Stochastik für Physiker: Aufgaben und Lösungsvorschläge

Simon Stützer

Stand: 24. Februar 2009

Aufgabe 1:
Vergleichen Sie die *Wahrscheinlichkeit, beim Spiel mit einem Würfel in 4 Würfen mindestens einmal 6 zu würfeln*, mit der *Wahrscheinlichkeit, beim Spiel mit zwei Würfeln in 24 Würfen mindestens eine Doppel-6 zu würfeln.*

Lösungsvorschlag 1:

- Spiel mit einem Würfel und vier würfen
- Wahrscheinlichkeitsraum: $\left[\{1,...,6\}^4, \wp\left(\{1,...,6\}^4\right), P\right]$
- P bei jedem Wurf die Gleichverteilung auf $1,...,6$
- Ereignis: A ... mindestens einmal wird die '6' gewürfelt

$$P(A) = 1 - P(A^C) = 1 - \frac{|A^C|}{|\Omega|} = \underline{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0.518}$$

- Spiel mit zwei Würfeln wobei 24 mal gewürfelt wird
- Wahrscheinlichkeitsraum: $\left[\left\{\{1,...,6\}^2\right\}^{24}, \wp\left(\left\{\{1,...,6\}^2\right\}^{24}\right), P\right]$
- Ereignis: B ... mindestens eine Doppel-'6' wird gewürfelt

$$P(B) = 1 - P(B^C) = 1 - \frac{|B^C|}{|\Omega|} = \underline{1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0.491}$$

Lösungsvorschlag 1 (Variante):

- Wahrscheinlichkeitsraum: $\left[\{1,0\}^4, \wp\left(\{1,0\}^4\right), P\right]$
- dabei bedeutet $\begin{cases} 0 & \text{es fällt keine '6'} \\ 1 & \text{es fällt eine '6'} \end{cases}$
- P ist nun Bernoulli-Verteilung mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{6}$

$$P(A) = 1 - P(A^C) = 1 - P(\{0,0,0,0\}) = 1 - \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{4-0} = \underline{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4}$$

- Wahrscheinlichkeitsraum: $\left[\{1,0\}^{24}, \wp\left(\{1,0\}^4\right), P\right]$
- dabei bedeutet $\begin{cases} 0 & \text{es fällt keine Doppel-'6'} \\ 1 & \text{es fällt eine Doppel-'6'} \end{cases}$
- P ist nun Bernoulli-Verteilung mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{36}$

$$P(B) = 1 - P(B^C) = 1 - \left(\frac{1}{36}\right)^0 \left(1 - \frac{1}{36}\right)^{24-0} = \underline{1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24}}$$

Aufgabe 2:
Es seien A, B, C drei Ereignisse aus dem Grundraum Ω. Als Ergebnis eines Experiments erscheint das Element $\omega \in \Omega$. Geben Sie Ausdrücke für die folgenden Sachverhalte an:
a) Es tritt keines dieser Ereignisse ein.
b) Es tritt genau eines dieser Ereignisse ein.
c) Es tritt höchstens eines dieser Ereignisse ein.
d) Es treten mindestens zwei dieser Ereignisse ein.

Lösungsvorschlag 2:
a) $\omega = \{A^C \cap B^C \cap C^C\}$
b) $\omega = \{A \cap B^C \cap C^C\} \cup \{A^C \cap B \cap C^C\} \cup \{A^C \cap B^C \cap C\} = M_1$
c) $\omega = M_1 \cup \left\{A^C \cap B^C \cap C^C\right\} = M_2$
d) $\omega = M_2^C = \{A \cap B / C\} \cup \{A \cap C / B\} \cup \{B \cap C / A\} \cup \{A \cap B \cap C\}$

Aufgabe 3:
Gegeben seien ein Wahrscheinlichkeitsraum $[\Omega, \mathfrak{A}, P]$ und für die Ereignisse A, B, C die Wahrscheinlichkeiten $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$ und $P(C) = \frac{1}{2}$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

- AA ... Weder A noch B tritt ein
- BB ... es treten A und B ein
- CC ... das Ereignis C tritt nicht ein
- DD ... es tritt A aber nicht B ein

Lösungsvorschlag 3:

$$\begin{aligned}
P(AA) &= P(A^C \cap B^C) = 1 - P((A^C \cap B^C)^C) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \\
P(BB) &= P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{3}{4} = \frac{1}{12} \\
P(CC) &= P(C^C) = 1 - P(C) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\
P(DD) &= P(A/B) = P(A/A \cap B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Aufgabe 4:
Es wird mit zwei Würfeln gewürfelt. Geben Sie bei den folgenden Aufgaben immer zuerst einen passenden W.-Raum an, beschreiben Sie anschließend das zu betrachtende Ereignis und berechnen Sie dann die gefragte Wahrscheinlichkeit.

a) Die Würfel seien unterscheidbar. Beide Augenzahlen werden beobachtet. Beschreiben Sie das Experiment durch einen W.-Raum. Berechnen Sie die W. dafür, daß das Maximum der Augenzahlen gleich 3 ist.

b) Es wird nur das Maximum der Augenzahlen beobachtet. Beschreiben Sie das Experiment durch einen W.-Raum. Berechnen Sie die W. dafür, daß das Maximum der Augenzahlen gleich 3 ist.

c) Die Würfel seien nicht unterscheidbar (und sie sollen auch nicht unterscheidbar gemacht werden). Beide Augenzahlen werden beobachtet. Beschreiben Sie das Experiment durch einen W.- Raum. Berechnen Sie die W. dafür, daß das Maximum der Augenzahlen gleich 3 ist.

d) Es wird nur die Summe der Augenzahlen beobachtet. Beschreiben Sie das Experiment durch einen W.-Raum. Berechnen sie die W. dafür, daß die Summe der Augenzahlen kleiner oder gleich 3 ist.

Lösungsvorschlag 4:

a)
- Wahrscheinlichkeitsraum: $[\{1, ..., 6\}^2, \mathfrak{P}(\{1, ..., 6\}^2), P]$
- P ist Gleichverteilung auf $1, ..., 6$
- Ereignis: A ... das Maximum der Augenzahlen ist 3

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|\{1,2,3\}^2 / \{1,2\}^2|}{36} = \frac{9-4}{36} = \frac{5}{36}$$

b)
- Wahrscheinlichkeitsraum: $[\{1, ..., 6\}, \mathcal{P}(\{1, ..., 6\}), P]$
- P ist Gleichverteilung auf $1, ..., 6$
- Ereignis: A' ... das Maximum der Augenzahlen ist 3

$$P(A') = ... = \frac{5}{36}$$

c)
- Wahrscheinlichkeitsraum: $[\{r_1, ..., r_6\}, \mathcal{P}(\{1, ..., 6\}), P]$
- P ist Maxwell-Boltzmann-Verteilung, Zustände: $n = 6$, Teilchenzahl: $r = 2$
- Ereignis: A'' ... das Maximum der Augenzahlen ist 3

$$\begin{aligned} P(A'') &= P(\{0,0,2,0,0,0\}, \{0,1,1,0,0,0\}, \{1,0,1,0,0,0\}) = P(\{0,0,2,0,0,0\}) + P(\{0,1,1,0,0,0\}) + P(\{1,0,1,0,0,0\}) \\ &= \frac{1}{6^2} \cdot \frac{2!}{0! \cdot 0! \cdot 2! \cdot 0! \cdot 0! \cdot 0!} + \frac{1}{6^2} \cdot \frac{2!}{0! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 0! \cdot 0! \cdot 0!} + \frac{1}{6^2} \cdot \frac{2!}{1! \cdot 0! \cdot 1! \cdot 0! \cdot 0! \cdot 0!} = \frac{5}{36} \end{aligned}$$

d)
- Wahrscheinlichkeitsraum: $[\{2, ..., 12\}, \mathcal{P}(\{2, ..., 12\}), P]$
- Ereignis: B ... die Summe der Augenzahlen ist kleiner oder gleich 3

$$P(B) = P(\{1,1\}, \{2,1\}\{1,2\}) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{12}$$

Aufgabe 5:
Acht Kugeln fallen "rein zufällig" und unabhängig voneinander in drei Fächer. Geben Sie einen passen- den W.-Raum an, so daß Sie die folgende Frage beantworten können: Mit welcher Wahrscheinlichkeit bleibt mindestens ein Fach leer?

Lösungsvorschlag 5:

- Wahrscheinlichkeitsraum: $[\{r_1, r_2, r_3\}, \mathcal{P}(\{r_1, r_2, r_3\}), P]$
- P ist Maxwell-Boltzmann-Verteilung
- Ereignis: A ... mindestens ein Fach bleibt leer

$$\begin{aligned} P(A) &= 3 \cdot P(\{0,0,8\}) + 6 \cdot P(\{0,1,7\}) + 6 \cdot P(\{0,2,6\}) + 6 \cdot P(\{0,3,5\}) + 6 \cdot P(\{0,4,4\}) \\ &= \frac{1}{3^8} \left(3 \cdot \frac{8!}{8!} + 6 \cdot \frac{8!}{7!} + 6 \cdot \frac{8!}{2! \cdot 6!} + 6 \cdot \frac{8!}{3! \cdot 5!} + 3 \cdot \frac{8!}{4! \cdot 4!} \right) \\ &= \frac{3 + 48 + 168 + 336 + 210}{3^8} = \underline{\frac{765}{3^8} \approx 0.117} \end{aligned}$$

Aufgabe 6:
Beim Wurf einer Münze erscheine mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ entweder Kopf oder Zahl. Bestimmen Sie die minimale Anzahl von Würfen, bei der mit Wahrscheinlichkeit größer oder gleich $0,95$ wenigstens einmal Kopf und einmal Zahl erscheint.

Lösungsvorschlag 6:

- Wahrscheinlichkeitsraum: $[\{0,1\}^n, \mathcal{P}(\{0,1\}^n), P]$
- P ist Bernpulli-Verteilung mit Erfolgswahrscheinlichkeit p=1/2 und $\begin{cases} 0 & \text{es fällt Kopf} \\ 1 & \text{es fällt Zahl} \end{cases}$
- Ereigis: A ... es fällt mindestens einmal Kopf und einmal Zahl

$$P(A) = 1 - P(A^C) = 1 - \left[\left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-0} + \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-n} \right] \stackrel{!}{=} 0.95$$

$$\Rightarrow \frac{0.05}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow \underline{n = \frac{\ln(40)}{\ln(2)}} \approx 5.32 \quad \text{Es muss 6 mal gewürfelt werden.}$$

Aufgabe 7:
Es seien $[\mathbb{R}, \mathfrak{R}, P]$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und F die Verteilungsfunktion zu P . Drücken Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten von Intervallen mit Hilfe der Verteilungsfunktion aus: $P((a,b))$, $P((a,b])$, $P([a,b))$, $P([a,b])$ wobei $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Wie können diese Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe einer Verteilungsdichte ausgedrückt werden, falls eine existiert?

Lösungsvorschlag 7:

- Wahrscheinlichkeitsraum: $[\mathbb{R}, \mathfrak{R}, P]$
- Verteilungsfunktion: $F : \mathbb{R} \to [0,1]$, $F(x) = ((-\infty, x])x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$
- Vorüberlegung: $P([a,a]) = P\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}\right], a\right) = \lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left(a-\frac{1}{n}, a\right]\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(F(a) - F\left(a - \frac{1}{n}\right)\right)$

$$P((a,b)) = P((a,b]) - P(\{b\}) = F(b) - F(a) - \lim_{n\to\infty}\left(F(b) - F\left(b - \frac{1}{n}\right)\right)$$

$$P((a,b]) = F(b) - F(a)$$

$$P([a,b)) = P([a,a]) + P((a,b]) - P(\{b\}) = \lim_{n\to\infty}\left(F(a) - F\left(a-\frac{1}{n}\right)\right) + F(b) - F(a) - \lim_{n\to\infty}\left(F(b) - F\left(b - \frac{1}{n}\right)\right)$$

$$P([a,b]) = P([a,a]) + P((a,b]) = \lim_{n\to\infty}\left(F(a) - F\left(a - \frac{1}{n}\right)\right) + F(b) - F(a)$$

Aufgabe 8:
Zwei Volumina mit den Inhalten V_1, V_2 kommunizieren durch eine Ö?nung. Sie enthalten insgesamt n Moleküle ohne Wechselwirkung. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich im Volumen V_1 genau k Moleküle befinden, gleich $(1+\gamma)^{-n}\binom{(}{n}k)\gamma^k$ ist, wobei $\gamma = \frac{V_1}{V_2}$ und $k = 1, ..., n$

Lösungsvorschlag 8:

- insgesamt n Molekülen
- X ... Anzahl der Moleküle in V_1
- Ereignis: A ... Es sind k Moleküle im Volumen V_1
- $P(X=k) = (1+\gamma)^{-n}\binom{n}{k}\gamma^k$
- X_i neue Zufallsgröße mit $\begin{cases} 1 & i\text{-tes Molekül ist in} V_1 \\ 0 & i\text{-tes Molekül ist in} V_2 \end{cases}$
- Wahrscheinlichkeitsraum: $[\{0,1\}^n, \wp(\{0,1\}^n), P]$ mit P Binomialverteilung
- $P(X_i = 1) = \frac{V_1}{V_1+V_2} = \left(1 + \frac{V_2}{V_1}\right) = \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)-1 = \frac{\gamma}{\gamma+1}$
- $X_i \sim B_{n,p}$ i.i.d. mit $p = \frac{\gamma+1}{\gamma}$ und $X = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$

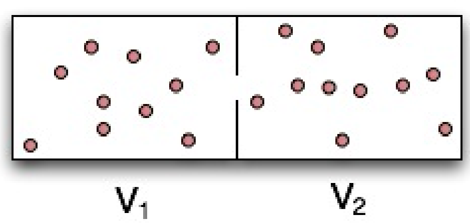


Abbildung 1: Zwei durch eine Öffnung verbundene Volumina

$$\begin{aligned} P(X=k) &= \binom{n}{k}\left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)^k \left(1 - \frac{\gamma}{\gamma+1}\right)^{n-k} \\ &= \binom{n}{k}\left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)^k \left(\frac{1}{\gamma+1}\right)^{n-k} \\ &= \binom{n}{k}\gamma^k \left(\frac{1}{\gamma+1}\right)^n = (1+\gamma)^{-n}\binom{n}{k}\gamma^k \end{aligned}$$

Aufgabe 9:
Die Spieler A und B würfeln abwechselnd mit einem Paar von (gleichmäßigen) Würfeln. A gewinnt, wenn seine Gesamtaugenzahl bei einem Wurf genau 6 ist, bevor B bei einem Wurf die Augenzahl 7 würfelt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler A gewinnt, wenn er beginnt?

Aufgabe 10:
Aus einem Skatblatt werden nacheinander zufällig zwei Karten gezogen (ohne Zurücklegen) und verdeckt hingelegt. Es wird die als zweite gezogene Karte aufgedeckt. Wie groß ist die Wahrschein- lichkeit, daß die zuerst gezogene Karte ein As ist, wenn die zweite Karte ein As ist? Geben Sie zunächst einen passenden W.-Raum und dann die betrachteten Ereignisse und Wahr- scheinlichkeiten an.

Lösungsvorschlag 10:

- Wahrscheinlichkeitsraum: $[\{0,1\}^2, \wp(\{0,1\}^2), P]$ mit $\begin{cases} 0 & \text{kein Ass} \\ 1 & \text{Ass} \end{cases}$
- alternativ: Wahrscheinlichkeitsraum: $[\{1,...,32\}^2, \wp(\{1,...,32\}^2), P]$ wobei $1,...,4$ die Asse sind
- Ereignis: A ... erste Karte ist ein Ass; B ... zweite Karte ein Ass ist

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)\cdot P(A)}{P(B)} = \underline{\frac{\frac{3}{31}\cdot\frac{4}{32}}{\frac{4}{32}} = \frac{3}{31}}$$

Aufgabe 11:
Für ein 10-gliedriges Bernoulli-Schema werden die Ereignisse
A_1 ... es tritt keine '1' auf,
A_2 ... es tritt höchstens eine '1' auf,
B ... in den ersten 5 Versuchen tritt keine '1' auf
betrachtet. Berechnen Sie die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(A_1|B)$, $P(A_2|B)$, $P(B|A_1)$, $P(B|A_2)$.

Aufgabe 12:
Für ein Produkt sei bekannt folgendes bekannt: Von der Gesamtproduktion habe 5% das Merkmal D (z.B. 'Defekt'). Die angewendete Untersuchungsmethode liefert in 80% der Fälle die richtige Diagnose, wenn das untersuchte Produkt nicht das Merkmal D hat und in 90% der Fälle die richtige Diagnose, wenn das Produkt das Merkmal D hat. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein zufällig ausgewähltes Produkt das Merkmal D hat, wenn die Diagnosemethode das Ergebnis liefert: 'Produkt hat Merkmal D'? Geben Sie einen passenden W.-Raum an und verwenden Sie die Bayessche Formel!

Lösungsvorschlag 12:

- Wahrscheinlichkeitsraum: $[\{w_1, w_2\}, \wp(w_1, w_2)]$ mit w_1 Diagnose, w_2 Zustand und $\begin{cases} 1 & \text{nicht defekt} \\ 0 & \text{defekt} \end{cases}$
- Ereignis: A ... Produkt hat Merkmal 'D'; B ... Produkt ist defekt
- bekannt: $P(A) = 0.05 \quad P(B^C|A^C) = 0.8 \quad P(B|A) = 0.9$
- gesucht: $P(A|B)$

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)\cdot P(A)}{P(B)}$$

mit

$$\begin{aligned} P(B^C|A^C) &= \frac{P(B^C\cap A^C)}{P(A^C)} = \frac{P(B^C)+P(A^C)-P(B^C\cup A^C)}{P(A^C)} \\ &= \frac{1-P(B)+1-P(A)-(1-P((B^C\cup A^C)^C))}{1-P(A)} \\ &= \frac{1-P(B)+1-P(A)-(1-P(B\cap A))}{1-P(A)} \\ &= \frac{1-P(B)+1-P(A)-(1-P(B|A)\cdot P(A))}{1-P(A)} \end{aligned}$$

$$P(B) = 1 + P(B|A) \cdot P(A) - P(A) - P(B^C|A^C)(1 - P(A))$$
$$\Rightarrow P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{1 + P(B|A) \cdot P(A) - P(A) - P(B^C|A^C)(1 - P(A))} \approx 0.1915$$

Aufgabe 13:
Es seien $X_1, X_2, ..., X_n$ unabhängige Zufallsgrößen. Jede von ihnen habe die Verteilungsfunktion F (d.h., die Zufallsgrößen sind identisch verteilt).

a) Berechnen Sie die Verteilungsfunktionen der Zufallsgrößen $\max\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ und $\min\{X_1, X_2, ..., X_n\}$.

b) Bestimmen Sie die Verteilungsdichte von Minimum und Maximum für den Fall, dass die Zu- fallsgrößen auf dem Intervall $(0, 1)$ gleichverteilt sind.

Lösungsvorschlag 13:

zu a) – $X_1, ..., X_n$ i.i.d. mit Verteilungsfunktion $F_X(x)$, d.h $F_X(x) = F_{X_1}(x) = ... = F_{X_n}(x) = F_{X_i}(x) = P(X_i \le x)$

$$\begin{aligned}
F_{\max\{X_1,...,X_n\}}(x) &= P(\max\{X_1, ..., X_n\} \le x) \\
&= P(X_1 \le x, ..., X_n \le x) \\
&= \prod_{i=1}^{n} P(X_i \le x) \\
&= \prod_{i=1}^{n} F_X(x) = F_X(x)^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{\min\{X_1,...,X_n\}}(x) &= P(\min\{X_1, ..., X_n\} \le x) \\
&= 1 - P(\min\{X_1, ..., X_n\} > x) \\
&= 1 - P(X_1 > x, ..., X_n > x) \\
&= 1 - \prod_{i=1}^{n} P(X_i > x) \\
&= 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - F_X(x)) = 1 - (1 - F_X(x))^n
\end{aligned}$$

zu b) – $X_i \sim U(0, 1)$ also Verteilungsdichte $F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ x & 0 \le x \le 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$

$$F_{\max\{X_1,...,X_n\}}(x) = F_X(x)^n = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ x^n & 0 \le x \le 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases} \quad \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ n \cdot x^{n-1} & 0 \le x \le 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

$$F_{\min\{X_1,...,X_n\}}(x) = 1 - (1 - F_X(x))^n = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 1 - (1 - x)^n & 0 \le x \le 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases} \quad \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ n \cdot (1 - x)^{n-1} & 0 \le x \le 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

Aufgabe 14:
Zeigen Sie: Wenn X eine Cauchy-verteilte Zufallsgröße ist, dann ist auch die Zufallsgröße $\frac{1}{X}$ Cauchy-verteilt.

Aufgabe 15:
Die Zufallsgröße X sei gleichverteilt auf $(0,1)$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass X einen Wert annimmt, bei dem

a) die erste Dezimalstelle eine 1 ist?

b) die zweite Dezimalstelle eine 5 ist?

c) die erste Dezimalstelle der Quadratwurzel eine 3 ist?

Lösungsvorschlag 15:

- $X \sim U(0,1)$
- Ereignis: A ... erste Dezimalstelle ist eine '1'
- Ereignis: B ... die zweite Dezimalstelle ist eine '5'
- Ereignis: C ... die erste Dezimalstelle der Quadratwurzel ist eine '3'

$$P(A) = P(X \leq 0.2) - P(X \leq 0.1) = F_X(0.2) - F_X(0.1) = 0.2 - 0.1 = 0.1$$
$$P(B) = (P(X \leq 0.06) - P(X \leq 0.05)) \cdot 10 = 0.1$$
$$P(C) = P(\sqrt{X} \in [0.3, 0.4) = P(0.3 \leq \sqrt{X} < 0.4) = P(0.09 \leq X < 0.16) = \int\limits_{0.09}^{0.16} f(t)\mathrm{d}t = 0.07$$

Aufgabe 16:
Die Zufallsgröße X sei gleichverteilt auf dem Intervall $(0,1)$, d.h. $X \sim U(0,1)$. Berechnen Sie Verteilungsfunktionen und Verteilungsdichten folgender Zufallsgrößen: $1-X$, $X-1$, X^2, $\frac{1}{X}$, $-2\ln X$.

Lösungsvorschlag 16:

- $F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x \geq 1 \end{cases}$

$$F_{1-X}(x) = P(1-X \leq x) = P(1-x \leq X) = 1 - P(X \leq 1-x) = 1 - F_X(1-x) = 1 - \begin{cases} 0 & x \leq -1 \\ 1-x & -1 \leq x \leq 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

$$= \underline{\begin{cases} 1 & x \geq 1 \\ x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}} \quad \Rightarrow f(x) = \underline{\begin{cases} 0 & x \geq 1 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}} \quad \sim U(0,1)$$

$$F_{X-1}(x) = P(X-1 \leq x) = P(X \leq 1+x) = F_X(1+x) = \underline{\begin{cases} 0 & x \leq -1 \\ 1+x & -1 \leq x \leq 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}} \quad \Rightarrow f(x) = \underline{\begin{cases} 0 & x \leq -1 \\ 1 & -1 \leq x \leq 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases}} \quad \sim U(-1,0)$$

$$F_{X^2}(x) = P(X^2 \leq x) = P(X \leq \sqrt{x}) = F_X(\sqrt{x}) = \underline{\begin{cases} 0 & \sqrt{x} \leq 0 \\ \sqrt{x} & 0 \leq \sqrt{x} \leq 1 \\ 1 & \sqrt{x} \geq 1 \end{cases}} \quad \Rightarrow f(x) = \underline{\begin{cases} 0 & \sqrt{x} \leq 0 \\ \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} & 0 \leq \sqrt{x} \leq 1 \\ 0 & \sqrt{x} \geq 1 \end{cases}}$$

Aufgabe 17:
Die Verteilung einer Zufallsgröße X heißt logarithmische Normalverteilung (oder Lognormalvertei- lung), wenn $\ln X$ normalverteilt ist. Bestimmen Sie die Dichtefunktionen aller Lognormalverteilun- gen.

Lösungsvorschlag 17:

- X logarithmisch normalverteilt, wenn $\ln X \sim \mathcal{N}_{\mu.\sigma^2}, \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$
- $Y = \ln X \to X = e^Y > 0$ also $P(X > 0) = 1 \to F_{\ln X}(x) = f(x) = 0$ für $x \leq 0$

$$\begin{aligned} P(X \leq x) &= P(\ln X \leq \ln x) = F_{\ln X}(\ln x) \\ &= \int\limits_{-\infty}^{\ln x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}t \quad \text{Substitution: } \ln s = t \Rightarrow s = e^t,\ \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}s}{s} \\ &= \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma s} \cdot e^{-\frac{(\ln s-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}s \Rightarrow \underline{f(s) = \begin{cases} 0 & s \leq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma s} \cdot e^{-\frac{(\ln s-\mu)^2}{2\sigma^2}} & s > 0 \end{cases}} \end{aligned}$$

Aufgabe 18:
Bei einem Fernseh-Gewinnspiel gibt es folgende Konstellation: Es sind drei geschlossene Türen aufgebaut, und hinter genau einer dieser Türen steht ein Preis ('Ziege'). Ein Kandidat, der den Preis gewinnen möchte, aber natürlich die richtige Tür nicht kennt, kann eine Tür auswählen, die aber zunächst nicht geöffnet wird. Daraufhin stellt sich der Quizmaster (der die richtige Tür kennt), vor eine andere Tür und erklärt wahrheitsgemäß, dass der Preis nicht dahinter steht. Nun kann der Kandidat sich entscheiden: Er kann die Tür öffnen, vor der er bereits steht, oder er kann noch einmal wechseln und die andere Tür öffnen, vor der weder er steht noch der Quizmaster. Der Kandidat bekommt den Preis, wenn er die richtige Tür öffnet. Was ist für den Kandidaten die bessere Strategie: Die Tür noch einmal zu wechseln oder die anfangs gewählte Tür zu öffnen?

Lösungsvorschlag 18:

- Wahrscheinlichkeitsraum: $[\{Z, N_1, N_2\}, \wp(\{Z, N_1, N_2\}), P]$ P ist Gleichverteilung auf Ω mit $P(\{\omega\}) = \frac{1}{3}$
- Ereignis: A ... Spieler gewinnt mit Strategie 'nicht-wechseln'
- Ereignis: B ... Spieler gewinnt mit Strategie 'wechseln'

$$P(A) = \frac{1}{3} \quad P(B) = \frac{2}{3}$$

Aufgabe 19:
Aus einem gut durchmischten Teig, der genau 100 Rosinen enthält, wird ein Kuchen gebacken, der in 20 Stücke gleicher Größe zerschnitten wird. Unter der Annahme, dass die Orte der als punktförmig vorgestellten Rosinen voneiander unabhängig und jeweils gleichverteilt im gesamten Kuchenvolumen sind, soll die Wahrscheinlichkeit berechnet werden, dass ein zufällig ausgewähltes Stück Kuchen genau 5 Rosinen enthält.

Lösungsvorschlag 19:

- Zufallsgröße X ... Anzahl der Rosinen im Stück, Zufallsgröße $X_i = \begin{cases} 0 & \text{i-te Rosine nicht im Stück} \\ 1 & \text{i-te Rosine im Stück} \end{cases}$
- $i = 1, ...100$, $P(X_i = 1) = 1 - P(X_i = 0) = \frac{1}{20}$ nun $X = \sum\limits_{i=1}^{100} X_i$
- X binomialverteilt mit Parameter $n = 100$, $p = 0.05$; $X \sim B_{n,p}$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{100}{5} \left(\frac{1}{20}\right)^5 \left(\frac{19}{20}\right)^{95} \approx 0.18$$

Aufgabe 20:
Die Zufallsgröße X sei normalverteilt mit dem Mittelwert μ und der Varianz σ^2 . Berechnen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten:

a) $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$

b) $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma)$

c) $P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma)$

Lösungsvorschlag 20:

$$P(\underbrace{\mu - \lambda \cdot \sigma < X < \mu + \lambda \cdot \sigma}_{A}) = F_X(\mu + \lambda \cdot \sigma) - F_X(\mu - \lambda \cdot \sigma)$$
$$= \Phi\left(\frac{\mu + \lambda \cdot \sigma - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\mu - \lambda \cdot \sigma - \mu}{\sigma}\right) = \Phi(\lambda) - \Phi(-\lambda)$$
$$= \Phi(\lambda) - (1 - \Phi(\lambda)) = \underline{2\Phi(\lambda) - 1}$$

$$P(A(\lambda = 1)) \approx 0.683$$
$$P(A(\lambda = 2)) \approx 0.955$$
$$P(A(\lambda = 3)) \approx 0.997$$
$$P(A(\lambda = 4)) \approx 1$$

Aufgabe 21:
Es sei X eine normalverteilte Zufallsgröße mit dem Erwartungswert $\mu = 3$ und der Varianz $\sigma^2 = 4$. Bestimmen Sie mit Hilfe einer Tabelle der Stadardnormalverteilung

a) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass X im Intervall $(-1, 2)$ liegt

b) ein Intervall endlicher Länge, in dem X mit Wahrscheinlichkeit 0.95 liegt

c) die Zahl c, für die gilt, dass X mit Wahrscheinlichkeit 0.8 in (c, ∞) liegt

d) Geben Sie mit Hilfe der Verteilungsfunktion Φ der Standard-Normalverteilung eine Formel für den Wert a an, für den gilt, dass $P(\mu - a\sigma < X < \mu + a\sigma) = 1 - \alpha, \alpha \in (0, 1)$. Welcher Wert a ergibt sich für $\alpha = 0.05$?

Lösungsvorschlag 21:

- $X \sim \mathcal{N}_{\mu,\sigma^2}, \mu = 3, \sigma^2 = 4, \sigma = 2$

a)

$$P(X \in [-1, 2]) = P(-1 \leq X \leq 2) = F_X(2) - F_X(-1) = \Phi\left(\frac{2-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-1-\mu}{\sigma}\right)$$
$$= \Phi(-0.5) - \Phi(2) = 0.3085 - 0.0228 = 0.2857$$

b)

$$P(X \in [\mu - c, \mu + c]) = P(\mu - c \leq X \leq \mu + c) = F - X(\mu + c) - F_X(\mu - c)$$
$$= \Phi\left(\frac{3 + c - 3}{2}\right) - \Phi\left(\frac{3 - c - 3}{2}\right) = 2\Phi\left(\frac{c}{2}\right) - 1 \overset{!}{=} 0.95$$
$$\Rightarrow c = 2 \cdot \Phi^{-1}(0.975) = 3.92$$

c)

d)

$$P(\mu - a\sigma < X < \mu + a\sigma) = 2\Phi(a) - 1 = 1 - \alpha \Rightarrow a = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \overset{\alpha=0.05}{\approx} 1.96$$

Aufgabe 22:
Eine Fluggesellschaft hat die langjährige Erfahrung gemacht, dass nur 95% der Gesamtzahl der Personen, die sich einen Platz reservieren ließen, zum Abflug erschienen. Deshalb verkauft die Gesellschaft für ein Flugzeug, das 95 Plätze hat, 100 Tickets. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle Personen, die zu einem bestimmten Abflug erscheinen, einen Platz bekommen? Bestimmen Sie sowohl die exakte Lösung (unter der Annahme, dass alle Ticket-Inhaber ihre Entscheidungen unabhängig voneinander und mit der gleichen Wahrscheinlichkeit treffen) als auch eine Näherungslösung mit Hilfe des Poissonschen Grenzwertsatzes.

Aufgabe 23:
Bestmmen Sie die Verteilung des Minimums von n i.i.d. exponentialverteilten Zufallsgrößen.

Lösungsvorschlag 23:

Aufgabe 24:

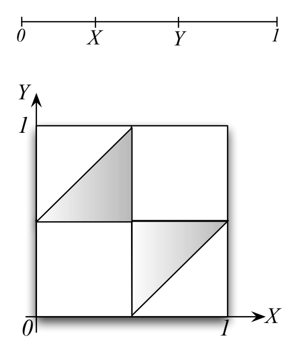
Aufgabe 25:

Aufgabe 26:
Ein Stab der Länge 1 werde an zwei Stellen zerbrochen. Dabei seien die Koordinaten der Bruch- stellen unabhängig voneinander und jeweils gleichverteilt auf dem Intervall $(0,1)$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass aus den drei Bruchstücken ein Dreieck zusammengelegt werden kann?

Lösungsvorschlag 26:

- Koordinaten der zwei Bruchstellen sind $X, Y \sim U(0,1)$
- damit Ereignis: A ... 'Dreieck kann gelegt werden' eintritt, müssen zwei Seiten je länger sein als die Dritte

$$X + (Y - X) > 1 - Y \Rightarrow Y > \frac{1}{2}$$
$$(Y - X) + (1 - Y) > X \Rightarrow X < \frac{1}{2}$$
$$(1 - Y) + X > (Y - X \Rightarrow X + \frac{1}{2} > Y$$



- die Skizze im Parameterraum führt zum Ergebnis

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

Aufgabe 27:
Für das zweimalige Würfeln mit einem Würfel bezeichne die Zufallsgröße X_{min} das Minimum der beiden Augenzahlen und die Zufallsgröße X_{max} das Maximum. Geben Sie das gemeinsame Vertei- lungsgesetz und die Randverteilungen des zufälligen Vektors (X_{min}, X_{max}) an.

Lösungsvorschlag 26:

$X_{min} \backslash X_{max}$	1	2	3	4	5	6	
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{11}{36}$
2	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{4}$
3	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{7}{36}$
4	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{5}{36}$
5	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{12}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{36}$	

Aufgabe 28:
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem Flugzeug auf einer bestimmten Strecke ein Motor ausfällt, sei p. Bei mehrmotorigen Flugzeugen wird angenommen, dass die Motoren unabhängig voneinander ausfallen. Ein Flugzeug ist flugfähig, wenn wenigstens die Hälfte seiner Motoren arbeitet. Für welche Werte von p ist ein zweimotoriges Flugzeug einem viermotorigen vorzuziehen?

Lösungsvorschlag 28:

- neue Zufallsgröße $X_i = \begin{cases} 1 & \text{i-ter Motor kaputt} \\ 0 & \text{i-ter Motar ganz} \end{cases}$, nun Anzahl der kaputten Motoren $X = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i \sim B_{n,p}$
- Ereignis: A ... zweimotorige Maschine ist noch flugfähig

$$\begin{aligned} P(A) &= P(X \leq \frac{n}{2}) = P(X=0) + P(X=1) = \binom{2}{0} p^0 (1-p)^2 + \binom{2}{1} p^1 (1-p) \\ &= (1-p)^2 + 2p(1-p) = (1-p)(1+p) = 1-p^2 \end{aligned}$$

- Ereignis: B ... viermotorige Maschine ist noch flugfähig

$$\begin{aligned} P(B) &= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = \binom{4}{0} p^0 (1-p)^4 + \binom{4}{1} p^1 (1-p)^3 + \binom{4}{2} p^2 (1-p)^2 \\ &= (1-p)^4 + 4p(1-p)^3 + 6p^2(1-p)^2 \end{aligned}$$

- wann ist ein zweimotoriges Flugzeug einem viermotorigen Flugzeug vorzuziehen?

$$\begin{gathered} P(A) \geq P(B) \\ (1-p)(1+p) \geq (1-p)(1-p)(1+2p+3p^2) \Rightarrow p = 1 \\ \dots \\ 0 \geq p(1-3p) \Rightarrow p = 0, p = \frac{1}{3} \end{gathered}$$

- für $p \geq \frac{1}{3}$ ist eine zweimotorige Maschine vorzuziehen

Aufgabe 29:
Es sei (X, Y) ein stetiger zufälliger Vektor. Bestimmen Sie Verteilungsdichten für das Produkt $X \cdot Y$ und den Quotienten X/Y . Welche Formeln ergeben sich, wenn X und Y unabhängig sind?

Lösungsvorschlag 29:

$$\begin{aligned} F_{X \cdot Y}(x) &= P(X \cdot Y \leq x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} 1_{(-\infty,x]}(t_1 \cdot t_2) f_{\underline{X}}(t_1, t_2) \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2 \quad \text{Substitution: } s = t_1 \cdot t_2,\ \mathrm{d}s = t_2 \mathrm{d}t_1 \\ &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} 1_{(-\infty,x]}(s) f_{\underline{X}}\left(\frac{s}{t_2}, t_2\right) \frac{1}{|t_2|} \mathrm{d}t_2 \mathrm{d}s \Rightarrow X \cdot Y \text{ hat Verteilungsdichte} \quad f_{X \cdot Y}(s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\underline{X}}\left(\frac{s}{t}, t\right) \frac{1}{|t|} \mathrm{d}t \\ &\text{sind } X \text{ und } Y \text{ unabhängig gilt } f_{X \cdot Y}(s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X\left(\frac{s}{t}\right) f_Y(t) \frac{1}{|t|} \mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{\frac{X}{Y}}(x) &= P\left(\frac{X}{Y} \leq x\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} 1_{(-\infty,x]}\left(\frac{t_1}{t_2}\right) f_{\underline{X}}(t_1, t_2) \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2 \quad \text{Substitution: } s = \frac{t_1}{t_2},\ \mathrm{d}s = \frac{1}{t_2} \mathrm{d}t_1 \\ &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} 1_{(-\infty,x]}(s)\, f_{\underline{X}}(s \cdot t_2, t_2) \cdot |t_2| \mathrm{d}t_2 \mathrm{d}s \Rightarrow \frac{X}{Y} \text{ hat die Verteilungsdichte} f_{\frac{X}{Y}}(s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\underline{X}}(s \cdot t, t) \cdot |t| \mathrm{d}t \\ &\text{sind } X \text{ und } Y \text{ unabhängig gilt } f_{\frac{X}{Y}}(s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(s \cdot t) f_Y(t) |t| \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Aufgabe 30:
Die Zufallsgrößen X_1, X_2 seien unabhängig und identisch gleichverteilt auf dem Intervall $(0,1)$. Berechnen Sie Verteilungsdichten der Zufallsgrößen $X_1 + X_2$ und $X_1 - X_2$.

Aufgabe 31:
Die Zufallsgrößen $X_1, ..., X_n$ seien unabhängig und identisch standardnormalverteilt.

a) Bestimmen Sie eine Verteilungsdichte der Zufallsgröße X_1^2. Zu welcher Familie von Verteilungen gehört die Verteilung von X_1^2?

b) Bestimmen Sie eine Verteilungsdichte der Zufallsgröße $S^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$. (Das Verteilungsgesetz dieser Summe von Quadraten heißt Chi-Quadrat-Verteilung mit n Freiheitsgraden.)

c) Bestimmen Sie eine Verteilungsdichte der Zufallsgröße $\sqrt{S^2}$. (Für $n = 3$ wird das Verteilungsgesetz dieser Zufal lsgröße als Maxwell-Verteilung bezeichnet.)

Lösungsvorschlag 31:

- $X_1, ..., X_n \sim \mathcal{N}_{0,1}$, Standardnormalverteilung $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$
- Gamma-Verteilung mit Parameter $a, b > 0$ $f_X(x) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-bx} 1_{(0,\infty)}(x)$

a)

$$F_{X_1^2}(x) = P(X_1^2 \leq x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ P(|X_1| \leq \sqrt{x}) & x > 0 \end{cases}$$

$$\stackrel{x \geq 0}{=} P(-\sqrt{x} \leq X_1 \leq \sqrt{x}) = P(X_1 \in [-\sqrt{x}, 0]) + P(X_1 \in [0, \sqrt{x}])$$

$$= \int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t + \int_{-\sqrt{x}}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t \quad \text{Substitution: } u = t^2,\ t = \sqrt{u},\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{u}} \mathrm{d}u$$

$$= \int_0^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi u}} e^{-\frac{u}{2}} \mathrm{d}u \Rightarrow f_{X^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2}} \sim \Gamma_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$$

b) – sind X_1 und X_2 unabhängige Zufallsgrößen und $X_i \sim \Gamma_{a_i,b},\ a_1, a_2, b > 0$ dann gilt $X_1 + X_2 \sim \Gamma_{a_1+a_2,b}$

$$S^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \Gamma_{\frac{n}{2},\frac{1}{2}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\left(\frac{n}{2}-1\right)} e^{-\frac{x}{2}} 1_{(0,\infty)}(x)$$

c)

$$F_{\sqrt{S^2}}(x) = P(\sqrt{S^2} \leq x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ P(S^2 \leq x^2) & x > 0 \end{cases}$$

$$\stackrel{x \geq 0}{=} P(S^2 \leq x^2) = F_{S^2}(x^2) \Rightarrow f_{\sqrt{S^2}}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{S^2}(x^2) = f_{S^2}(x^2) \cdot 2x$$

$$\Rightarrow f_{\sqrt{S^2}}(x) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\left(\frac{n}{2}-1\right)} e^{-\frac{x^2}{2}} 1_{(0,\infty)}(x) \cdot 2x = \underline{\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} 2x^{(n-1)} e^{-\frac{x^2}{2}} 1_{(0,\infty)}(x)}$$

– $n = 3$ Maxwell-Verteilung, $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{2}\Gamma(1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$$f_{\sqrt{S^2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} u^2 e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Aufgabe 32:
Die Zufallsgrößen X und Y seien unabhängig und identisch standard-normalverteilt. Bestimmen Sie die Verteilung des Quotienten X/Y .

Lösungsvorschlag 32:

- $X,Y \sim \mathcal{N}_{0,1}$ i.i.d., $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ nutzen Resultat aus Aufgabe 29

$$\begin{aligned}
f_{\frac{X}{Y}}(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(s\cdot t)f_Y(t)|t|\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|t|e^{-\frac{(s\cdot t)^2}{2}}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[-\int_{-\infty}^{0} t\cdot e^{-\frac{t^2}{2}(s^2+1)}\mathrm{d}t + \int_{0}^{\infty} t\cdot e^{-\frac{t^2}{2}(s^2+1)}\mathrm{d}t\right] \quad \text{Substitution: } u^2 = \frac{t^2}{2}(s^2+1) \\
&= \frac{1}{\pi}\frac{2}{1+s^2}\int_0^{\infty}\underbrace{u\cdot e^{-u^2}}_{-\frac{e^{-x^2}}{2}}\mathrm{d}u = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+s^2} \quad \text{Standard-Cauchy-Verteilung}
\end{aligned}$$

Aufgabe 33:
Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsgröße X , falls dieser existiert, wenn

a) X auf dem Intervall $(0,1)$ gleichverteilt ist,

b) X auf dem Intervall (a,b), $-\infty < a < b < \infty$, gleichverteilt ist (verwenden Sie zur Vereinfachung der Rechnung möglichst das Resultat aus a)),

c) X Cauchy-verteilt ist,

d) X geometrisch verteilt ist mit dem Parameter $p \in (0,1)$.

e) X gammaverteilt ist mit den Parametern (a,b), $a>0$, $b>0$.

Lösungsvorschlag 33:

a) $X \sim U(0,1)$

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot 1_{(0,1)}(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

b) $X \sim U(a,b)$, es sei $Y \sim U(0,1)$ dann sei $X = (b-a)Y + a$

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}((b-a)Y+a) = (b-a)\mathbb{E}Y + a = \frac{b-a}{2} + a = \frac{a+b}{2}$$

c) $X \sim$ Cauchyverteielt, Prüfung auf Existenz des Erwartungswertes

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x|\cdot f_X(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}|x|\frac{1}{\pi}\frac{1}{(1+x^2)} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}(1+x^2)\Big|_0^{\infty} = \infty \quad \mathbb{E}X \text{ existiert nicht}$$

d) $X \sim$ geometrische Verteilung, $p \in (0,1)$, $P(X=k) = (1-p)^k\cdot p$, $k = 0,1,2,...$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X &= \sum_{k=0}^{\infty}k(1-p)^k p = p\cdot(1-p)\sum_{k=0}^{\infty}k(1-p)^{k-1}\cdot p \quad \text{Substitution: } q = 1-p \\
&= p\cdot(1-p)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}q^k = p\cdot(1-p)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\sum_{k=0}^{\infty}q^k = p\cdot(1-p)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\frac{1}{1-q} \\
&= p(1-p)\frac{1}{(1-q)^2} = p(1-p)\frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p} = \frac{1}{p} - 1
\end{aligned}$$

Aufgabe 34:
Es seien $X_1, ..., X_n$ i.i.d. Zufallsgrößen, deren Varianzen existieren und endlich sind.

a) Drücken Sie Erwartungswert und Varianz des arithmetischen Mittels $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ durch die entsprechenden Parameter von X_1 aus.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsgröße $\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$

Lösungsvorschlag 34:

a)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\overline{X} &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}X_1 = \mathbb{E}X_1 \\
\mathrm{var}\overline{X} &= \mathrm{var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{var}X_1 = \frac{\mathrm{var}X_1}{n}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\tilde{\sigma}^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i - \overline{X})^2 = \mathbb{E}(X_i^2 - 2X_i\overline{X} + \overline{X}^2) \\
&= \mathbb{E}X_i^2 + \mathbb{E}\overline{X}^2 - \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}(X_iX_j) = \mathbb{E}X_i^2 + \mathbb{E}\overline{X}^2 - \frac{2}{n}\left[\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\mathbb{E}X_i\mathbb{E}X_j + \mathbb{E}(X_i)^2\right] \quad \text{(da für } i\neq j \text{ unabhängig)} \\
&= \mathbb{E}(X_i)^2 + \mathbb{E}\overline{X}^2 - \frac{2(n-1)}{n}(\mathbb{E}X_1)^2 - \frac{2}{n}\mathbb{E}(X_i)^2 \\
&= \frac{n-2}{n}\underbrace{\mathbb{E}(X_i)^2}_{\mathrm{var}X_1 + (\mathbb{E}X_1)^2} + \underbrace{\mathbb{E}(\overline{X})^2}_{\frac{\mathrm{var}X_1}{n} + (\mathbb{E}X_1)^2} + \frac{2(1-n)}{n}(\mathbb{E}X_1)^2 \\
&= \frac{n-2}{n}(\mathrm{var}X_1 + (\mathbb{E}X_1)^2) + \frac{\mathrm{var}X_1}{n} + (\mathbb{E}X_1)^2 + \frac{2}{n}(\mathbb{E}X_1)^2 - 2(\mathbb{E}X_1)^2 \\
&= \underline{\frac{n-1}{n}\mathrm{var}X_1}
\end{aligned}$$

Aufgabe 35:
Es seien X eine Zufallsgröße und $k \in \mathbb{N}$ mit $\mathbb{E}|X|^k < \infty$. Zeigen Sie (für die beiden Fälle, dass X diskret oder stetig ist), dass dann $\mathbb{E}|X|^l < \infty$ für alle $l \in \mathbb{N}$, $l < k$.

Lösungsvorschlag 35:

- X Zufallsgröße, $k, l \in \mathbb{N},\ l < k$; zu zeigen: wenn $\mathbb{E}|X|^k < \infty$ dann auch $\mathbb{E}|X|^l < \infty$
- $|X|^l \leq \begin{cases} 1, & \text{falls } |X| < 1 \\ |X|^k, & \text{falls} |X| \geq 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 1 - F_{|X|^l}(x) = P(|X|^l > x) \leq \begin{cases} 1, & \text{für } x \leq 1 \\ 1 - F_{|X|^k}(x), & \text{für } x > 1 \end{cases}$

$$\mathbb{E}|X|^l = \int_0^\infty 1 - F_{|X|^l}(x)\mathrm{d}x \leq \int_0^1 1\mathrm{d}x \int_1^\infty 1 - F_{|X|^k}(x)\mathrm{d}x \leq 1 + \int_0^\infty 1 - F_{|X|^k}(x)\mathrm{d}x = 1 + \mathbb{E}|X|^k < \infty$$

Aufgabe 36:
Berechnen Sie die Varianzen, sofern diese existieren, für die Zufallsgrößen aus Aufgabe 33 und außerdem die Varianzen binomialverteilter und exponentialverteilter Zufallsgrößen.

Lösungsvorschlag 36:

- $X \sim U(0,1)$

$$\mathrm{var}X = \mathbb{E}((X-\mathbb{E}X)^2) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot 1_{(0,1)} \mathrm{d}x - \frac{1}{4} = \frac{x^3}{3}\bigg|_0^1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

- $X \sim U(a,b),\ f(x) = \frac{1}{b-a} 1_{[a,b]}(x)$

$$\mathrm{var}X = \mathbb{E}((X-\mathbb{E}X)^2) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot 1_{[a,b]}(x) \mathrm{d}x - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$= \int\limits_a^b x^2 \mathrm{d}x - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{x^3}{3}\bigg|_a^b - \frac{(a+b)^2}{}$$