ARBEITSBLÄTTER

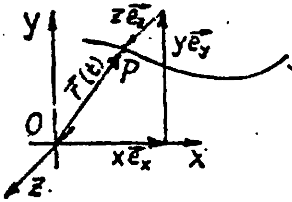
TECHNISCHE MECHANIK

Kinematik / Kinetik / Schwingung

Institut für Materialwissenschaft und Werkstofftechnologie Professur Angewandte Mechanik	**Arbeitsblätter** Kinematik / Kinetik / Schwingung

1. Koordinatensysteme und Einheitsvektoren

1.1. Kartesische Koordinaten:



räumliche Bahnkurve

Einheitsvektoren: $\vec e_x$, $\vec e_y$, $\vec e_z$

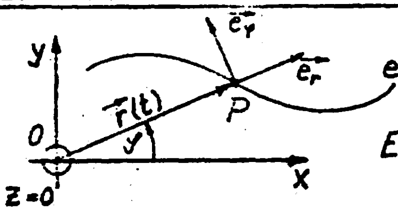
Ortsvektor : $\vec r(t)=x(t)\vec e_x+y(t)\vec e_y+z(t)\vec e_z$

Geschwindigkeitsvektor: $\dot{\vec r}(t)=\dot x\vec e_x+\dot y\vec e_y+\dot z\vec e_z$

Beschleunigungsvektor: $\ddot{\vec r}(t)=\ddot x\vec e_x+\ddot y\vec e_y+\ddot z\vec e_z$

Man beachte: $\dot{\vec e}_x\equiv\dot{\vec e}_y\equiv\dot{\vec e}_z\equiv\vec 0$, weil $\vec e_x$, $\vec e_y$ und $\vec e_z$ richtungskonstant.

1.2. Ebene Polarkoordinaten:



ebene Bahnkurve

Einheitsvektoren: $\vec e_r$, $\vec e_\varphi$

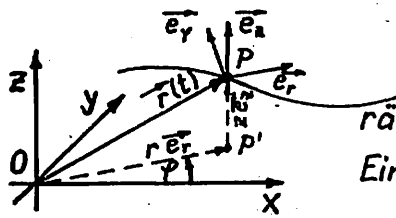
Ortsvektor : $\vec r(t)=r(t)\vec e_r(t)$

Geschwindigkeitsvektc. : $\dot{\vec r}(t)=\dot r\vec e_r+r\dot\varphi\vec e_\varphi$

Beschleunigungsvektor : $\ddot{\vec r}(t)=(\ddot r-r\dot\varphi^2)\vec e_r+$
$+(r\ddot\varphi+2\dot r\dot\varphi)\vec e_\varphi$

Man beachte: $\dot{\vec e}_r=\dot\varphi\vec e_\varphi$ und $\dot{\vec e}_\varphi=-\dot\varphi\vec e_r$, weil $\vec e_r$ und $\vec e_\varphi$ richtungsveränderlich.

1.3. Zylinderkoordinaten:



räumliche Bahnkurve

Einheitsvektoren: $\vec{e_r}, \vec{e_\varphi}, \vec{e_z}$

Ortsvektor : $\vec{r}(t) = r(t)\vec{e_r}(t) + z\vec{e_z}$

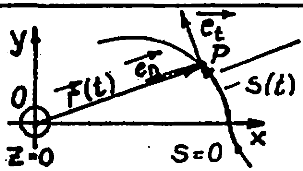
Geschwindigkeitsvektor: $\dot{\vec{r}}(t) = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\varphi}\vec{e_\varphi} + \dot{z}\vec{e_z}$

Beschleunigungsvektor: $\ddot{\vec{r}}(t) = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e_r} +$

$+ (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\vec{e_\varphi} + \ddot{z}\vec{e_z}$

Man beachte: $\dot{\vec{e_r}} = \dot{\varphi}\vec{e_\varphi}$; $\dot{\vec{e_\varphi}} = -\dot{\varphi}\vec{e_r}$; $\dot{\vec{e_z}} = \vec{0}$, weil $\vec{e_r}$ und $\vec{e_\varphi}$ richtungsveränderlich und $\vec{e_z}$ richtungs-konstant.

1.4. Ebene natürliche Koordinaten:



ebene Bahnkurve

Einheitsvektoren: $\vec{e_t}, \vec{e_n}$

$s(t) \triangleq$ Bogenlänge (natürliche Koordinate)

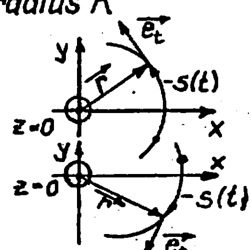
Ortsvektor : $\vec{r}(t) = \vec{r}(s(t))$

Geschwindigkeitsvektor: $\dot{\vec{r}}(t) = \dot{s}\vec{e_t}$

Beschleunigungsvektor: $\ddot{\vec{r}}(t) = \ddot{s}\vec{e_t} + \varkappa\dot{s}^2\vec{e_n}$

Man beachte: $\dot{\vec{e_t}} = \varkappa\dot{s}\vec{e_n}$, weil $\vec{e_t}$ richtungsveränderlich.

$\varkappa = \frac{1}{R}$ = Krümmung mit Krümmungsradius R



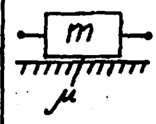
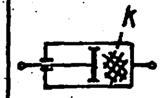
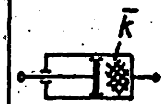
$\varkappa > 0$, wenn Bahnkurve linkswendig

$\varkappa < 0$, wenn Bahnkurve rechtswendig

Für die Kreisbahn gilt:

$s(t) = R\,\varphi(t)$; $\dot{s}(t) = R\dot{\varphi}(t)$; $\ddot{s}(t) = R\ddot{\varphi}(t)$

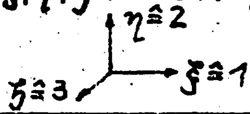
2. Bewegungswiderstände

Art Reibung	Ursache	Richtung d. Reibkraft	Betrag der Reibkraft	Reibungskoeffizient abhängig von	Formulierung der Reibkraft	Symbol
fester Körper – fester Körper Gleitreibung Coulomsche Reibung	Oberflächenbeschaffenheit der Berührungsflächen		$\lvert\vec F_R\rvert = F_R = \mu F_N$	Material der Reibflächen; Schmierung; Bei großen Geschwindigk. $\mu = \mu(\dot{\vec r}, F_N)$	$\vec F_R = -\mu F_N \frac{\dot{\vec r}}{\lvert\dot{\vec r}\rvert}$ für $\dot{\vec r} = \dot x \vec e_x$ $\vec F_R = -\mu F_N \frac{\dot x}{\lvert\dot x\rvert}\vec e_x$ $\frac{\dot x}{\lvert\dot x\rvert} = \operatorname{sgn}\dot x$	
fester Körper – flüssige oder gasförmige Medien Stokesche Reibung	vordringlich: Reibung zwischen festem Körper und Medium; Bewegungsenergie in Wärme umgewandelt $v \leq 1 ms^{-1}$	entgegen der Richtung der relativen Geschwindigkeit $\vec F_R^0 = -\frac{\dot{\vec r}}{\lvert\dot{\vec r}\rvert}$	$\lvert\vec F_R\rvert = F_R = k\lvert\dot{\vec r}\rvert$	Gestalt des festen Körpers; Art des Mediums	$\vec F_R = -k\dot{\vec r}$	
fester Körper – flüssige oder gasförmige Medien Newtonsche Reibung	vordringlich: Teile des Mediums vom Körper mitgerissen; Bewegungsenergie des Körpers in Bewegungsenergie der Teilchen des Mediums $v > 1 ms^{-1}$		$\lvert\vec F_R\rvert = F_R = \bar k\lvert\dot{\vec r}\rvert^2$	Gestalt des Körpers; Geschwindigkeitsbereich; Art des Mediums; bei Kugel (Radius a, Dichte ϱ) $\bar k = 0{,}25\,\varrho\pi a^2$	$\vec F_R = -\bar k\dot{\vec r}^2\frac{\dot{\vec r}}{\lvert\dot{\vec r}\rvert}$ für $\dot{\vec r} = \dot x \vec e_x$ $\vec F_R = -\bar k\dot x^2 \operatorname{sgn}\dot x\,\vec e_x$	
allgemein			$\lvert\vec F_R\rvert = F_R = k_n\lvert\dot{\vec r}\rvert^n$		$\vec F_R = -k_n\lvert\dot{\vec r}\rvert^n\frac{\dot{\vec r}}{\lvert\dot{\vec r}\rvert}$	

3. Massenträgheitsmomente

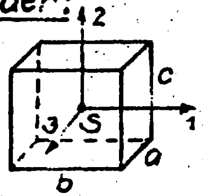
3.1. Allgemeines:

Körper mit körperfestem Koordinatensystem ξ, η, ζ im Schwerpunkt



Massenträgheitsmomente Θ_{S11}, Θ_{S22}, Θ_{S33}

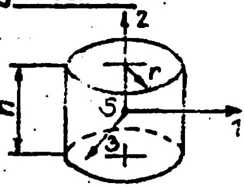
3.2. Quader:



$m = \varrho \cdot a \cdot b \cdot c$

$$\Theta_{S11} = \frac{1}{12} m (a^2 + c^2)$$
$$\Theta_{S22} = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)$$
$$\Theta_{S33} = \frac{1}{12} m (b^2 + c^2)$$

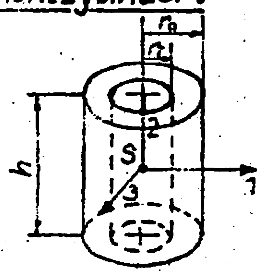
3.3. Zylinder:



$m = \varrho \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$

$$\Theta_{S11} = \Theta_{S33} = \frac{m}{12}\left(r^2 + \frac{h^2}{3}\right)$$
$$\Theta_{S22} = \frac{1}{2} m r^2$$

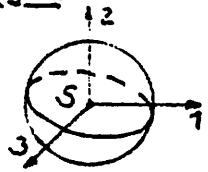
3.4. Hohlzylinder:



$m = \varrho \pi (r_a^2 - r_i^2) h$

$$\Theta_{S11} = \Theta_{S33} = \frac{m}{4}(r_a^2 + r_i^2) + \frac{1}{12} m h^2$$
$$\Theta_{S22} = \frac{m}{2}(r_a^2 + r_i^2)$$

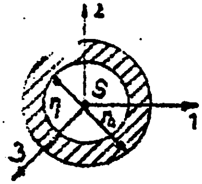
3.5. Kugel:



$m=\varrho\,\frac{4}{3}\pi r^3$

$\Theta_{S11}=\Theta_{S22}=\Theta_{S33}=\frac{2}{5}mr^2$

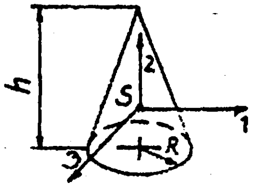
3.6. Hohlkugel:



$m=\varrho\,\frac{4}{3}\pi(r_a^3-\;^3)$

$\Theta_{S11}=\Theta_{S22}=\Theta_{S33}=\frac{2}{5}m\,\frac{r_a^5-r_i^5}{r_a^3-r_i^3}$

3.7. Gerader Kreiskegel:

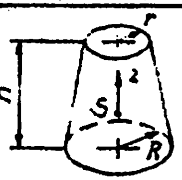


$m=\varrho\pi R\sqrt{R^2+h^2}$

$\Theta_{S11}=\Theta_{S33}=\frac{3}{20}m\left(R^2+\frac{1}{4}h^2\right)$

$\Theta_{S22}=\frac{3}{10}mR^2$

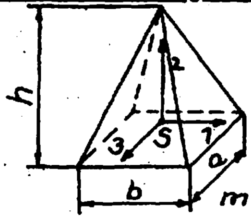
3.8. Abgestumpfter gerader Kreiskegel:



$m=\varrho\frac{\pi h}{3}(R^2+r^2+Rr)$

$\Theta_{S22}=\frac{3}{10}m\,\frac{R^5-r^5}{R^3-r^3}$

3.9. Gerade Pyramide:

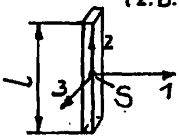


$m = \varrho \frac{abh}{3}$

$$\Theta_{s11} = \frac{1}{80} m (4a^2 + 3h^2)$$
$$\Theta_{s22} = \frac{1}{20} m (a^2 + b^2)$$
$$\Theta_{s33} = \frac{1}{80} m (4b^2 + 3h^2)$$

3.10. Langer, dünner prismatischer Stab:

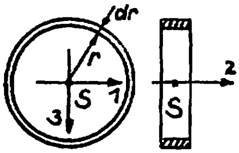
(z.B. Speichen usw.)



$m = \varrho V$

$$\Theta_{s11} = \Theta_{s33} = \frac{1}{12} m l^2$$
$$\Theta_{s22} \approx 0$$

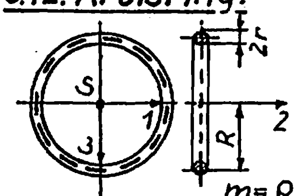
3.11. Sehr dünner Ring (bzw. Punktmasse):



$m = \varrho V$

$$\Theta_{s22} = m r^2$$

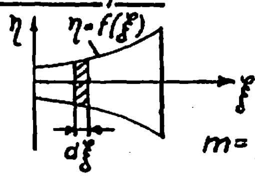
3.12. Kreisring:



$m = \varrho 2\pi^2 R r^2$

$$\Theta_{s11} = \Theta_{s33} = \frac{1}{2} m \left(R^2 + \frac{5}{4} r^2\right)$$
$$\Theta_{s22} = m \left(R^2 + \frac{3}{4} r^2\right)$$

3.13. Beliebiger Rotationskörper:

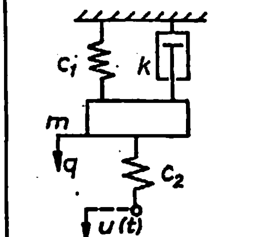
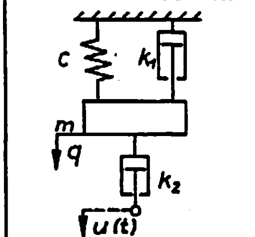
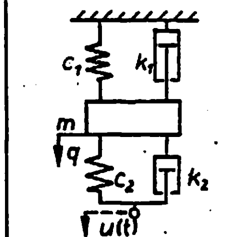
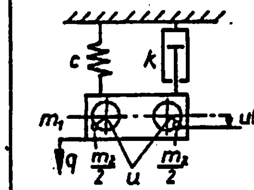
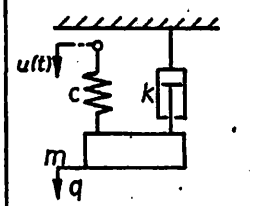
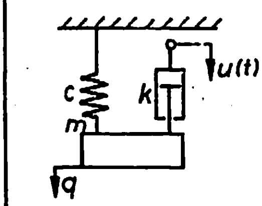
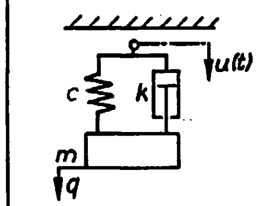
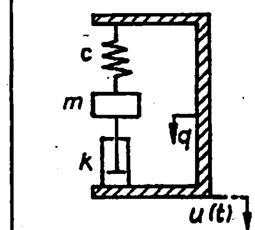
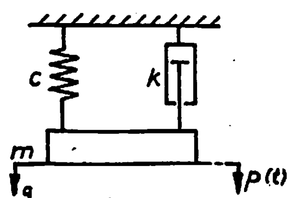


$m = \varrho V$

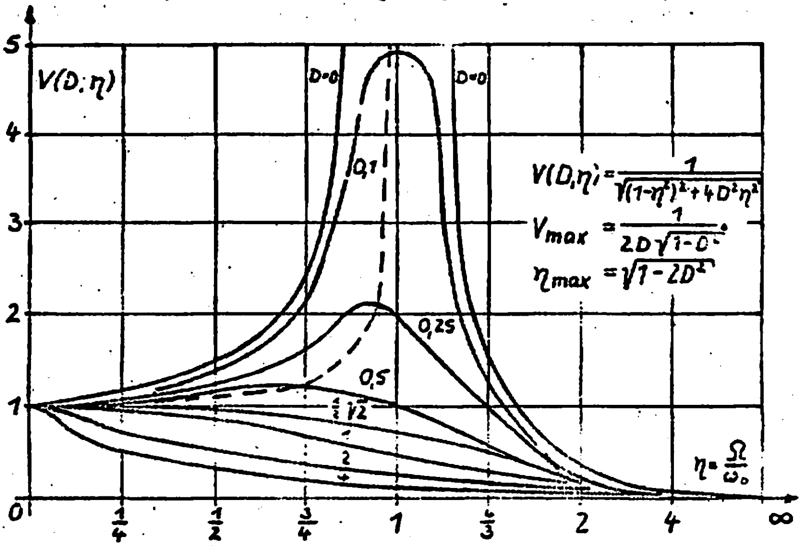
$$\Theta_{s11} = \frac{1}{2} \varrho \pi \int \eta^4 d\xi$$

ϱ = Dichte

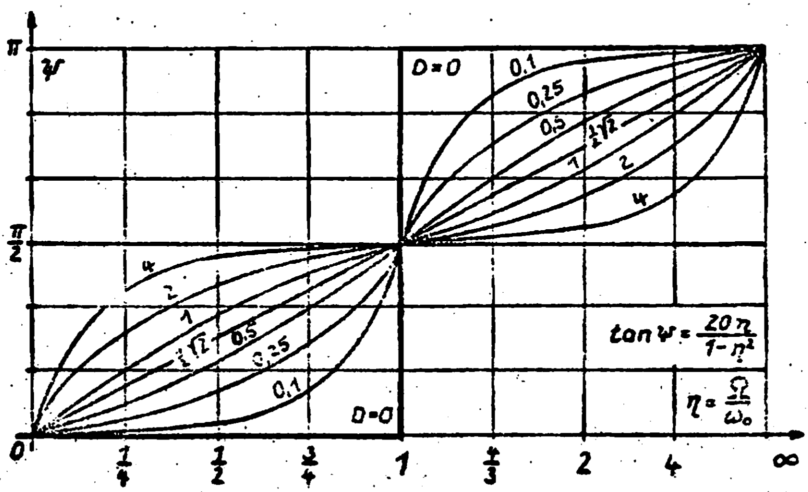
4. Erzwungungene Schwingungen

Arten der Erregung	Federkrafterregung	Dämpfungs-krafterregung	Feder- u. Dämpfungs-krafterregung	Massenkrafterregung
Mittelbar über Zusatzglied	 $m\ddot{q} + k\dot{q} + (c_1 + c_2)q = c_2 u(t)$	 $m\ddot{q} + (k_1 + k_2)\dot{q} + cq = k_2 \cdot \dot{u}(t)$	 $m\ddot{q} + (k_1 + k_2)\dot{q} + (c_1 + c_2)q = k_2 \dot{u}(t) + c_2 u(t)$	 $(m_1 + m_2)\ddot{q} + k\dot{q} + cq = -m_2 \ddot{u}(t)$
Mittelbar ohne Zusatzglied	 $m\ddot{q} + k\dot{q} + cq = cu(t)$	 $m\ddot{q} + k\dot{q} + cq = k\dot{u}(t)$	 $m\ddot{q} + k\dot{q} + cq = k\dot{u}(t) + cu(t)$	 $m\ddot{q} + k\dot{q} + cq = -m\ddot{u}(t)$
Unmittelbar	 $m\ddot{q} + k\dot{q} + cq = p(t)$		Erregerkraft: $p(t) = P \cdot \cos \Omega t$ Zwangs- oder Antriebsbewegung: $u(t) = U \cdot \cos \Omega t$	

5. Vergrößerungsfunktion $V(D;\eta)$ bei Federkrafterregung ohne Zusatzglied



6. Phasenverschiebungswinkel ψ bei Federkrafterregung ohne Zusatzglied



7. Lösungen der Differentialgleichungen (DGL) der Mechanik

7.1. $\ddot{y} = f(t)$

$\dot{y} = \int f(t)\,dt + C_1$

$y = \iint f(t)\,dt\,dt + C_1 t + C_2$ $\qquad C_1, C_2$ = Integrationskonstante

7.2. $\ddot{y} + f(y) = 0$

$\ddot{y}\dot{y} + f(y)\dot{y} = 0 \qquad \dot{y} = \frac{dy}{dt} = v$

$v\,dv + f(y)\,dy = 0$

$\frac{1}{2}v^2 + \int f(y)\,dy = C_1$

$\dot{y}^2 + 2\int f(y)\,dy = 2C_1$

$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 2\left(C_1 - \int f(y)\,dy\right)$

$\frac{dy}{dt} = \sqrt{2\left(C_1 - \int f(y)\,dy\right)}$

$t + C_2 = \int \frac{dy}{\sqrt{2\left(C_1 - \int f(y)\,dy\right)}}$ $\qquad C_1, C_2$ = Integrationskonstante

7.3. $\ddot{y} + \omega_0^2 y = \alpha$ $\qquad \alpha, \omega_0^2$ = Konstante , $\alpha \gtreqless 0$

$y(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t + \frac{\alpha}{\omega_0^2}$

oder $\qquad A, B$ = Integrationskonstante

$y(t) = C\cos(\omega_0 t - \varphi) + \frac{\alpha}{\omega_0^2}$ $\qquad C, \varphi$ = Integrationskonstante

Zwischen den Integrationskonstanten besteht der Zusammenhang: $A = C\cos\varphi$, $B = C\sin\varphi$, $\tan\varphi = \frac{B}{A}$

7.4. $\ddot{y} + \alpha\dot{y} = \beta$ $\qquad \alpha, \beta$ = Konstante

$y(t) = C_1 e^{-\alpha t} + C_2 + \frac{\beta}{\alpha} t$

C_1, C_2 = Integrationskonstante

7.5. $\ddot{y} + \alpha \dot{y}^2 \operatorname{sgn} \dot{y} = \beta$ $\qquad$ α, β = Konstante, $\alpha > 0, \beta > 0$

a) $\dot{y}(t) > 0$; $\operatorname{sgn} \dot{y} = 1$

$$\dot{y}(t) = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \tanh \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} (\alpha t + C) \qquad \text{für } |\dot{y}| < \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$$

$$\dot{y}(t) = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \coth \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} (\alpha t + C) \qquad \text{für } |\dot{y}| > \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$$

b) $\dot{y}(t) < 0$; $\operatorname{sgn} \dot{y} = -1$

$$\dot{y}(t) = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \tan \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} (\alpha t + C) \qquad C = \text{Integrationskonstante}$$

Für $\beta < 0$, $\beta = -\bar{\beta}$, $\bar{\beta} > 0$ ist in den Lösungen β durch $\bar{\beta}$ und $\alpha t + C$ durch $C - \alpha t$ zu ersetzen und die Lösungen von a) sind die von b) und umgekehrt

7.6. $\ddot{y} + \alpha \dot{y}^2 + \beta(\sin y + \alpha \cos y) = 0$

$$\dot{y}^2(t) = Ce^{-2\alpha y} + 2\beta \frac{(1 - 2\alpha^2)\cos y - 3\alpha \sin y}{1 + 4\alpha^2}$$

7.7. $\ddot{y} + \alpha \dot{y} + \omega_0^2 y = 0$ $\qquad$ α, ω_0^2 = Konstante

$$\frac{\alpha}{\omega_0} = 2D$$

a) $D^2 > 1$

$$y(t) = Ce^{-D\omega_0 t} \cosh\left(\sqrt{D^2 - 1}\, \omega_0 t + \varphi\right)$$

b) $D^2 = 1$

$$y(t) = e^{-D\omega_0 t} (C_1 + C_2 t)$$

c) $D^2 < 1$

$$y(t) = Ce^{-D\omega_0 t} \cos\left(\sqrt{1 - D^2}\, \omega_0 t - \varphi\right)$$

C, φ bzw. C_1, C_2 = Integrationskonstante