x\|^2 = \|P_M x\|^2 + \|x - P_M x\|^2 \ \Rightarrow\ \|P_M x\| \leq \|x\| \quad \forall\, x \in \mathcal{H}$$

und zum anderen, für $x \in M,\ \|x\| = 1 : P_M x = x$, das heißt $\|P_M x\| = \|x\| = 1$ und somit $\|P_M\| \geq 1$. Zusammengefasst also $\|P_M\| = 1$.

c) $P_M \circ P_M = P_M$. (klar)

d) $\langle P_M x, y\rangle = \langle x, P_M y\rangle \quad \forall\, x, y \in \mathcal{H}$. Man sagt: Die Abbildung P_M ist *symmetrisch.*
Beweis: Für $x, y \in \mathcal{H}$ gilt:

$$\langle P_M x, y\rangle = \langle P_M x, P_M y + (y - P_M y)\rangle = \langle P_M x, P_M y\rangle + \underbrace{\langle \underbrace{P_M x}_{\in M}, \underbrace{y - P_M y}_{\in M^\perp}\rangle}_{0} = \langle P_M x, P_M y\rangle$$

Analog: $\langle x, P_M y\rangle = \langle P_M x, P_M y\rangle$

also $\langle P_M x, y\rangle = \langle x, P_M y\rangle$.

5.2.11 Satz: Charakterisierung von Orthogonalprojektionen

Zu jedem $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit $PP = P$ und $\langle x, Py\rangle = \langle Px, y\rangle \quad \forall\, x, y \in \mathcal{H}$ existiert ein Teilraum $M \subset \mathcal{H}$ mit $P = P_M$.
Beweis: Setzen $M := \text{image}(P)$, dann gilt für $y \in M,\ y = Pv : Py = PPv = Pv = y$ und für $x \in \mathcal{H}$:

$$\langle x - Px, y\rangle = \langle x, y\rangle - \langle Px, y\rangle = \langle x, y\rangle - \langle x, \underbrace{Py}_{y}\rangle = 0$$

das heißt $(x - Px) \perp M$.
Zu zeigen bleibt: M ist Teilraum, also insbesondere abgeschlossen. Sei $(x_n) \subset M,\ x_n \to x \in \mathcal{H}$. Dann gilt $x_n = Px_n \stackrel{P \text{ stetig}}{\longrightarrow} Px$ und somit $Px = x$. Also ist per Konstruktion $x \in M$. Somit ist M abgeschlossen.
□

5.3 Orthogonale Reihen

In einem Banachraum E schreibt man

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k$$

und sagt, die Reihe ist konvergent, falls dieser Grenzwert existiert. Dabei impliziert die schärfere Forderung

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty : \text{absolute Konvergenz}$$

nach Satz 4.1.3 schon die Konvergenz der Reihe. Anders formuliert: Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_k y_k$ mit $\|y_k\| = 1$ und $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| < \infty$ ist absolut konvergent, und somit konvergent.

Aussage

Für orthonormale Folge $(x_n) \in \mathcal{H}$ im Hilbertraum $\mathcal{H}$ impliziert schon die schwächere Voraussetzung

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 < \infty$$

die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k$.

5.3.1 Definition: Orthonormales System

Ein System $(x_i)_{i \in I} \subset \mathcal{H}$ heißt *orthonormal*, falls gilt:

$$\langle x_k, x_l \rangle = \delta_{kl} \quad \forall\ k, l \in I$$

5.3.2 Satz über orthonormale Systeme

Es sei $\{x_k\}_{k=1}^n$ ein orthonormales System im Hilbertraum $\mathcal{H}$ und $x \in \mathcal{H}$. Dann gilt für beliebige $c_k \in \mathbb{K}$:

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} c_k x_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, x_k \rangle|^2 + \sum_{k=1}^{n} |c_k - \langle x, x_k \rangle|^2$$

Insbesondere ist somit

$$\sum_{k=1}^{n} \langle x, x_k \rangle x_k$$

die beste Approximation von x in $\text{span}\{x_1, .., x_n\}$.

Beweis:

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} c_k x_k \right\|^2 = \left\langle x - \sum_{k=1}^{n} c_k x_k,\ x - \sum_{k=1}^{n} c_k x_k \right\rangle = \langle x, x \rangle + \sum_{k=1}^{n} c_k \overline{c_k} - \sum_{k=1}^{n} \overline{c_k} \langle x, x_k \rangle - \sum_{k=1}^{n} c_k \overline{\langle x, x_k \rangle}$$

$$= \|x\|^2 + \sum_{k=1}^{n} (c_k - \langle x, x_k \rangle) \left(\overline{c_k} - \overline{\langle x, x_k \rangle} \right) - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, x_k \rangle|^2 = \|x\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |c_k - \langle x, x_k \rangle|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, x_k \rangle|^2$$

Folgerung: Für $c_k = \langle x, x_k \rangle$ folgt

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, x_k \rangle x_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, x_k \rangle|^2$$

5.3.3 Die Besselsche Ungleichung

Für orthonormales System $\{x_k\}_{k=1}^n$ und $x \in \mathcal{H}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle x, x_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

Beweis: Folgt direkt aus vorigem Satz.

5.3.4 Definition: Fourier-Reihe

Für eine orthonormale Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ im Hilbertraum $\mathcal{H}$ und $x \in \mathcal{H}$ ist die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, x_k \rangle \, x_k$$

die *Fourier-Reihe* von x bzgl. der Folge (x_k). Die Koeffizienten $\langle x, x_k \rangle$ sind die *Fourier-Koeffizienten* von x bzgl. (x_k).
Bemerkung: Die Konvergenz der Fourier-Reihe ist gesichert durch die Besselsche Ungleichung (5.3.3) und die Aussage über absolute Konvergenz orthonormaler Reihen (5.3).

5.3.5 Theorem über orthonormale Folgen (*Vollständigkeit*)

Für eine orthonormale Folge $(x_k) \subset \mathcal{H}$ im Hilbertraum $\mathcal{H}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. Die Menge aller endlichen Linearkombinationen $\operatorname{span}\{x_1, x_2, ...\}$ aus (x_k) ist dicht in $\mathcal{H}$.
2. Für $x \in \mathcal{H}$ ist
$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, x_k \rangle \, x_k$$
3. **Parsevalsche Gleichung:**
$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, x_k \rangle|^2 = \|x\|^2$$
4. Ist $\langle x, x_k \rangle \ \forall\, k$, so muss $x = 0$ sein.

Beweis:

- (1) $\Rightarrow$ (2): Sei $x \in \mathcal{H}$ und $\varepsilon > 0$. Wählen $y \in \operatorname{span}\{x_k\}$ mit $\|y - x\| < \varepsilon$, o.B.d.A $y = \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} \lambda_k x_k$.

  Nach Satz 5.3.2 gilt dann für $n \geq n_\varepsilon$:
  $$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, x_k \rangle \, x_k \right\| \leq \left\| x - \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} \langle x, x_k \rangle \, x_k - \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{n} 0 \cdot x_k \right\| \leq \left\| x - \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} \lambda_k x_k \right\| < \varepsilon$$
  Somit ist auch
  $$\left\| x - \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, x_k \rangle \, x_k \right\| \leq \varepsilon$$
  Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, muss gelten:
  $$\left\| x - \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, x_k \rangle \, x_k \right\| = 0$$

- (2) $\Rightarrow$ (3): Es ist

$$\|x\|^2 = \left\|\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\langle x, x_k\rangle\, x_k\right\|^2 \overset{\|\cdot\|\text{ stetig}}{=} \lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{n}\langle x, x_k\rangle\, x_k\right\|^2 \overset{\text{Pythagoras}}{=} \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\|\langle x, x_k\rangle\, x_k\|^2$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}|\langle x, x_k\rangle|^2\cdot\underbrace{\|x_k\|}_{1}$$

- (3) $\Rightarrow$ (4): Klar, da aus $\|x\| = 0$ folgt $x = 0$.

- (4) $\Rightarrow$ (1): Beweis durch Widerspruch.
  Annahme: $M := \underbrace{\overline{\mathrm{span}\{x_k\}}}_{\text{Teilraum}} \neq \mathcal{H}$. Wählen ein $x \in \mathcal{H}\setminus M$ und dazu die beste Approximation x_0 in M. Wegen $x \notin M$ wissen wir: $x - x_0 \neq 0$. Doch andererseits ist $x - x_0 \perp M$, das heißt

$$\langle x - x_0, y\rangle = 0 \quad \forall\, y \in M \;,\; \text{insbesondere} \quad \langle x - x_0, x_k\rangle = 0 \quad k = 1, 2, ..$$

  Wegen (4) folgt dann $x = 0$, was ein Widerspruch ist!

□

5.3.6 Definition: Vollständiges Orthonormalsystem

Ein Orthonormalsystem in $\mathcal{H}$ heißt *vollständig*, falls es die oberen Bedingungen (5.3.5) erfüllt.

Beispiel: Betrachten den Hilbertraum $\mathcal{H} := L_2(-\pi, \pi)$. Die Funktionen $1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \ldots$ sind orthogonal bzgl. der durch das Skalarprodukt induzierten Norm. Die Linearkombinationen dieser Funktionen sind dicht bzgl. der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ (Stone-Weierstraß), und somit erst recht bzgl. $\|\cdot\|_2$.
Bemerkung: Somit sind auch die gesamten entsprechenden Funktionenklassen dicht bzgl. $\|\cdot\|_2$.
Die Funktionen

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin t,\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cos t,\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sin 2t,\ \ldots$$

bilden dabei sogar eine (vollständige) orthonormale Folge. Somit konvergiert jede Fourier-Reihe bzgl. $\|\cdot\|_2$ (im quadratischen Mittel) gegen die gegebene Funktion x.
Fragestellung: Gibt es immer solch eine vollständige orthonormale Folge?

5.3.7 Definition: Separabler Hilbertraum

Ein Hilbertraum $\mathcal{H}$ heißt *separabel*, falls er eine abzählbare, dichte Teilmenge besitzt.

5.3.8 Satz über die Existenz vollständiger orthonormaler Folgen in separablen Hilberträumen

In einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ existiert genau dann eine vollständige, orthonormale Folge, wenn $\mathcal{H}$ separabel ist.
Beweis: Es sei (x_n) eine in $\mathcal{H}$ dichte Folge. Verkleinern diese Schritt für Schritt, so dass die reduzierte Folge linear unabhängig ist. Dabei ist jedes Element nach endlich vielen Schritten erreicht, so dass es eindeutig in der neuen Folge enthalten ist oder nicht. Diese linear unabhängige Folge wird (z.B. durch das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren) orthonormiert. Da sich die lineare Hülle dabei nicht geändert hat, ist sie stets dicht in $\mathcal{H}$.
Anderseits ist $\mathrm{span}\{x_k\}$ für ein vollständiges System $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ abzählbar.

5.3.9 Satz über die Isometrie komplexer, unendlich dimensionaler Hilberträume

Jeder separable, unendlich dimensionale, komplexe Hilbertraum ist isometrisch isomorph zum komplexen Raum l_2 (vgl. 4.3.6).
Beweis: Bei gegebener vollständiger Orthonormalfolge (x_k), ist die Zuordnung $x \mapsto (\langle x, x_k\rangle)_k$ eine Isomorphie. Durch die Parsevalsche Gleichung folgt außerdem die Normerhaltung.

5.4 Lineare Funktionale auf $\mathcal{H}$

Es sei $\mathcal{H}$ ein $\mathbb{K}$-Hilbertraum ($\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$). Dann erzeugt jedes Element $y \in \mathcal{H}$ eine Abbildung $a_y : \mathcal{H} \to \mathbb{K}$ gemäß

$$x \overset{a_y}{\mapsto} \langle x, y \rangle$$

Diese Abbildung ist linear und stetig (bzw. beschränkt).

5.4.1 Lemma über die Norm von a_y

Für beliebiges $y \in \mathcal{H}$ ist $\|a_y\| = \|y\|$

Beweis: Für $y = 0$ ist die Aussage trivial. Für $y \neq 0$ ist zum einen

$$|a_y(x)| = |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \;\Rightarrow\; \|a_y\| \leq \|y\|$$

und zum anderen

$$\left| a_y\left(\frac{y}{\|y\|}\right) \right| = \left| \left\langle y, \frac{y}{\|y\|} \right\rangle \right| = \frac{1}{\|y\|} \cdot \|y\| \cdot \|y\| = \|y\| \;\Rightarrow\; \|a_y\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |a_y(x)| \geq \|y\|$$

also

$$\|y\| = \|a_y\| \quad \square$$

5.4.2 Das Frechet-Riesz Representationstheorem

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Zu jedem stetigen, linearen Funktional $a \in \mathcal{H}'$ existiert genau ein $y \in \mathcal{H}$ mit $a_y = a$, das heißt

$$a(x) = a_y(x) = \langle x, y \rangle \quad \forall\, x \in \mathcal{H}$$

Beweis:

- **Eindeutigkeit:** Seien y, y' mit $a_y = a = a_{y'}$, das heißt $\langle x, y \rangle = \langle x, y' \rangle \;\; \forall\, x \in \mathcal{H}$. Dann gilt insbesondere

  $$\|y - y'\| = \langle y - y', y - y' \rangle = \langle y, y \rangle + \langle y', y' \rangle - \langle y, y' \rangle - \langle y', y \rangle = \langle y', y \rangle + \langle y, y' \rangle - \langle y, y' \rangle - \langle y', y \rangle = 0$$

  woraus folgt $y = y'$.

- **Existenz:** Ist $a \equiv 0$ so wählen $y = 0$. Sei also $a \neq 0$, und

  $$M := \{x \in \mathcal{H} : a(x) = 0\} \neq \mathcal{H}$$

  Dann gilt:

  - $M \neq \emptyset$ da $0 \in M$
  - M ist (topologisch) abgeschlossen, da $\langle \cdot, \cdot \rangle$ stetig.
  - M ist linear abgeschlossen.

  Somit ist M ein Teilraum von $\mathcal{H}$. Wählen somit ein $y_0 \perp M$ (dies ist immer möglich: Für ein $y' \in \mathcal{H} \setminus M$ setzen $y := y' - P_M(x)$) und setzen

  $$y := \frac{\overline{a(y_0)}}{\|y_0\|^2} \cdot y_0 \perp M$$

  Wegen

  $$x = \frac{a(x)}{a(y_0)} \cdot y_0 + \underbrace{\left(x - \frac{a(x)}{a(y_0)} \cdot y_0\right)}_{\in M}$$

  folgt für beliebiges $x \in \mathcal{H}$:

  $$\langle x, y \rangle = \left\langle \frac{a(x)}{a(y_0)} \cdot y_0,\; \frac{\overline{a(y_0)}}{\|y_0\|^2} \cdot y_0 \right\rangle = a(x) \frac{a(y_0)}{a(y_0)} \cdot \frac{\langle y_0, y_0 \rangle}{\|y_0\|^2} = a(x)$$

$\square$

5.5 Der adjungierte Operator

Sei $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ein beschränkter, linearer Operator auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Gesucht ist ein Operator T^* mit

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle \ \forall \ x, y \in \mathcal{H}$$

Somit besteht für $y \in \mathcal{H}$ die Frage: Was ist $T^* y$?
Die Abbildung $x \overset{a}{\mapsto} \langle xT, y\rangle$ ist ein beschränktes, lineares Funktional, denn

$$|a(x)| = |\langle Tx, y\rangle| \leq \|Tx\| \cdot \|y\| \leq \|T\| \cdot \|y\| \cdot \|x\| \ \rightarrow \ \|a\| \leq \|T\| \cdot \|y\|$$

5.5.1 Definition: Adjungierter Operator

Für einen Operator $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ und $y \in \mathcal{H}$ ist $T^* y$ das (eindeutig bestimmte) Element, das das oben eingeführte Funktional a repräsentiert. Die Abbildung $T^* : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, \ y \mapsto T^* y$ ist der *zu T adjungierte* Operator. Per Konstruktion ist dann

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle \quad \forall \ x, y \in \mathcal{H}$$

5.5.2 Eigenschaften des adjungierten Operators

1. T^* ist linear.
   Beweis: Zu zeigen ist $T^*(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 T^* y_1 + \lambda_2 T^* y_2$, das heißt

   $$\langle x, T^*(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)\rangle = \langle x, \lambda_1 T^* y_1 + \lambda_2 T^* y_2\rangle$$

   Tatsächlich, ist

   $$\langle x, T^*(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)\rangle = \langle Tx, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2\rangle = \overline{\lambda_1}\langle Tx, y_1\rangle + \overline{\lambda_2}\langle Tx, y_2\rangle$$

   $$= \overline{\lambda_1}\langle x, T^* y_1\rangle + \overline{\lambda_2}\langle x, T^* y_2\rangle = \langle x, \lambda_1 T^* y_1 + \lambda_2 T^* y_2\rangle$$

2. Es gilt $\|T^*\| = \|T\|$
   Beweis: Zum einen ist

   $$|a(x)| = |\langle Tx, y\rangle| \leq \|Tx\| \cdot \|y\| \leq \|T\| \cdot \|y\| \cdot \|x\| \ \Rightarrow \ \|T^* y\| \overset{(5.4.1)}{=} \|a\| \leq \|T\| \cdot \|y\|$$

   $$\Rightarrow \ \|T^*\| \leq \|T\|$$

   und zum anderen

   $$y := \frac{Tx}{\|Tx\|} \ : \ \|Tx\| = \left|\left\langle Tx, \frac{Tx}{\|Tx\|}\right\rangle\right| = |\langle Tx, y\rangle| = |\langle x, T^* y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|T^* y\| \leq \|x\| \cdot \|T^*\| \cdot \underbrace{\|y\|}_{1} = \|T^*\| \cdot \|x\|$$

   $$\Rightarrow \ \|T\| \leq \|T^*\|$$

Beispiel: Betrachten den Hilbertraum $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$ und den Endomorphismus T, der bzgl. einer Orthonormalbasis als die Matrix

$$(T) = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \dots & \tau_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{n1} & \dots & \tau_{nn} \end{pmatrix}$$

wirkt. Für $x = \left(x^1, .., x^n\right), \ y = \left(y^1, .., y^n\right) \in \mathcal{H}$ ist dann

$$\langle Tx, y\rangle = \tau_{ik} x^k y^i = x_k \overline{\overline{\tau_{ik}} y^i} \overset{!}{=} \langle x, T^* y\rangle$$

also ist

$$(T^*) = \begin{pmatrix} \overline{\tau_{11}} & \dots & \overline{\tau_{n1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{\tau_{1n}} & \dots & \overline{\tau_{nn}} \end{pmatrix} = \overline{(T)^T}$$

Rechenregeln für den adjungierten Operator

1. $T^{**} = T$
   Beweis: Es ist
   $$\langle x, T^{**}y\rangle = \langle T^*x, y\rangle = \overline{\langle y, T^*x\rangle} = \overline{\langle Ty, x\rangle} = \langle x, Ty\rangle \quad \forall\, x, y \in \mathcal{H}$$
   also $Ty = T^{**}y\ \forall\ y$ und somit $T = T^{**}$.

2. $\mathrm{Id}^* = \mathrm{Id}$

3. $(S+T)^* = S^* + T^*$
   Beweis:
   $$\langle x, (S^* + T^*)y\rangle = \langle x, S^*y\rangle + \langle x, T^*y\rangle = \langle Sx, y\rangle + \langle Tx, y\rangle = \langle (S+T)x, y\rangle$$

4. $(ST)^* = T^*S^*$
   Beweis:
   $$\langle x, T^*S^*y\rangle = \langle Tx, S^*y\rangle = \langle STx, y\rangle$$

5. Für $\lambda \in \mathbb{K}$ ist $(\lambda T)^* = \overline{\lambda} T^*$
   Beweis:
   $$\left\langle x, \overline{\lambda} T^* y\right\rangle = \lambda \left\langle x, T^*y\right\rangle = \lambda \left\langle Tx, y\right\rangle = \left\langle \lambda Tx, y\right\rangle$$

6. $\left(T^{-1}\right)^* = \left(T^*\right)^{-1}$.
   Beweis: Es gilt
   $$TT^{-1} = \mathrm{Id} \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Id} = \mathrm{Id}^* = \left(TT^{-1}\right)^* = \left(T^{-1}\right)^* T^*$$
   Analog ist auch $T^*\left(T^{-1}\right)^* = \mathrm{Id}$, das heißt $\left(T^{-1}\right)^*$ ist rechts- und linksinvers zu T^*, also $\left(T^{-1}\right)^* = \left(T^*\right)^{-1}$.

5.5.3 Satz über das Spektrum des adjungierten Operators

Es gilt: $\lambda \in \sigma(T) \;\Leftrightarrow\; \overline{\lambda} \in \sigma(T^*)$ und $\lambda \in \rho(T) \;\Leftrightarrow\; \overline{\lambda} \in \rho(T^*)$.

Beweis: Es genügt die zweite Aussage zu zeigen, da $\sigma(T) = \left(\rho(T)\right)^c$. Es gilt:

$$\lambda \in \rho(T) \;\Leftrightarrow\; \exists\ (T - \lambda\,\mathrm{Id})^{-1} \;\Leftrightarrow\; \exists\ \underbrace{\left[(T - \lambda\,\mathrm{Id})^*\right]^{-1}}_{\left(T^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{Id}\right)^{-1}} \;\Leftrightarrow\; \overline{\lambda} \in \rho(T^*)$$

$\square$

5.5.4 Satz über den adjungierten Operator: Zerlegung des Raumes in Bild und Kern

Für einen Operator $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ des Hilbert-Raumes $\mathcal{H}$ gilt:

$$\mathcal{H} = \overline{\mathrm{image}(T)} \oplus \ker(T^*) = \overline{\mathrm{image}(T^*)} \oplus \ker(T)$$

Beweis:

- Zeigen: $\overline{\mathrm{image}(T)}^\perp \subset \ker(T^*)$. Sei $y \in \overline{\mathrm{image}(T)}^\perp$, das heißt $\langle z, y\rangle = 0\ \forall\ z \in \overline{\mathrm{image}(T)}$, insbesondere für $z \in \mathrm{image}(T)$. Somit ist
  $$\langle x, T^*y\rangle = \langle Tx, y\rangle = 0\ \forall\ x \in \mathcal{H} \;\Rightarrow\; T^*y = 0 \;\Rightarrow\; y \in \ker(T^*)$$

- Zeigen: $\ker(T^*) \subset \overline{\mathrm{image}(T)}^\perp$. Sei also $y \in \ker(T*)$, das heißt $T^*y = 0$, also
  $$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle = 0\ \forall\ x \in \mathcal{H} \;\Rightarrow\; \langle z, y\rangle = 0 \quad \forall\ z \in \mathrm{image}(T)$$
  Da $\langle\cdot,\cdot\rangle$ stetig im 1. Argument ist, ist sogar $\langle z, y\rangle = 0 \;\; \forall\ z \in \overline{\mathrm{image}(T)}$.

- Aus den beiden obigen Überlegungen folgt:
$$\overline{\operatorname{image}(T)}^{\perp} = \ker(T^*)$$
und somit
$$\mathcal{H} \overset{(5.2.9)}{=} \overline{\operatorname{image}(T)} \oplus \overline{\operatorname{image}(T)}^{\perp} = \overline{\operatorname{image}(T)} \oplus \ker(T^*)$$
- Wegen $T^{**} = T$ ist dann auch
$$\mathcal{H} = \overline{\operatorname{image}(T^*)} \oplus \ker(T^{**}) = \overline{\operatorname{image}(T^*)} \oplus \ker(T)$$

□

5.6 Selbstadjungierte Operatoren

5.6.1 Definition: Selbstadjungierter Operator

Ein Operator $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ist *selbstadjungiert* falls gilt $T^* = T$, also $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle \quad \forall\, x, y \in \mathcal{H}$.

Beispiel: Betrachten wir den Hilbertraum $\mathcal{H} = \mathbb{R}^n$, so ist ein Endomorphismus T genau dann selbstadjungiert, wenn die entsprechende Matrix bzgl. einer Orthonormalbasis symmetrisch ist.

5.6.2 Korollar über selbstadjungierte Operatoren

Für $x \in \mathcal{H}$ ist $\langle Tx, x\rangle$ stets reell.
Beweis:
$$\overline{\langle x, Tx\rangle} = \langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle$$

5.6.3 Satz über die Norm selbstadjungierter Operatoren

Für einen selbstadjungierten Operator $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ im Hilbertraum $\mathcal{H}$ gilt:
$$\|T\| = \sup_{\|x\|\le 1} |\langle Tx, x\rangle|$$

Bemerkung: Allgemein ist
$$\sup_{\|x\|\le 1} |\langle Tx, x\rangle| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle| = \max\left\{\sup_{\|x\|=1} \langle Tx, x\rangle\,,\ \inf_{\|x\|=1} \langle Tx, x\rangle\right\}$$

Beweis: Es sei $S := \sup\limits_{\|x\|\le 1} |\langle Tx, x\rangle|$ und o.B.d.A $S > 0$ (für $S = 0$ ist der Satz trivial).

- Zu zeigen: $S \le \|T\|$:
$$|\langle Tx, x\rangle| \le \|Tx\| \cdot \|x\| \le \|T\| \cdot \|x\|^2 \overset{\|x\|\le 1}{\le} \|T\|$$
- Zu zeigen: $\|T\| \le S$:
  (i) Es ist $\langle Ty, z\rangle + \langle z, Ty\rangle \le S\left(\|y\|^2 + \|z\|^2\right) \quad \forall\, y, z \in \mathcal{H}$
  Beweis:
$$2\langle Ty, z\rangle + 2\langle z, Ty\rangle = \langle T(y+z), y+z\rangle - \langle T(y-z), y-z\rangle \le |\langle T(y+z), y+z\rangle| + |\langle T(y-z), y-z\rangle|$$
$$\overset{(*)}{=} \|y+z\|^2 \cdot \left|\left\langle T\frac{y+z}{\|y+z\|}, \frac{y+z}{\|y+z\|}\right\rangle\right| + \|y-z\|^2 \cdot \left|\left\langle T\frac{y-z}{\|y-z\|}, \frac{y-z}{\|y-z\|}\right\rangle\right|$$
$$\le S\left(\|y+z\|^2 + \|y-z\|^2\right) \overset{(**)}{=} 2S\left(\|y\|^2 + \|z\|^2\right)$$

(*) O.B.d.A $z \pm y \neq 0$, ansonsten entsprechenden Summanden weglassen.
(**) Parallelogrammgleichung

(ii) Seien $x \in \mathcal{H},\ \alpha > 0,\ y := \alpha x,\ z := \frac{1}{\alpha} Tx$. Dann gilt:

$$2 \|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx \rangle + \langle Tx, Tx \rangle = \langle Ty, z \rangle + \langle z, Ty \rangle \leq S \left(\|y\|^2 + \|z\|^2 \right) = S \left(\alpha^2 \|x\|^2 + \frac{1}{\alpha^2} \|Tx\|^2 \right)$$

Speziell für $\alpha := \sqrt{S}$ folgt

$$2 \|Tx\|^2 \leq S^2 \|x\|^2 + \|Tx\|^2 \ \Rightarrow \ \|Tx\| \leq S \|x\| \ \Rightarrow \ \|T\| \leq S$$

□

5.6.4 Lemma über die Norm des Produktes adjungierter Operatoren

Sei $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ein beschränkter Operator auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Dann gilt:

$$\|T\|^2 = \|T^* T\|$$

Beweis: Der Operator $T^* T$ ist selbstadjungiert, so dass gilt

$$\|T\|^2 = \left[\sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| \right]^2 = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|^2 = \sup_{\|x\| \leq 1} \underbrace{\langle Tx, Tx \rangle}_{\geq 0} = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle T^* Tx, x \rangle| \overset{5.6.3}{=} \|T^* T\|$$

□

5.6.5 Satz über Eigenwerte selbstadjungierter Operatoren

Sei T ein selbstadjungierter Operator auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Dann gilt:

(1) Alle Eigenwerte von T sind reell.

(2) Alle Eigenwerte liegen im Intervall

$$\left[\inf_{\|x\|=1} \langle Tx, x \rangle, \ \sup_{\|x\|=1} \langle Tx, x \rangle \right]$$

(3) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.

Beweis:

(1) Sei $Tx = \lambda x,\ x \neq 0$. Dann gilt

$$\lambda \langle x, x \rangle = \langle Tx, x \rangle = \langle x, Tx \rangle = \overline{\lambda} \underbrace{\langle x, x \rangle}_{\neq 0}$$

das heißt $\lambda = \overline{\lambda}$ und somit $\lambda \in \mathbb{R}$.

(2) Sei $Tx = \lambda x,\ \|x\| = 1$. Dann ist

$$\inf_{\|y\|=1} \langle Ty, y \rangle \leq \underbrace{\langle Tx, x \rangle}_{\langle \lambda x, x \rangle = \lambda} \leq \sup_{\|y\|=1} \langle Ty, y \rangle$$

(3) Für $Tx_1 = \lambda_1 x_1,\ Tx_2 = \lambda_2 x_2$ gilt:

$$\lambda_1 \langle x_1, x_2 \rangle = \langle Tx_1, x_2 \rangle = \langle x_1, Tx_2 \rangle = \underbrace{\overline{\lambda_2}}_{\lambda_2} \langle x_1, x_2 \rangle$$

Sind also $\lambda_1 \neq \lambda_2$, so muss gelten $\langle x_1, x_2 \rangle = 0$.

□

5.6.6 Satz über die Resolventenmenge selbstadjungierter Operatoren

Sei T ein selbstadjungierter Operator und $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

$$\lambda \in \rho(T) \;\Leftrightarrow\; \exists\, c > 0 : \forall\, x \in \mathcal{H} : \|Tx - \lambda x\| \geq c\,\|x\|$$

Beweis:
Richtung "$\Rightarrow$". Sei $\lambda \in \rho(T)$, das heißt es existiert $(T - \lambda\,\mathrm{Id})^{-1}$. Für $x \in \mathcal{H}$ setzen wir $y := (T - \lambda\,\mathrm{Id})x$ und schreiben

$$\|x\| = \left\|(T-\lambda\,\mathrm{Id})^{-1}y\right\| \leq \left\|(T-\lambda\,\mathrm{Id})^{-1}\right\| \cdot \|y\| = \left\|(T-\lambda\,\mathrm{Id})^{-1}\right\| \cdot \|Tx - \lambda x\| \;\Rightarrow\; \|Tx-\lambda x\| \geq \underbrace{\frac{1}{\left\|(T-\lambda\,\mathrm{Id})^{-1}\right\|}}_{c}\|x\|$$

Richtung "$\Leftarrow$". Es gelte $\|Tx - \lambda x\| \geq c \cdot \|x\| \quad \forall\, x \in \mathcal{H}$ für ein $c > 0$. Zu zeigen ist: $T - \lambda\,\mathrm{Id}$ ist invertierbar. Dabei ist klar dass λ kein Eigenwert sein kann, da für einen entsprechenden Eigenvektor die Ungleichung nicht erfüllt sein würde. Somit ist $T - \lambda\,\mathrm{Id}$ injektiv.
Es bleibt noch zu zeigen: $T - \lambda\,\mathrm{Id}$ ist surjektiv, das heißt $\mathrm{image}(T - \lambda\,\mathrm{Id}) = \mathcal{H}$. Nach Satz 5.5.4 gilt

$$\overline{\mathrm{image}\,(T-\lambda\,\mathrm{Id})} \oplus \ker(\underbrace{(T-\lambda\,\mathrm{Id})^*}_{T-\overline{\lambda}\,\mathrm{Id}}) = \mathcal{H}$$

Da λ und somit $\overline{\lambda}$ kein Eigenwert von T ist, muss $\ker(T - \overline{\lambda}\,\mathrm{Id}) = \{0\}$ sein, das heißt

$$\overline{\mathrm{image}\,(T-\lambda\,\mathrm{Id})} = \mathcal{H}$$

Sei nun $(y_n) \subset \mathrm{image}(T - \lambda\,\mathrm{Id})$ eine Folge mit $y_n = Tx_n - \lambda x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$. Dann ist (y_n) eine Cauchy-Folge, das heißt

$$\|x_m - x_n\| \leq \frac{1}{c}\,\|T(x_m - x_n) - \lambda(x_m - x_n)\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Somit ist auch (x_n) eine Cauchy-Folge und deshalb konvergent (da $\mathcal{H}$ vollständig): $x_n \to x$. Wegen $Tx_n - \lambda x_n \to Tx - \lambda x$ (T stetig) und $Tx_n - \lambda x_n \to y$ muss $y = Tx - \lambda x$ sein, das heißt $y \in \mathrm{image}(T - \lambda\,\mathrm{Id})$. Somit ist $\mathrm{image}(T - \lambda\,\mathrm{Id})$ abgeschlossen, das heißt

$$\mathrm{image}(T-\lambda\,\mathrm{Id}) = \overline{\mathrm{image}(T-\lambda\,\mathrm{Id})} = \mathcal{H}$$

Somit ist $T - \lambda\,\mathrm{Id}$ invertierbar und $\lambda \in \rho(T)$.
□

5.6.7 Satz über das Spektrum selbstadjungierter Operatoren

Es sei T ein selbstadjungierter Operator. Dann gilt:

(1) Das Spektrum $\sigma(T)$ von T liegt auf der reellen Achse.

(2) Das Spektrum liegt im Intervall

$$\left[\inf_{\|x\|=1}\langle Tx, x\rangle\,,\;\sup_{\|x\|=1}\langle Tx, x\rangle\right]$$

(3) Die Zahlen $M := \inf\limits_{\|x\|=1}\langle Tx, x\rangle$ und $S := \sup\limits_{\|x\|=1}\langle Tx, x\rangle$ gehören zum Spektrum.

Beweis:

(1) Sei $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, das heißt $\Im(\lambda) \neq 0$. Für $x \in \mathcal{H}$ setzen wir $y := Tx - \lambda x$. Dann gilt:

$$\langle y, x\rangle + \lambda\,\langle x, x\rangle = \langle y + \lambda x, x\rangle = \langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \langle x, y + \lambda x\rangle = \langle x, y\rangle + \overline{\lambda}\,\langle x, x\rangle$$

also

$$\langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle = \left(\lambda - \overline{\lambda}\right)\langle x, x\rangle$$

und somit

$$2\,\|x\| \cdot \|y\| \geq |\langle x, y\rangle| + |\langle y, x\rangle| \geq |\langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle| = \left|\lambda - \overline{\lambda}\right|\langle x, x\rangle = 2\,|\Im(\lambda)| \cdot \|x\|^2$$

Umgeschrieben also

$$\|Tx - \lambda x\| = \|y\| \geq \underbrace{|\Im(\lambda)|}_{\neq 0} \cdot \|x\|$$

das heißt nach Satz 5.6.6: $\lambda \in \rho(T)$ bzw. $\lambda \notin \sigma(T)$.

(2) - Sei $\lambda > S$. Dann ist wegen

$$\langle Tx - \lambda x, x\rangle = \underbrace{\langle Tx, x\rangle}_{\leq S\|x\|^2} - \lambda \langle x, x\rangle \leq \underbrace{(S-\lambda)}_{<0} \cdot \|x\|^2$$

insbesondere

$$\|Tx - \lambda x\| \cdot \|x\| \geq |\langle Tx - \lambda x, x\rangle| \geq (\lambda - S) \cdot \|x\|^2$$

und somit

$$\|Tx - \lambda x\| \geq \underbrace{(\lambda - S)}_{>0} \cdot \|x\| \quad \forall\, x \in \mathcal{H}$$

das heißt $\lambda \in \rho(T)$ bzw. $\lambda \notin \sigma(T)$.

- Sei $\lambda < M$. Dann ist

$$\|Tx - \lambda x\| \cdot \|x\| \geq \langle Tx - \lambda x, x\rangle = \underbrace{\langle Tx, x\rangle}_{\geq M \cdot \|x\|^2} - \lambda \langle x, x\rangle \geq \underbrace{(M - \lambda)}_{>0} \cdot \|x\|^2$$

das heißt

$$\|Tx - \lambda x\| \geq \underbrace{(M - \lambda)}_{>0} \cdot \|x\|$$

Somit ist $\lambda \notin \sigma(T)$.

(3) Unter Beachtung der Tatsache

$$\lambda \in \rho(T) \;\Leftrightarrow\; \lambda + \mu \in \rho(T + \mu\,\mathrm{Id})$$

können wir wegen Satz 5.6.3 jeweils o.B.d.A annehmen dass $S = \|T\|$ bzw. $M = -\|T\|$ ist.

- Zu zeigen: $\nexists\, c > 0 : \|Tx - Sx\| \geq c\,\|x\| \quad \forall\, x \in \mathcal{H}$. Konstruieren dazu eine Folge (x_n) mit

$$\|x_n\| = 1 \quad \wedge \quad Tx_n - Sx_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Wählen also $x_n \in \mathcal{H}$ mit $\|x_n\| = 1$ und $\langle Tx_n, x_n\rangle \geq S - \frac{1}{n}$. Durch die Definition von S ist dies immer möglich, und es gilt

$$\|Tx_n - Sx_n\|^2 = \langle Tx_n, Tx_n\rangle - 2S\langle Tx_n, x_n\rangle + S^2\|x_n\|^2 \leq \underbrace{\|Tx_n\|^2}_{\leq \|T\|^2 = S^2} - 2S\left(S - \frac{1}{n}\right) + S^2 \leq S^2 - 2S^2 + S^2 + 2\frac{S}{n} = 2\frac{S}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

- Zu zeigen: $\nexists\, c > 0 : \|Tx - Mx\| \geq c\,\|x\| \quad \forall\, x \in \mathcal{H}$. Analog zu vorhin konstruieren wir eine Folge (x_n) mit $\|x_n\| = 1$ und $\langle Tx_n, x_n\rangle \leq M + \frac{1}{n}$. Für diese gilt:

$$\|Tx_n - Mx_n\|^2 = \|Tx_n\|^2 - 2M\langle Tx_n, x_n\rangle + M^2\|x_n\|^2 \leq \underbrace{\|T\|^2}_{M^2} - 2M\left(M + \frac{1}{n}\right) + M^2 = -2\frac{M}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

□

5.7 Unitäre Operatoren

5.7.1 Definition: Unitärer Operator

Ein beschränkter Operator $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$ heißt *unitär*, wenn U surjektiv und

$$\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle \quad \forall\, x, y \in \mathcal{H}$$

ist.

Bemerkungen:

- Insbesondere für $x \neq 0$ folgt $Ux \neq 0$, das heißt U ist injektiv und somit invertierbar.

- In endlich dimensionalen Räumen kann die Forderung der Surjektivität auch weggelassen werden, da sie aus der Injektivität resultiert.
- Um Skalarprodukt-Invarianz zu zeigen, genügt es aufgrund der Darstellung von $\langle\cdot,\cdot\rangle$ als Norm-Kombination (vgl. 5.1.4) zu zeigen:
$$\|Ux\| = \|x\| \quad \forall\, x \in \mathcal{H}$$
- Somit ist ein unitärer Operator eine isometrische Surjektion.

5.7.2 Satz über den Inversen eines unitären Operators

Für einen Operator U auf $\mathcal{H}$ gilt:

(1) U ist genau dann unitär, wenn gilt: $U^{-1} = U^*$

(2) Der Inverse eines unitären Operators ist auch unitär.

Beweis:

(1) Ist $U^{-1} = U^*$ so ist U insbesondere surjektiv und es gilt
$$\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, U^*Uy\rangle = \left\langle x, U^{-1}Uy\right\rangle = \langle x, y\rangle$$
Ist andernfalls U unitär, so ist U nach obigen Bemerkungen (5.7.1) invertierbar, und es gilt
$$\langle Ux, y\rangle = \left\langle Ux, UU^{-1}y\right\rangle = \left\langle x, U^{-1}y\right\rangle \;\rightarrow\; U^{-1} = U^*$$

(2) Für einen unitären Operator U gilt:
$$\left(U^{-1}\right)^* = (U^*)^* = U = \left(U^{-1}\right)^{-1}$$
Nach Teil (a) folgt dann: U^{-1} ist unitär.

□

Beispiele:

(i) Jede Drehung oder Spiegelung im $\mathbb{R}^n$ stellt eine unitäre Transformation dar.

(ii) Im $L_2(\mathbb{R}^n)$ ist die Fouriertransformation
$$(\mathcal{F}f)(k) := \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\cdot e^{-ikx}\, dx$$
eine unitäre Transformation.

Kompakte Operatoren

5.7.3 Definition: Kompakter Operator

Ein beschränkter Operator $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$ heißt *kompakt* genau dann wenn das Bild $T(B_1(0))$ der abgeschlossenen Einheitskugel $B_1(0)$ präkompakt (vgl. 2.1.5) ist. Dies ist äquivalent zu den Aussagen:

- $\overline{T(B_1(0))}$ ist kompakt
- In jeder Folge $(x_n) \subset B_1(0)$ existiert eine Teilfolge (x_{n_k}) so dass (Tx_{n_k}) konvergiert (vgl. Folgenkompaktheit (2.1.3)).
- In jeder beschränkten Folge (x_n) existiert eine Teilfolge (x_{n_k}), so dass (Tx_{n_k}) konvergiert.

5.7.4 Definition: Ausgearteter Operator

Ein Operator $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$ heißt *ausgeartet*, wenn $\dim \operatorname{image}(T) < \infty$ ist.
Bemerkung: Jeder ausgearteter Operator ist kompakt.

5.7.5 Satz: Darstellung ausgearteter Operatoren

Jeder ausgearteter Operator T lässt sich darstellen als

$$Tx = \sum_{i=1}^{n} \langle x, T^* e_i \rangle \, e_k$$

wobei $e_1, .., e_n$ eine Orthonormalbasis in $\operatorname{image}(T)$ ist.

Beweis: Sei $n := \dim \operatorname{image}(T)$. Wählen eine Orthonormalbasis $e_1, .., e_n$ in $\operatorname{image}(T)$. Dann ist für $x \in \mathcal{H}$:

$$Tx = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(x) e_k$$

wobei

$$\langle x, T^* e_i \rangle = \langle Tx, e_i \rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(x) \underbrace{\langle e_k, e_i \rangle}_{\delta_{ki}} = \lambda_i(x)$$

□

5.7.6 Satz: Der adjungierte Operator ausgearteter Operatoren

Der zum ausgearteten Operator $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ (Darstellung wie in Satz (5.7.5)) adjungierte Operator T^* hat die Gestalt

$$T^* y = \sum_{k=1}^{n} \langle y, e_k \rangle \, T^* e_k$$

Beweis: Zu zeigen wäre

$$\left\langle x, \sum_{k=1}^{n} \langle y, e_k \rangle \, T^* e_k \right\rangle = \langle Tx, y \rangle$$

Tatsächlich ist

$$\left\langle x, \sum_{k=1}^{n} \langle y, e_k \rangle \, T^* e_k \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, y \rangle \langle x, T^* e_k \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} \langle x, T^* e_k \rangle \, e_k, y \right\rangle = \langle Tx, y \rangle$$

□

Folgerung

Ein Operator $T \in \mathcal{L}(E)$ ist genau dann ausgeartet wenn der zu ihm adjungierte Operator T^* ausgeartet ist. Dabei ist sogar

$$\dim \operatorname{image}(T) = \dim \operatorname{image}(T^*)$$

Beweis: Sei $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ausgeartet. Wegen

$$\operatorname{image}(T^*) \overset{(5.7.6)}{\subset} \operatorname{span}\{T^* e_1, \ldots, T^* e_k\}$$

ist

$$\dim \operatorname{image}(T^*) \leq \dim \operatorname{image}(T)$$

das heißt insbesondere T^* ist ausgeartet. Ferner ist

$$\dim \operatorname{image}(\underbrace{T}_{T^{**}}) = \dim \operatorname{image}(T^{**}) \leq \dim \operatorname{image}(T^*)$$

□

5.7.7 Satz: Approximation kompakter Operatoren

Jeder kompakte Operator im Hilbertraum $\mathcal{H}$ lässt sich durch ausgeartete Operatoren approximieren.

Beweis: Sei $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ kompakt und $\varepsilon > 0$. Gesucht wir ein ausgearteter Operator $\tilde{T}$ mit $\left\|\tilde{T} - T\right\| \leq \varepsilon$.
Da T kompakt ist, ist

$$T(B_1(0)) = \bigcup_{i=1}^{k} B_\varepsilon(x_i)$$

für endlich viele, geeignet gewählte $x_i \in T(B_1(0))$. Setzen

$$M := \operatorname{span}\{x_1, .., x_k\}$$

und $\tilde{T} := P_M \circ T$, wobei P_M die Orthogonalprojektion (vgl 5.2.7) auf M sei. Dann ist offensichtlich $\tilde{T}$ ausgeartet und für $\|x\| \leq 1$ gilt:

$$\|(Tx) - P_M(Tx)\| \overset{\text{Def. von } P_M}{=} \inf_{z \in M} \|(Tx) - z\| \leq \min_{i=1,..,k} \|Tx - x_i\| \leq \varepsilon$$

also

$$\left\|T - \tilde{T}\right\| = \|T - P_M T\| \leq \varepsilon$$

□

5.7.8 Satz: Grenzwert kompakter Operatoren

Es sei $(T_n) \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ eine konvergente Folge kompakter Operatoren im Hilbertraum $\mathcal{H}$. Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} T_n$ kompakt.

Beweis: Seien T_n kompakt mit $T_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} T$ und $\varepsilon > 0$. Wählen $T_{n_0} \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(T)$ und $x_1, .., x_k \in T_{n_0}(B_1(0))$ so dass:

$$T_{n_0}(B_1(0)) \subset \bigcup_{i=1}^{k} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i)$$

Dann gilt:

$$T(B_1(0)) \subset \bigcup_{i=1}^{k} B_\varepsilon(x_i)$$

denn, für $x \in B_1(0)$ ist $Tx = T_{n_0}x + (Tx - T_{n_0}x)$ und für ein geeignetes $j \in \{1, .., k\}$:

$$T_{n_0}x \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_j)$$

das heißt

$$\|Tx - x_j\| \leq \|T_{n_0}x - x_j\| + \underbrace{\|(T - T_{n_0})x\|}_{\leq \left\|T - T_{n_0}\right\| \cdot \|x\|} \leq \underbrace{\|T_{n_0}x - x_j\|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\|T - T_{n_0}\|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} \cdot \underbrace{\|x\|}_{\leq 1} \leq \varepsilon \quad \rightarrow \quad Tx \in B_\varepsilon(x_j)$$

□

5.7.9 Folgerung: Charakterisierung kompakter Operatoren

(1) Die kompakten Operatoren im Hilbertraum $\mathcal{H}$ sind genau die Operatoren, die durch ausgeartete Operatoren approximiert werden können.

(2) Ein Operator T ist genau dann kompakt wenn der zu ihm adjungierte Operator T^* kompakt ist.

Beweis: Direkte Folgerung der vorigen Sätze (5.7.7) und (5.7.8) und der Folgerung (5.7.6).

5.7.10 Satz über das Spektrum kompakter, selbstadjungierter Operatoren

Jedes $0 \neq \lambda \in \sigma(T)$ aus dem Spektrum eines kompakten, selbstadjungierten Operators $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, ist ein Eigenwert von T.

Beweis:

- Sei o.B.d.A $\lambda = 1$. Dies ist keine Einschränkung, denn für allgemeines $\lambda \neq 0$ ist $(T - \lambda \operatorname{Id})$ genau dann nicht invertierbar wenn $\left(\frac{1}{\lambda}T - \operatorname{Id}\right)$ nicht invertierbar ist und 1 genau dann ein Eigenwert von $\frac{1}{\lambda}T$ wenn λ ein Eigenwert von T ist.

- Sei nun $\lambda = 1$ kein Eigenwert von T. Zu zeigen ist: $1 \in \rho(T)$, das heißt $(T - \operatorname{Id})$ ist invertierbar, das heißt $(T - \operatorname{Id})$ ist surjektiv (injektivität ist klar, da 1 kein Eigenwert von T).
  Betrachten dazu den Operator $(T - \operatorname{Id}) : \mathcal{H} \to \operatorname{image}(T - \operatorname{Id})$ und zeigen dass die Umkehrabbildung
  $$(T - \operatorname{Id})^{-1} : \operatorname{image}(T - \operatorname{Id}) \to \mathcal{H}$$
  beschränkt ist.
  Annahme: $(T - \operatorname{Id})^{-1}$ ist nicht beschränkt, das heißt es existieren Folgen $(x_n), (y_n)$ mit
  $$(T - \operatorname{Id})x_n = y_n \quad \wedge \quad \|y_n\| \leq 1,\ \|x_n\| \geq n$$
  Dann gilt:
  $$T \underbrace{\frac{x_n}{\|x_n\|}}_{\in B_1(0)} = \frac{x_n}{\|x_n\|} + \frac{y_n}{\|x_n\|}$$
  Da T kompakt ist, ist $\left(T\frac{x_n}{\|x_n\|}\right)$ konvergent für eine geeignete Teilfolge, das heißt
  $$\underbrace{T\frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|}}_{\to x} = \frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|} + \underbrace{\frac{y_{n_k}}{\|x_{n_k}\|}}_{\to 0}$$
  so dass auch $\frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|}$ gegen x konvergieren muss. Da T stetig ist, folgt $Tx = x$, was ein Widerspruch ist.
  Somit muss $(T - \operatorname{Id})^{-1}$ beschränkt sein.

- Da $\mathcal{H}$ vollständig ist, muss wegen der Stetigkeit von $(T - \operatorname{Id})$ und $(T - \operatorname{Id})^{-1}$ auch $\operatorname{image}(T - \operatorname{Id})$ vollständig sein, also abgeschlossene Teilmenge von $\mathcal{H}$. Laut Satz (5.5.4) gilt außerdem
  $$\mathcal{H} = \underbrace{\overline{\operatorname{image}(T - \operatorname{Id})}}_{\operatorname{image}(T-\operatorname{Id})} \oplus \underbrace{\ker(T - \operatorname{Id})}_{\substack{\{0\} \\ \text{da } (T-\operatorname{Id}) \text{ injektiv}}} = \operatorname{image}(T - \operatorname{Id})$$
  das heißt $(T - \operatorname{Id})$ ist surjektiv und somit invertierbar.

□

6 Spektralzerlegung beschränkter, selbstadjungierter Operatoren

6.1 Einführung

Aus der linearen Algebra ist ein Spezialfall dieser Theorie bekannt: die Hauptachsentransformation. Gegeben eine symmetrische Matrix $T \in M_n(\mathbb{R})$ mit den Eigenwerten $\lambda_1, .., \lambda_n$ (entsprechend ihrer Vielfachheit) und einer entsprechenden Orthonormalbasis $x_1, .., x_n$ aus Eigenvektoren gilt:

$$(T) = \underbrace{\begin{pmatrix} | & & | \\ x_1 & \dots & x_n \\ | & & | \end{pmatrix}}_{U} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} - & x_1 & - \\ & \vdots & \\ - & x_n & - \end{pmatrix}}_{U^T}$$

also

$$Tx = UDU^T x = UD \sum_i \langle x, x_i \rangle e_i = \sum_i \langle x, x_i \rangle U(\lambda_i e_i) = \sum_i \lambda_i \langle x, x_i \rangle \underbrace{Ue_i}_{x_i} = \sum_i \lambda_i \langle x, x_i \rangle x_i$$

6.1.1 Theorem: Darstellung kompakter, selbstadjungierte Operatoren

Jeder kompakte, selbstadjungierte Operator $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$ hat die Gestalt:

$$Tx = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \langle x, x_i \rangle x_i$$

Dabei sind die λ_i die betragsmäßig, monoton fallend angeordneten, Eigenwerte (entsprechend ihrer Vielfachheit) und die x_i dazu gehörige, paarweise orthonormale Eigenvektoren.

Beweis:

- Alle Eigenwerte von T sind reell und liegen nach Satz (5.6.7) zwischen $M := \inf_{\|x\|=1} \langle Tx, x \rangle$ und $S := \sup_{\|x\|=1} \langle Tx, x \rangle$. Dabei sind M und S wegen Satz (5.7.10) im Falle von $M \neq 0 \neq S$ Eigenwerte und wegen Satz (5.6.3) gilt: $S = \|T\|$ oder $M = -\|T\|$. Ist anderseits $S = 0$, so ist $M = -\|T\|$ und auf jeden Fall ein Eigenwert. Analoges gilt auch im Fall $M = 0$, das heißt es existiert allgemein mindestens ein Eigenwert λ von T mit $|\lambda| = \|T\|$.

- Wählen nun einen Eigenwert λ_1 von T mit $|\lambda_1| = \|T\|$ und dazu normierten Eigenvektor x_1: $Tx_1 = \lambda_1 x_1, \ \|x_1\| = 1$. Setzen
$$L_1 := \operatorname{span}\{x_1\} \ , \ \mathcal{H}_1 := L_1^\perp \ \rightarrow \ L_1 \oplus \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}$$
und $T_1 := T\mid_{\mathcal{H}_1}$. Dabei gilt $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$, denn für $x \in \mathcal{H}_1$ ist
$$\forall \ y = \mu x_1 \in L_1 : \langle y, Tx \rangle = \langle \mu x_1, Tx \rangle = \mu \langle Tx_1, x \rangle = \mu\lambda_1 \underbrace{\langle x_1, x \rangle}_{\substack{0 \\ \text{da } x \in L_1^\perp}} = 0 \quad \rightarrow \quad Tx \in L_1^\perp$$
Somit ist T_1 ein kompakter und selbstadjungierter Operator auf $\mathcal{H}_1$.
Wählen einen Eigenwert λ_2 von T_1 mit $|\lambda_2| = \|T_1\|$, dazu Eigenvektor $x_2 : T_1 x_2 = \lambda_2 x_2, \ \|x_2\| = 1$ und setzen analog
$$L_2 := \operatorname{span}\{x_1, x_2\} \ , \ \mathcal{H}_2 := L_2^\perp \ \rightarrow \ L_2 \oplus \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$$
und $T_2 := T\mid_{\mathcal{H}_2}$. Analog zu vorhin, ist $T_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$ selbstadjungiert, kompakt.
Setzen nun analog fort, und erhalten so die Folgen (λ_n) und (T_n), wobei gilt $\mathcal{H}_{n+1} \subset \mathcal{H}_n$ und somit $\|T_{n+1}\| \leq \|T_n\|$.

- **Fallunterscheidung:**

  (i) Nach endlich vielen Schritten ist $T_m = 0$. Dann gilt für beliebiges $x = \underbrace{y}_{\in L_m} + \underbrace{z}_{\in \mathcal{H}_m} \in \mathcal{H}$:
$$Tx = T(y+z) = Ty + \underbrace{Tz}_{\substack{0 \\ \text{da } T|_{\mathcal{H}_m} = 0}} = T \sum_{i=1}^{m} \underbrace{c_i}_{\langle y, x_i \rangle} x_i = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\langle y, x_i \rangle}_{\langle x, x_i \rangle} \underbrace{Tx_i}_{\lambda_i x_i} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \langle x, x_i \rangle x_i$$

(ii) Die Konstruktion bricht nicht ab. Definieren

$$L_\infty := \overline{\operatorname{span}\{x_1, x_2, \ldots\}}\ ,\ \mathcal{H}_\infty := L_\infty^\perp \ \rightarrow\ \mathcal{H} = L_\infty \oplus \mathcal{H}_\infty$$

Dabei ist $|\lambda_n|$ monoton fallend und es gilt sogar $|\lambda_n| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, da sich sonst ($|\lambda_n| \geq \rho > 0$) wegen

$$Tx_n \in T(B_1(0))\ \wedge\ \|Tx_n\| = \|\lambda_n x_n\| = |\lambda_n| \geq \rho\ \wedge\ x_n \perp x_m\ \forall\ n \neq m$$

ein Widerspruch zur Präkompaktheit von $T(B_1(0))$ ergeben würde. Ferner ist (x_n) vollständig in L_∞ da $\operatorname{span}\{x_1, x_2, ..\}$ per Konstruktion dicht in L_∞ ist. Somit gilt für $x = \underbrace{y}_{\in L_\infty} + \underbrace{z}_{\in \mathcal{H}_\infty} \in \mathcal{H}$

$$Tx = T(y+z) = Ty + Tz = \underbrace{T\sum_{i=1}^{\infty} \overbrace{\langle y, x_i\rangle}^{\langle x, x_i\rangle} x_i}_{\substack{\sum_{i=1}^{\infty} \langle y_i, x_i\rangle\, Tx_i \\ \text{da } T \text{ stetig \& linear}}} + Tz = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \langle x, x_i\rangle\, x_i + Tz$$

Außerdem ist

$$\|Tz\| \overset{\text{da } \overset{\forall\, n}{z \in \mathcal{H}_n}}{=} \|T_n z\| \leq \underbrace{\|T_n\|}_{|\lambda_{n+1}|} \cdot \|z\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \Rightarrow \quad Tz = 0$$

Somit ist die Behauptung bewiesen.

□

6.2 $f(T)$ für kompakte, selbstadjungierte Operatoren

Sei ab nun $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbertraum.

Sei $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ein kompakter, selbstadjungierter Operator. Wir haben in Abschnitt (6.1.1) gesehen, dass dieser dann die Darstellung

$$Tx = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle x, x_k\rangle\, x_k$$

besitzt. Dabei können wir o.B.d.A annehmen, dass die $\{x_k\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in $\mathcal{H}$ bilden. Ansonsten können wir einfach die *fehlenden* hinzufügen (vgl. *Reißverschlussverfahren*) und die λ_k entsprechend 0 setzen. Dabei verschwindet allerdings die Monotonie der Folge (λ_k), was jedoch nicht weiter stören sollte.

6.2.1 Definition: $f(T)$ für kompakte, selbstadjungierte Operatoren

Man setzt für eine beliebige komplexwertige, auf dem Spektrum $\sigma(T)$ und $\{0\}$ definierte Funkion $f : \sigma(T) \cup \{0\} \to \mathbb{R}$:

$$f(T)x := \sum_k f(\lambda_k) \langle x, x_k\rangle\, x_k$$

Halten wir nun T fest, und definieren wir die Abbildung

$$f \overset{\Phi}{\mapsto} f(T)$$

so erfüllt Φ folgende Eigenschaften:

(E1) Für $f_1(t) = t$ gilt: $\Phi(f_1) = T$

(E2) Für $f_0(t) = 1$ gilt: $\Phi(f_0) = \mathrm{Id}$

(E3) Für Funktionen f, g und Skalare λ, μ gilt: $\Phi(\lambda f + \mu g) = \lambda\Phi(f) + \mu\Phi(g)$

(E4) Für Funktionen f, g ist $\Phi(f \cdot g) = \Phi(f) \circ \Phi(g)$.
Beweis:

$$\Phi(f)\,[\Phi(g)x] = \sum_k f(\lambda_k) \left\langle \sum_j g(\lambda_j) \langle x, x_j \rangle x_j, x_k \right\rangle x_k = \sum_k f(\lambda_k) \sum_j g(\lambda_j) \langle x, x_j \rangle \underbrace{\langle x_j, x_k \rangle}_{\delta_{jk}} = \sum_k f(\lambda_k) g(\lambda_j) \langle x, x_k \rangle x_k$$

Bemerke: Hieraus folgt insbesondere: $\Phi(f) \circ \Phi(g) = \Phi(g) \circ \Phi(f)$.

(E5) $\Phi(\overline{f}) = (\Phi(f))^*$
Beweis: Zu zeigen wäre

$$\left\langle \sum_k f(\lambda_k) \langle x, x_k \rangle x_k, y \right\rangle = \left\langle x, \sum_k \overline{f(\lambda_k)} \langle y, x_k \rangle x_k \right\rangle$$

Tatsächlich ist:

$$\left\langle \sum_k f(\lambda_k) \langle x, x_k \rangle x_k, y \right\rangle = \sum_k f(\lambda_k) \langle x, x_k \rangle \langle x_k, y \rangle = \sum_k \overline{\overline{f(\lambda_k)}} \cdot \overline{\langle y, x_k \rangle} \langle x, x_k \rangle = \left\langle x, \sum_k \overline{f(\lambda_k)} \langle y, x_k \rangle x_k \right\rangle$$

Ziel: $f(T)$ für nicht-kompakte Operatoren zu erklären. Dabei sollen stets die Eigenschaften (E1) bis (E5) gelten.

6.3 Polynome selbstadjungierter Operatoren

6.3.1 Definition: $f(T)$ für Polynome f

Sei $P \in \mathbb{C}[X],\ P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ ein Polynom, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ein selbstadjungierter, beschränkter Operator auf $\mathcal{H}$. Durch die Forderung der Gültigkeit der Eigenschaften (E1) bis (E4) in (6.2.1) folgt unmittelbar

$$P(T) = \sum_{k=0}^{n} a_k T^k$$

Dabei bleibt noch Eigenschaft (E5) zu zeigen. Da für $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\overline{P}(t) = \sum_k \overline{a_k} \cdot t^k$$

folgt für $P(T)$:

$$\Phi(\overline{P}) = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} \cdot T^k = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k T^k \right)^* = [\Phi(P)]^*$$

6.3.2 Satz über die Norm von Polynomen selbstadjungierter Operatoren

Sei $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ein selbstadjungierter, beschränkter Operator und $P \in \mathbb{C}[X]$ ein Polynom. Dann gilt

$$\|P(T)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = \|P\|_{\mathcal{C}(\sigma(T))}$$

Hierbei bezeichne $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$ die Operatornorm in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ und $\|\cdot\|_{\mathcal{C}(\sigma(T))}$ die Supremumsnorm in $\mathcal{C}(\sigma(T))$.
Erinnerung: $\sigma(T)$ ist kompakt nach Bemerkungen in Abschnitt 4.6.8.

Beweis:

- Es gilt: $\sigma(P(T)) = P(\sigma(T)) := \{P(\lambda) : \lambda \in \sigma(T)\}$
  Beweis:
  Zeigen: $P(\sigma(T)) \subset \sigma(P(T))$. Sei $\lambda \in \sigma(T)$. Zu zeigen ist: $P(\lambda) \in \sigma(P(T))$. Betrachten dazu das Polynom $P - P(\lambda)$. Dies hat eine Nullstelle bei λ, so dass gilt

$$P(t) - P(\lambda) = Q(t) \cdot (t - \lambda) = (t - \lambda) \cdot Q(t)$$

für ein geeignetes Polynom $Q \in \mathbb{C}[X]$. Somit ist

$$\Phi(P) - P(\lambda)\,\mathrm{Id} = \Phi(P - P(\lambda)) = (T - \lambda\,\mathrm{Id})\Phi(Q) = \Phi(Q)(T - \lambda\,\mathrm{Id})$$

Unter der Annahme $P(\lambda) \in \rho(\Phi(P))$ folgt dann

$$(T - \lambda\,\mathrm{Id})\Phi(Q)\,[\Phi(P) - P(\lambda)\,\mathrm{Id}]^{-1} = \mathrm{Id} = [\Phi(P) - P(\lambda)\,\mathrm{Id}]^{-1}\,\Phi(Q)(T - \lambda\,\mathrm{Id})$$

das heißt

$$\Phi(Q)\,[\Phi(P) - P(\lambda)\,\mathrm{Id}]^{-1} \text{ rechtsinvers zu } (T - \lambda\,\mathrm{Id}) \;\Rightarrow\; (T - \lambda\,\mathrm{Id}) \text{ surjektiv}$$

und

$$[\Phi(P) - P(\lambda)\,\mathrm{Id}]^{-1}\,\Phi(Q) \text{ linksinvers zu } (T - \lambda\,\mathrm{Id}) \;\Rightarrow\; (T - \lambda\,\mathrm{Id}) \text{ injektiv}$$

Somit ist $(T - \lambda\,\mathrm{Id})$ invertierbar, das heißt $\lambda \in \rho(T)$ was ein Widerspruch zu $\lambda \in \sigma(T)$ ist. Es muss also $P(\lambda) \in \sigma(\Phi(P))$ sein.

Zeigen: $\sigma(P(T)) \subset P(\sigma(T))$. Sei $\mu \in \sigma(\Phi(P))$ und o.B.d.A P nicht konstant (sonst ist Satz trivial). Gesucht ist ein $\lambda \in \sigma(T)$ mit $P(\lambda) = \mu$. Dabei seien $\lambda_1, .., \lambda_n$ die Nullstellen von $P - \mu$, so dass gilt

$$P(t) - \mu = a(t - \lambda_1)(t - \lambda_2)\ldots(t - \lambda_n)$$

(vgl. Fundamentalsatz der Algebra) das heißt

$$\Phi(P) - \mu\,\mathrm{Id} = \Phi(P - \mu) = a(T - \lambda_1\,\mathrm{Id})(T - \lambda_2\,\mathrm{Id})\ldots(T - \lambda_n\,\mathrm{Id})$$

Da $\mu \in \sigma(\Phi(P))$ ist, ist $[\Phi(P) - \mu\,\mathrm{Id}]$ <u>nicht</u> invertierbar, das heißt mindestens ein linearer Faktor $(T - \lambda_i\,\mathrm{Id})$ ist nicht invertierbar. Dann ist $\lambda_i \in \sigma(T)$ und $P(\lambda_i) - \mu = 0$, also

$$\mu = P(\lambda_i)$$

- **Zeigen:** $\|\Phi(P)\| = \|P\|_{\mathcal{C}(\sigma(T))}$

$$\|\Phi(P)\|^2 \overset{(5.6.4)}{=} \left\|(\Phi(P))^*\,\Phi(P)\right\| = \left\|\Phi(\overline{P})\Phi(P)\right\| = \left\|\Phi(\overline{P}P)\right\| = \sup\sigma(\underbrace{\Phi(\overline{P}P)}_{\text{selbstadjungiert}})$$

$$= \sup\{\underbrace{\left|(\overline{P}P)(\lambda)\right|}_{|P(\lambda)|^2} : \lambda \in \sigma(T)\} = \sup\left\{|P(\lambda)|^2 : \lambda \in \sigma(T)\right\} = \|P\|^2_{\mathcal{C}(\sigma(T))}$$

□

$f(T)$ für stetige Funktionen

6.3.3 Definition: $f(T)$ für stetige Funktion f und selbstadjungierten Operator T

Sei $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ selbstadjungierter Operator und f stetig auf $\sigma(T)$. Dann kann f in $\left(\mathcal{C}(\sigma(T)), \|\cdot\|_{\mathcal{C}(\sigma(T))}\right)$ durch Polynome (P_n) approximiert werden (vgl. Weierstraßschen Approximationssatz (2.2.3)):

$$P_n \overset{\|\cdot\|_{\mathcal{C}(\sigma(T))}}{\longrightarrow} f$$

Da (P_n) $\|\cdot\|_{\mathcal{C}(\sigma(T))}$-Cauchy ist, ist nach Satz 6.3.2 auch $(P_n(T))$ $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$-Cauchy, das heißt $P_n(T)$ ist konvergent. Man setzt

$$f(T) := \lim_{n\to\infty} P_n(T)$$

Dabei ist dieser Grenzwert unabhängig von der Auswahl der P_n, denn für $\tilde{P}_n \to f$ geht

$$P_n - \tilde{P}_n \overset{\|\cdot\|_{\mathcal{C}(\sigma(T))}}{\longrightarrow} 0$$

also auch

$$P_n(T) - \tilde{P}_n(T) \xrightarrow{\|\cdot\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}} 0$$

Bemerkung: Insbesondere für auf dem Intervall $[\inf \sigma(T), \sup \sigma(T)]$ analytische Funktionen

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$$

ist

$$f(T) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T^k$$

da die Partialsummen $\sum_{k=0}^{n} a_k t^k$ (Polynome) bekanntlich gleichmäßig gegen f konvergieren.

6.3.4 Satz über die Norm von $f(T)$ für stetige f

Sei $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ selbstadjungiert und f stetig auf $\sigma(T)$. Dann gilt:

$$\|f\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = \|f\|_{\mathcal{C}(\sigma(T))}$$

Beweis: Folgt direkt aus dem analogen Satz über Polynome (6.3.2).

6.3.5 Satz: Positiv Definitheit von $f(T)$

Sei $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ selbstadjungiert und f stetig auf $\sigma(T)$. Ist $f \geq 0$, so ist auch $f(T) \geq 0$, das heißt $f(T)$ ist selbstadjungiert und für $x \in \mathcal{H}$ gilt

$$\langle f(T)x, x \rangle \geq 0$$

Beweis: Es sei $f \geq 0$ stetig auf $\sigma(T)$. Setzen Punktweise $g := \sqrt{f}$. Dann folgt

$$\langle f(T)x, x \rangle = \langle g(T) \circ g(T)x, x \rangle = \left\langle g(T)x, (g(T))^* x \right\rangle = \langle g(T)x, \overline{g}(T)x \rangle \overset{g \text{ reell}}{=} \langle g(T)x, g(T)x \rangle = \|g(T)x\|^2 \geq 0$$

□

6.3.6 Satz: Eigenwerte von $f(T)$

Sei $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ selbstadjungiert und f stetig auf $\sigma(T)$. Ist $Tx = \lambda x$ so gilt:

$$f(T)x = f(\lambda)x$$

Beweis:

- Sei zunächst f ein Polynom:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$$

  Dann ist

$$f(T)x = \sum_{k=0}^{n} a_k \underbrace{T^k x}_{\lambda^k x} = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k \right) x = f(\lambda)x$$

- Für allgemeines (auf $\sigma(T)$ stetiges) f, mit $\underbrace{P_n}_{\in \mathbb{C}[X]} \xrightarrow{\|\cdot\|_{\mathcal{C}(\sigma(T))}} f$ folgt dann

$$\underbrace{P_n(T)}_{\to f(T)} x = \underbrace{P_n(\lambda)}_{\to f(\lambda)} x$$

6.3.7 Satz: Das Spektrum von $f(T)$

Für beschränkten, selbstadjungierten Operator $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ und auf $\sigma(T)$ stetige Funktion f, gilt:

$$\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$$

Beweis: Für Polynome $P \in \mathbb{C}[X]$ ist diese Aussage bereits aus dem Beweis von Satz (6.3.2) bekannt.

- **Zeigen:** $\sigma(f(T)) \subset f(\sigma(T))$. Sei $\mu \notin f(\sigma(T))$, das heißt es gibt in $\sigma(T)$ kein λ mit $f(\lambda) = \mu$. Anders gesagt: $f - \mu$ hat in $\sigma(T)$ keine Nullstelle. Setzen wir

$$g(t) := \frac{1}{f(t) - \mu}$$

so ist g stetig auf $\sigma(T)$ und es gilt

$$g \cdot (f - \mu) = 1 = (f - \mu)g$$

also

$$g(T)\,[f(T) - \mu \operatorname{Id}] = \operatorname{Id} = [f(T) - \mu \operatorname{Id}]\,g(T)$$

Somit besitzt $[f(T) - \mu \operatorname{Id}]$ sowohl ein rechts- als auch ein links-Inverses, und ist deshalb invertierbar, das heißt $\mu \in \rho(T)$.

- **Zeigen:** $f(\sigma(T)) \subset \sigma(f(T))$. Sei $\mu = f(\lambda)$ für ein $\lambda \in \sigma(T)$. Zu zeigen wäre: $\mu \in \sigma(f(T))$.
Annahme: $\mu \in \rho(f(T))$, das heißt $[f(T) - \mu \operatorname{Id}]$ ist invertierbar. Wählen $\varepsilon > 0$ so dass für $\left\| \tilde{T} - (f(T) - \mu \operatorname{Id}) \right\| < \varepsilon$ folgt dass $\tilde{T}$ invertierbar ist. Solch ein ε ist immer zu finden, da die Menge aller invertierbaren, beschränkten Operatoren offen ist (vgl. 4.6.7). Wählen außerdem ein Polynom P mit

$$\underbrace{\|P - f\|}_{\|P(T) - f(T)\|} \le \frac{\varepsilon}{2}$$

Dann gilt

$$P(\lambda) \in P(\sigma(T)) = \sigma(P(T))$$

das heißt $[P(T) - P(\lambda) \operatorname{Id}]$ ist nicht invertierbar. Jedoch ist

$$\|[P(T) - P(\lambda) \operatorname{Id}] - [f(T) - \mu \operatorname{Id}]\| \le \|P(T) - f(T)\| + \underbrace{\|P(\lambda) \operatorname{Id} - \mu \operatorname{Id}\|}_{\|(P(\lambda) - \mu) \operatorname{Id}\|}$$

$$= \|P(T) - f(T)\| + |P(\lambda) - \mu| \cdot \underbrace{\|\operatorname{Id}\|}_{1} = \underbrace{\|P(T) - f(T)\|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|P(\lambda) - f(\lambda)|}_{\le \|P - f\| < \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

also ist $[P(T) - P(\lambda) \operatorname{Id}]$ invertierbar, was ein Widerspruch ist! Somit ist $\mu \in \sigma(f(T))$.

□

6.4 Der Rieszsche Darstellungssatz

Für kompakte Menge M, betrachten das endliche Borel-Maß μ auf $(M, \mathscr{B}(M))$. Dann ist die Abbildung

$$f \mapsto \int_M f \, d\mu$$

von $\mathcal{C}(M)$ nach $\mathbb{C}$ linear und beschränkt, denn

$$\left| \int_M f \, d\mu \right| \le \|f\|_{\mathcal{C}(M)} \cdot \mu(M) < \infty$$

Nun stellt sich die Frage: Sind alle beschränkten, linearen Funktionale a auf $\mathcal{C}(M)$ so darstellbar? Das heißt gibt es für jedes $a \in (\mathcal{C}(M))^*$ ein Maß μ so dass

$$a(f) = \int_M f \, d\mu \ , \ f \in \mathcal{C}(M)$$

gilt?
Antwort: Nein. Ein Gegenbeispiel wäre ein lineares Funktional, dass einer rein positiven Funktion die Zahl -1 zuordnet (vgl. Folgerung des Hahn-Banach Theorems (4.3.9)).

Verallgemeinerung des Maß-Begriffs: Führen einen erweiterten Begriff des Maßes ein: Gegeben 4 Maße $\mu_1, .., \mu_4$ auf $(M, \mathscr{B}(M))$ setzt man

$$\mu := (\mu_1 - \mu_2) + i\,(\mu_3 - \mu_4)$$

Dann erfüllt das *komplexwertige Maß* μ bis auf die nicht-negativität alle Axiome eines Maßes.

6.4.1 Satz von Frigyes Riesz

Die lineare Abbildung, die dem komplexwertigen Maß μ auf M die stetige Linearform $f \to \int\limits_M f\ d\mu$ auf $\mathcal{C}(M)$ zuordnet, ist isometrisch (insbesondere injektiv) und surjektiv.

Plausibilitätserklärung: Zu Linearform a ist das entsprechende komplexwertige Maß μ zu konstruieren.
Spezialfall: M kompaktes Intervall der reellen Achse. Dabei genügt es, das Maß μ auf allen Intervallen $[a, b] \subset M$ festzulegen. Man setzt

$$\mu\left([a, b]\right) := \lim_{n\to\infty} \left\langle 1^n_{[a,b]}, a \right\rangle$$

für stetige, monoton wachsende $1^n_{[a,b]} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1_{[a,b]}$.

6.5 $f(T)$ für beschränkte, messbare Funktion f

Sei $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ selbstadjungiert und f auf dem (kompakten) Spektrum $\sigma(T)$ komplexwertig, messbar und beschränkt. Für $g \in \mathcal{C}(\sigma(T))$ ist $g(T)$ bereits erklärt (vgl. 6.3.2). Für $x, y \in \mathcal{H}$ ist

$$g \mapsto \langle g(T)x, y\rangle$$

eine stetige Linearform auf $\mathcal{C}(\sigma(T))$. Nach dem Satz von Riesz (6.4.1) existiert genau ein Maß μ_{xy} auf $\sigma(T)$ mit

$$\langle g(T)x, y\rangle = \int\limits_{\sigma(T)} g(t)\ \mu_{xy}(dt)\ ,\ g \in \mathcal{C}(\sigma(T))$$

6.5.1 Satz über das Maß μ_{xy}

Es sei für $x, y \in \mathcal{H}$ das Maß μ_{xy} auf $\sigma(T)$ definiert wie oben. Dann gilt $\overline{\mu_{yx}} = \mu_{xy}$.
Beweis:

$$\int\limits_{\sigma(T)} g\ d\overline{\mu_{yx}} = \overline{\int\limits_{\sigma(T)} \overline{g}\ \mu_{yx}} = \overline{\langle \overline{g}(T)y, x\rangle} = \langle x, \overline{g}(T)y\rangle = \left\langle x, (g(T))^*\, y\right\rangle = \langle g(T)x, y\rangle = \int\limits_{\sigma(T)} g\ d\mu_{xy}\quad \forall\ g \in \mathcal{C}(\sigma(T))$$

□

6.5.2 Bedingung an $f(T)$ für messbares f

Für beschränke, messbare Funktion f auf $\sigma(T)$ ist

$$\int\limits_{\sigma(T)} f(t)\ \mu_{xy}(dt) := B(x, y)$$

für feste x, y erklärt. Betrachtet man nun $B(x, y)$ für festes f als Funktion der Punkte $x, y \in \mathcal{H}$ so hat $B : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ die Eigenschaften:

- B ist biadditiv.
- B ist homogen bzw. konjugiert-homogen bzgl. der 1. bzw. 2. Variablen, das heißt für $\lambda \in \mathbb{C}$ ist:

$$B(\lambda x, y) = \lambda B(x, y)\ ,\ B(x, \lambda y) = \overline{\lambda} B(x, y)$$

  Anders gesagt: B ist *sesquilinear*.

Für stetiges g gilt:

$$\langle g(T)x, y\rangle = \int\limits_{\sigma(T)} g(t)\ \mu_{xy}(dt)\ \ \forall\ x, y \in \mathcal{H}$$

Man fordert dass für allgemeine (messbare) f durch eine geeignete Definition von $f(T)$ auch gilt:

$$\langle f(T)x, y\rangle = \int\limits_{\sigma(T)} f(t)\ \mu_{xy}(dt)$$

Dabei stellt sich die Frage: Ist $f(T)$ dadurch eindeutig festgelegt?

6.5.3 Satz: Darstellung von Sesquilinearformen

Zu jeder sesquilinearen Abbildung $B : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ die stetig bzgl. jeder der beiden Variablen ist, existiert genau ein $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit

$$B(x, y) = \langle Ax, y\rangle\ \ \forall\ x, y \in \mathcal{H}$$

Beweis: Die Abbildung $B(\cdot, y)$ ist für festes y eine stetige Linearform. Nach dem Frechet Riesz Representationstheorem (vgl. 5.4.2) existiert genau ein $z_y \in \mathcal{H}$ mit

$$B(x, y) = \langle x, z_y\rangle\ \ \forall\ x \in \mathcal{H}$$

Dabei hängt z_y stetig und linear von y ab: Zu $\lambda \in \mathbb{C}$ ist nämlich

$$\langle x, z_{\lambda y}\rangle = B(x, \lambda y) = \overline{\lambda} B(x, y) = \overline{\lambda}\,\langle x, z_y\rangle = \langle x, \lambda z_y\rangle\ \ \forall\ x \in \mathcal{H}$$

das heiß $z_{\lambda y} = \lambda z_y$. Analog ist auch $z_{y_1+y_2} = z_{y_1} + z_{y_2}$ für $y_1, y_2 \in \mathcal{H}$. Somit ist die Zuordnung

$$y \overset{S}{\mapsto} z_y$$

eine stetige, lineare Abbildung, mit

$$B(x, y) = \langle x, Sy\rangle = \langle S^* x, y\rangle\ \ ,\ \ S^* =: A$$

6.5.4 Definition: $f(T)$ für messbares f

Sei $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ beschränkt und selbstadjungiert und f messbar und beschränkt auf $\sigma(T)$. Für $x, y \in \mathcal{H}$ sei μ_{xy} wie oben definiert (vgl. 6.5). Sei A der eindeutige Operator (vgl. 6.5.3), für den gilt

$$\langle Ax, y\rangle = B(x, y)$$

mit der stetigen, sesquilinearen Zuordnung

$$B(x, y) := \int\limits_{\sigma(T)} f(t)\ \mu_{xy}(dt)$$

Dann setzt man:

$$f(T) := A$$

6.5.5 Theorem: Eigenschaften von $f(T)$

Für einen beschränkten, selbstadjungierten Operator T im Hilbertraum $\mathcal{H}$, hat die Abbildung Φ, die der beschränkten, messbaren, komplexwertigen Funktion f auf $\sigma(T)$ den beschränkten, linearen Operator $f(T)$ zuordnet, die Eigenschaften:

1) $\Phi(f_1) = T$ für $f_1(t) = t$
2) $\Phi(f_0) = \mathrm{Id}$ für $f_0(t) = 1$
3) $\Phi(\lambda f + \mu g) = \lambda\Phi(f) + \mu\Phi(g)$ für $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$
4) $\Phi(f \cdot g) = \Phi(f) \circ \Phi(g)$
5) $\Phi(\overline{f}) = (\Phi(f))^*$
6) Für $f_n \overset{\text{gleichmäßig}}{\longrightarrow} f$ geht auch $f_n(T) \to f(T)$
7) Für $\|f_n\| \leq 1$ und $f_n(t) \to f(t) \ \ \forall\, t \in \sigma(T)$ folgt
$$f_n(T)x \to f(T)x \ \ \forall\, x \in \mathcal{H}$$

6.6 Spektralzerlegung

6.6.1 Definition: E_A für Borelmenge A

Für beschränkten, selbstadjungierten Operator $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$ und Borel-Menge $A \subset \sigma(T)$ ist $E_A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ definiert durch:
$$E_A := 1_A(T)$$
(vgl. 6.5.4). Hierbei ist 1_A die *Indikatorfunktion* von A.

6.6.2 Satz: Eigenschaften von E_A

Sei $A \subset \sigma(T)$ eine Borelmenge, dazu $E_A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Der lineare, beschränkte Operator E_A besitzt folgende Eigenschaften:

1) E_A ist eine Orthogonalprojektion.
   Beweis: Wegen $\overline{1_A} = 1_A$ ist $E_A^* = E_A$, das heißt E_A ist selbstadjungiert. Wegen $1_A = 1_A^2$ ist $E_A = E_A \circ E_A$. Aus Satz (5.2.11) folgt dann die Behauptung.
2) Es ist $E_\emptyset = 0$
   Beweis: Wegen $1_\emptyset = 0 = 0$ und der Linearität der Zuordnung $f \mapsto f(T)$ folgt die Behauptung.
3) Es ist $E_{\sigma(T)} = \mathrm{Id}$.
   Beweis: Folgt direkt aus $1_{\sigma(T)} = 1$
4) Sind $A_n \in \sigma(T),\ n \in \mathbb{N}$ paarweise disjunkte Borelmengen, so ist
$$\sum_{i=1}^{\infty} E_{A_i}x = E_{\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i}x \quad , \quad x \in \mathcal{H}$$
   Beweis: Folgt direkt aus
$$\sum_{i=1}^{\infty} 1_{A_i} = 1_{\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i} \quad \text{(Punktweise)}$$
5) Für Borelmengen $A, B \subset \sigma(T)$ ist $E_A \circ E_B = E_{A\cap B}$
   Beweis: Folgt direkt aus $1_A \cdot 1_B = 1_{A\cap B}$

6.6.3 Definition: Verallgemeinerung von E_A

Für beschränkten, selbstadjungierten Operator $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$ und Borel-Menge $A \subset \mathbb{R}$ ist $E_A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ definiert durch:

$$E_A := E_{A\cap\sigma(T)} = 1_{A\cap\sigma(T)}(T)$$

6.6.4 Definition: Spektralmaß

Eine Abbildung $E : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$, die jeder Borelmenge $A \subset \mathbb{R}$ eine Orthogonalprojektion E_A im Hilbertraum $\mathcal{H}$ zuordnet, mit den Eigenschaften

- $E_\emptyset = 0$
- $E_\mathbb{R} = \mathrm{Id}$
- $\sum\limits_{i=1}^{\infty} E_{A_i}x = E_{\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i}x$ für paarweise disjunkte Borelmengen A_i

ist ein *Spektralmaß*. Das Quadrupel

$$(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \mathcal{H}, E)$$

wird *Spektralmaßraum* genannt. Man sagt, das Spektralmaß hat einen *kompakten Träger* M, wenn $M \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ kompakt ist und gilt $E_M = \mathrm{Id}$.
Bemerkung: Haben bereits gesehen: Jeder selbstadjungierte, beschränkte Operator T auf $\mathcal{H}$ erzeugt ein Spektralmaß mit kompakten Träger $\sigma(T)$ (vgl. 6.6.1).

6.6.5 Definition: Integral über Spektralmaße

Ein Spektralmaß $E : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit kompakten Träger M erzeugt einen Integralbegriff. Für eine beschränkte, messbare, komplexwertige Funktion f auf M ist dann

$$\int\limits_M f\ dE = \int\limits_M f(\lambda)\ dE_\lambda \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

erklärt wie in der Maßtheorie. Insbesondere für Treppenfunktionen

$$f = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k 1_{A_k}$$

ist dann

$$\int\limits_M f\ dE = \int\limits_M \sum_{k=1}^{n} \lambda_k 1_{A_k}\ dE = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \int\limits_M 1_{A_k}\ dE = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k E_{A_k}$$

Ist ferner E durch T erzeugt (vgl. 6.6.1), so ist

$$\int\limits_{\sigma(T)} f\ dE = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k E_{A_k} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k 1_{A_k}(T) \overset{\text{Linearität}}{=} f(T)$$

6.6.6 Eigenschaften des Integrals über Spektralmaße

Es sei E ein Spektralmaß auf $\mathcal{H}$ und f beliebige beschränkte, messbare Funktion.

1) Die Abbildung $f \mapsto \int\limits_M f\ dE$ ist linear und stetig, und es gilt

$$\left\| \int\limits_M f\ dE \right\| \le \|f\|_{\mathcal{C}(M)}$$

2) Es ist $\int\limits_M 1_A \, dE = E_A$

3) Ist f reellwertig, dann ist $\int\limits_M f \, dE$ selbstadjungiert.

4) Speziell für $f_1(t) = t$ ist

$$\int\limits_M f_1 \, dE = \int\limits_M \lambda \, dE_\lambda$$

6.6.7 Satz über von Operatoren erzeugte Spektralmaße

Gegeben sei ein selbstadjungierter, beschränkter Operator $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Dieser erzeuge das Spektralmaß E, dazu

$$S := \int\limits_{\sigma(T)} \lambda \, dE_\lambda$$

Dann ist $S = T$.
Beweis: Für beliebiges $\varepsilon > 0$ wählen Treppenfunktion f auf $\sigma(T)$, mit $\|f - f_1\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Dann gilt:

$$\|T - S\| \leq \underbrace{\| \underbrace{T}_{f_1(T)} - f(T)\|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\left\| f(T) - \int\limits_{\sigma(T)} f \, dE \right\|}_{\substack{0 \\ \text{da } f \text{ Treppenfunktion}}} + \underbrace{\left\| \int\limits_{\sigma(T)} f \, dE - \underbrace{S}_{\int_{\sigma(T)} f_1 dE} \right\|}_{< \|f - f_1\| < \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

Da ε beliebig war, muss $T = S$ sein. $\square$

Beispiel: Sei T kompakter, selbstadjungierter Operator, mit

$$Tx = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle x, x_k \rangle x_k$$

wobei $\{x_k\}_k$ o.B.d.A vollständiges Orthonormalsystem sei, mit

$$\sigma(T) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$$

Setz man für eine Borelmenge $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$

$$E_A x := \sum_{\lambda_k \in A} \langle x, x_k \rangle x_k$$

so ist E_A eine Orthogonalprojektion und sogar ein Spektralmaß. Für $f_1(t) = t$ auf $\sigma(T)$ gilt

$$\left(\int\limits_{\sigma(T)} f_1 \, dE \right)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle x, x_k \rangle x_k = Tx$$

7 Unbeschränkte Operatoren

Seien E, F Banachräume und $T : E \supset D(T) \to F$ linear, wobei $D(T)$ auch linear ist. Dabei muss $D(T)$ nicht unbedingt abgeschlossen, und T nicht unbedingt stetig sein!

7.1 Abgeschlossene Operatoren

7.1.1 Definition: Abgeschlossene, lineare Abbildung

Eine lineare Abbildung $T : E \supset D \to F$ zwischen den Banachräumen E, F heißt *abgeschlossen*, wenn gilt:
Für Folge $(x_n) \subset D$ mit $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ und $Tx_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$ folgt:

$$x \in D \ \wedge \ Tx = y$$

7.1.2 Satz über injektive Operatoren

Es sei $T \in \mathcal{L}(E, F)$ ein injektiver, beschränkter Operator zwischen den Banachräumen E und F. Dann ist

$$T^{-1} : F \supset \underbrace{\text{image}(T)}_{D(T^{-1})} \to E$$

abgeschlossen.

Beweis: Seien $y_n \in \text{image}(T)$ mit $y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y \in F$ und $T^{-1}y_n = x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \in E$. Dann gilt

$$y_n = Tx_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} Tx \quad \Rightarrow \quad y = Tx$$

(da T stetig), das heißt

$$y \in \text{image}(T) \ \wedge \ T^{-1}y = x$$

□

Typisches Beispiel: Betrachten die Banachräume $E = F = \mathcal{C}[0,1]$ und den Operator $(Tx)(t) = x'(t)$ mit dem Definitionsgebiet $\mathcal{C}^1[0,1]$. Beachte dass $\left(\mathcal{C}^1[0,1], \|\cdot\|_\infty\right)$ <u>nicht</u> vollständig ist. Doch T ist invers zur injektiven, linearen, stetigen Abbildung $\int \in \mathcal{L}(\mathcal{C}[0,1])$:

$$\left(\int y\right)(t) := \int_0^t y(\tau)\ d\tau$$

Somit ist $T = \partial_t$ ein abgeschlossener Operator.

7.1.3 Definition: Der normierte Raum $E \times F$

Seien E, F normierte Räume und $E \times F := \{(x, y) : x \in E,\ y \in F\}$ ausgestattet mit der Norm

$$\|(x, y)\| := \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$$

Bemerke: Es ist $(E \times F, \|\cdot\|)$ genau dann vollständig wenn E und F vollständig sind.

7.1.4 Definition: Graph

Der *Graph* $G(T)$ eine linearen Abbildung $T : E \supset D \to F$ zwischen den Banachräumen E und F, ist die Teilmenge

$$G(T) := \{(x, y) \in E \times F : x \in D \ \wedge \ y = Tx\}$$

Dabei ist $G(T)$ linear (da T linear).

7.1.5 Satz über den Graph abgeschlossener Operatoren

Ein Operator $T : E \supset D \to F$ zwischen den Banachräumen E und F ist genau dann abgeschlossen, wenn der Unterraum $G(T) \subset E \times F$ abgeschlossen ist.

Beweis: Es ist $\underbrace{x_n}_{\in D} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x,\quad \underbrace{Tx_n}_{\in \text{image}\, T} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$ genau dann wenn

$$(x_n, Tx_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (x, y)$$

und es ist $(x, y) \in G(T)$ genau dann wenn $x \in D,\ y = Tx.$ $\square$

7.1.6 Theorem: Satz von abgeschlossenen Graphen

Jeder auf einem Banachraum E definierter, abgeschlossener Operator T in einen Banachraum F ist stetig.

Beweis: Betrachten die Projektionen $P_E : E \times F \to E,\ P_F : E \times F \to F$, definiert durch

$$P_E(x, y) = x\ ,\ P_F(x, y) = y$$

und die Einschränkungen $P_E\,|_G,\ P_F\,|_G$ auf $G = G(T)$.

$$\begin{tikzcd}
 & E \times F \arrow[dl, "P_E"'] \arrow[dr, "P_F"] \arrow[d, phantom, "\cup"] & \\
E \arrow[rr, bend right, "T"'] & G(T) \arrow[l, "P_E\,|_G"] \arrow[r, "P_F\,|_G"'] & F
\end{tikzcd}$$

Wir wissen: T abgeschlossen $\Leftrightarrow G(T)$ abgeschlossen $\Leftrightarrow G(T)$ ist Banachraum.
Ferner ist $P_E\,|_G$ surjektiv und injektiv (wegen Eindeutigkeit von T), und somit invertierbar. Da P_E stetig ist, ist auch $P_E\,|_G \in \mathcal{L}\,[G(T), E]$ stetig, und nach dem Satz von Banach (4.6.5) ist $(P_E\,|_G)^{-1}$ stetig, das heißt $(P_E\,|_G)^{-1} \in \mathcal{L}(E, G(T))$. Somit ist

$$T = \underbrace{(P_F\,|_G)}_{\text{stetig}} \circ \underbrace{(P_E\,|_G)^{-1}}_{\text{stetig}}$$

stetig. $\square$

7.1.7 Erweiterung nicht abgeschlossener Operatoren

Frage: Lässt sich ein nicht-abgeschlossener Operator $T : E \to F$ zu einem abgeschlossenen Operator erweitern?
Versuch: Ist der Abschluss $\overline{G(T)}$ wieder der Graph eines Operators?

Betrachten einen abgeschlossenen Operator $S : E \supset \underbrace{D(S)}_{\supset D(T)} \to F$ mit $Sx = Tx$ für $x \in D(T)$, das heißt S sei abgeschlossene Erweiterung von T. Für den Graph $G(S)$ gilt per Konstruktion: Ist $(x, y_1) \in G(S),\ (x, y_2) \in G(S)$ so ist $y_1 = y_2$. Die Teilmenge $\overline{G(T)} \subset G(S)$ muss diese Eigenschaft erst recht haben. Insbesondere muss gelten: Ist $(0, y) \in \overline{G(T)}$ so muss $y = 0$ sein. Zusammengefasst also:

$$\left.\begin{array}{l} x_n \in D(T) \\[2ex] x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \\[2ex] (Tx_n)\ \text{konvergent} \end{array}\right\} \Rightarrow\ Tx_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Diese Bedingung erweist sich als hinreichend für die *Abschließbarkeit* (siehe folgenden Satz)!

7.1.8 Satz: Abschließbarkeit nicht-abgeschlossener Operatoren

Der Operator $T : E \supset D(T) \to F$ zwischen den Banachräumen E und F lässt sich genau dann zu einem abgeschlossenen Operator erweitern, wenn für jede gegen 0 konvergente Folge $(x_n) \subset D(T)$, deren Bildfolge (T_n) konvergiert, gilt:

$$\lim_{n\to\infty} Tx_n = 0$$

Unter diesen Umständen gibt es eine eindeutig bestimmte kleinste Erweiterung $\overline{T}$ (Abschließung von T) für deren Graphen $G(\overline{T}) = \overline{G(T)}$ gilt.

Beweis:

- Die Notwendigkeit der Bedingung wurde bereits gezeigt. Sei nun die Bedingung erfüllt, dann ist $\overline{T}$ zu konstruieren. Sei
$$D(\overline{T}) = \left\{ x \in E : \exists\, y \in F \text{ mit } (x, y) \in \overline{G(T)} \right\}$$
Dann gilt: $D(\overline{T})$ ist linear.
Beweis: Da T linear ist, ist auch $G(T)$ und somit auch $\overline{G(T)}$ linear. Für $x_1, x_2 \in D(\overline{T}),\ y_1, y_2$ mit $(x_i, y_i) \in \overline{G(T)}$ ist somit auch
$$(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda(x_1, y_1) + \mu(x_2, y_2) \in \overline{G(T)}$$
das heißt $\lambda x_1 + \mu x_2 \in D(\overline{T})$.

- Eine andere Formulierung von $D(\overline{T})$ wäre: $x \in D(\overline{T}) \ \Leftrightarrow\ \exists\, (x_n) \subset D(T) : x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \ \wedge\ Tx_n$ konvergent. Definieren somit:
$$\overline{T}x := \lim_{n\to\infty} Tx_n$$
für eine Folge $(x_n) \subset D(T)$ mit $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. Diese Definition ist tatsächlich Sinnvoll, denn seien $x_n, x'_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ mit Tx_n, Tx'_n konvergent. Zu zeigen wäre: (Tx_n) und (Tx'_n) haben gleichen Grenzwert. Tatsächlich, ist wegen $x_n, x'_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ auch $(x_n - x'_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ und analog ist $(Tx_n - Tx'_n) = T(x_n - x'_n)$ konvergent. Nach Voraussetzung muss dann gelten
$$(Tx_n - Tx'_n) = T(x_n - x'_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$
das heißt
$$\lim_{n\to\infty} Tx_n = \lim_{n\to\infty} Tx'_n$$

- Per Konstruktion ist $G(\overline{T}) = \overline{G(T)}$ abgeschlossen. Leicht zu zeigen ist außerdem die Linearität von $\overline{T}$.

Somit ist $\overline{T}$ abgeschlossene Fortsetzung von T. $\square$

7.2 Der adjungierte Operator

Sei nun $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ stets ein Hilbertraum und $T : \mathcal{H} \supset D(T) \to \mathcal{H}$ ein linearer Operator mit $D(T)$ dicht in $\mathcal{H}$. Für den adjungierten Operator T^* soll auch hier gelten:

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$$

Zu $y \in \mathcal{H}$ betrachten wir die (lineare) Abbildung $x \mapsto \langle Tx, y\rangle$ von $D(T)$ nach $\mathbb{C}$. Beachte: Diese ist <u>nicht</u> unbedingt stetig! T^*y wird definiert für die $y \in \mathcal{H}$, für die $x \mapsto \langle Tx, y\rangle$ stetig ist:

$$D(T^*) := \{y \in \mathcal{H} : x \mapsto \langle Tx, y\rangle \ \text{ stetig auf } D(T)\}$$

Für jedes $y \in D(T^*)$, kann das stetige, komplexe, lineare, auf dem dichten Unterraum $D(T)$ definierte, Funktional $x \mapsto \langle Tx, y\rangle$, stetig und eindeutig auf $\mathcal{H}$ fortgesetzt werden (vgl. Hahn Banach Theorem 4.3.7).

7.2.1 Definition: T^*

Der zu $T : \mathcal{H} \supset D(T) \to \mathcal{H}$ *adjungierte* Operator T^*, ist der (lineare) Operator, der jedem $y \in D(T^*)$ das (eindeutig bestimmte) Element T^*y aus $\mathcal{H}$ zuordnet, das die (gegebenfalls auf $\mathcal{H}$ fortgesetzte) Linearform $x \mapsto \langle Tx, y\rangle$ repräsentiert (vgl. Satz von Frechet Riesz 5.4.2). Somit gilt per Konstruktion

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle \quad \text{für} \;\; x \in D(T),\; y \in D(T^*)$$

Bemerkung: Alternativ könnte man $D(T^*)$ gemäß

$$D(T^*) := \{y \in \mathcal{H} : \exists\, T^*y \in \mathcal{H} : \forall\, x \in D(T) : \langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle\}$$

definieren. Beide Definitionen sind äquivalent.