Zusammenfassung Theoretische Mechanik

Grundlage: Skript von Dirk-Gunnar Welsch

Mario Chemnitz

26. Juli 2007

1 Krummlinige Koordinatensysteme

Definition kovariante Basisvektoren:

$$\vec{g}_i := \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i}$$

Definition kontravariante Basisvektoren:

$$\vec{g}^i := \vec{\nabla} x^i$$

Kronecker-Symbol:

$$\vec{g}_i \cdot \vec{g}^k = \delta_i^k$$

Schreibweise eines beliebigen Vektors $\vec{q}$ in den jeweiligen Koordinaten:

$$\vec{q} = q^k \cdot \vec{g}_k = q_k \cdot \vec{g}^k$$

(mit q^k als kontra- und q_k als kovarinate Komponente von $\vec{q}$)

Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{q}$ und $\vec{p}$

$$\begin{aligned} \vec{q} \cdot \vec{p} &= q_i p^i = q^i p_i \\ \vec{q} \cdot \vec{p} &= g_{ik} q^i p^k = g^{ik} q_i p_k \end{aligned}$$

g_{ik} heißt metrische Fundamentaltensor.
Dieser sieht für ein dreidimensionales Orthogonalsystem wie folgt aus:

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} {\lambda_1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & {\lambda_2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & {\lambda_3}^2 \end{pmatrix}$$

Änderung des Ortsvektors

$$d\vec{r} = \vec{g}_i dx^i = \lambda_i \, \vec{e}_i dx^i = \vec{g}^i dx_i$$

Bogenelement

$$\begin{aligned} ds^2 &= d\vec{r} \cdot d\vec{r} = g_{ik} dx^i dx^k \\ &= \lambda_i^2 \, dx^{i2} \qquad (gilt\ nur\ f\ddot{u}r\ Orthogonalsystem) \end{aligned}$$

Volumenelement

$$\begin{aligned} dV &= \underbrace{|\vec{g}_1 \cdot (\vec{g}_2 \times \vec{g}_3)|}_{\epsilon_{123} ... Levi-Civita-Tensor} \quad dx^1 dx^2 dx^3 \\ \epsilon_{123} &= \sqrt{det\, g_{ik}} = \sqrt{g} \qquad \left[\epsilon_{123} \epsilon^{123} = 1;\ g_{ik} = \vec{g}_i \cdot \vec{g}_k\right] \\ dV &= \sqrt{g}\, dx^1 dx^2 dx^3 \end{aligned}$$

Parallelität zwischen ko- und kontravarianten Basisvektoren gilt, wenn

$$\vec{g}_i = \lambda_i^2 \cdot \vec{g}^i$$

Einheitsvektoren

$$\vec{e}_i = \frac{\vec{g}_i}{\lambda_i} = \lambda_i \vec{g}^i$$

Definition Geschwindigkeit

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}} &= \dot{x}^i \, \vec{g}_i \\ &= \dot{x}^i \lambda_i \, \vec{e}_i\end{aligned}$$

Definition Beschleunigung

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}} &= \dot{x}^i \, \dot{\vec{g}}_i + \ddot{x}^i \, \vec{g}_i \\ &= \left[\frac{d}{dt}(\dot{x}^i \lambda_i)\right] \vec{e}_i + \dot{x}^i \lambda_i \, \dot{\vec{e}}_i\end{aligned}$$

Beispiel **Zylinderkoordinaten**

$$x = \rho \cos\varphi \qquad y = \rho \sin\varphi \qquad z = z$$

$$\begin{aligned}ds^2 &= d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2 \\ &\Longrightarrow \lambda_\rho = 1 \qquad \lambda_\varphi = \rho \qquad \lambda_z = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}} &= \dot{\rho} \, \vec{e}_\rho + \dot{\varphi}\rho \, \vec{e}_\varphi + \dot{z} \, \vec{e}_z \\ \ddot{\vec{r}} &= \left(\ddot{\rho} + \dot{\varphi}^2 \rho\right) \vec{e}_\rho + \left(\ddot{\varphi}\rho + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}\right) \vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{e}_z\end{aligned}$$

Beispiel **Kugelkoordinaten**

$$x = \rho \cos\varphi \sin\vartheta \qquad y = \rho \sin\varphi \sin\vartheta \qquad z = \rho \cos\vartheta$$

$$\begin{aligned}ds^2 &= d\rho^2 + \rho^2 d\vartheta^2 + \rho^2 \sin^2\vartheta \, d\varphi^2 \\ &\Longrightarrow \lambda_\rho = 1 \qquad \lambda_\vartheta = \rho \qquad \lambda_\varphi = \rho \sin\vartheta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}} &= \dot{\rho} \, \vec{e}_\rho + \dot{\vartheta}\rho \, \vec{e}_\vartheta + \dot{\varphi}\rho \sin\vartheta \, \vec{e}_\varphi \\ \ddot{\vec{r}} &= \left(\ddot{\rho} - \dot{\vartheta}^2\rho - \dot{\varphi}^2 \rho \sin^2\vartheta\right) \vec{e}_\rho \\ &+ \left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}\left[\dot{\vartheta}\rho^2\right] - \dot{\varphi}^2 \rho \sin\vartheta \cos\vartheta\right) \vec{e}_\vartheta \\ &+ \left(\frac{1}{\rho \sin\vartheta}\frac{d}{dt}\left[\dot{\varphi}\rho^2 \sin^2\vartheta\right]\right) \vec{e}_\varphi \vartheta\end{aligned}$$

2 Newton'sche Mechanik

1. Newton'sches Axiom (Trägheitsgesetz)

Jeder Körper beharrt im Zustand der Ruhe oder gleichförmig geradlinigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird diesen Zustand zu ändern.

$$\vec{F} = 0 \;\Rightarrow\; \dot{\vec{r}} = const$$

2. Newton'sches Axiom (Grundgesetz der Dynamik)

Die auf einen Massenpunkt (eines Körpers) wirkende Kraft ist gleich dem Produkt aus Masse und Beschleunigung des Massenpunkts.

$$\vec{F} = m \cdot \ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{p}} \quad (\ldots f\ddot{u}r\ m = const)$$

3. Newton'sches Axiom (Wechselwirkungsgesetz)

Die Wirkung ist stets der Gegenwirkung gleich, oder die Wirkungen zweier Körper aufeinander sind stets gleich und von entgegengesetzter Richtung.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

4. Newton'sches Axiom (Superpositionsprinzip)

Die auf einen Massenpunkt einwirkende Kräfte lassen sich vektoriell addieren und somit zu einer einwirkenden Gesamtkraft zusammenfassen.

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$$

Konservative Kräfte
Kraft ist genau dann konservativ, wenn gilt:

$$rot\vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} & - & \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} & - & \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} & - & \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix} = 0$$

3 Bewegte Bezugssysteme

$$
\begin{aligned}
In\,\Sigma: &\qquad Ortsvektor\ \vec{r} = \vec{r}(t) \\
In\,\Sigma': &\qquad Ortsvektor\ \tilde{\vec{r}} = \tilde{\vec{r}}(t)
\end{aligned}
$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'$$

$$\underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\vec{v}} = \underbrace{\frac{\tilde{d}\tilde{\vec{r}}}{dt}}_{\tilde{\vec{v}}} + \underbrace{\underbrace{\frac{d\vec{r}_0}{dt}}_{\vec{v}_0} + \vec{\omega} \times \tilde{\vec{r}}}_{\vec{v}_F}$$

$\vec{v}$ ... *Absolutgeschwindigkeit*
$\tilde{\vec{v}}$ ... *Relativgeschwindigkeit*
$\vec{v}_0$ ... *Translationsgeschwindigkeit*
$\vec{v}_F$ ... *Führungsgeschwindigkeit* (*für* $\tilde{\vec{v}} = 0$)

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\tilde{d}\tilde{\vec{v}}}{dt} + \underbrace{\underbrace{\frac{d\vec{v}_0}{dt}}_{\vec{a}_0} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \tilde{\vec{r}} + \underbrace{\vec{\omega} \times (\omega \vec{\times} \tilde{\vec{r}})}_{\vec{a}_z}}_{\vec{a}_F} + \underbrace{2\vec{\omega} \times \tilde{\vec{v}}}_{\vec{a}_{cor}}$$

$\vec{a}_0$ ... *Translationsbeschleunigung*
$\vec{a}_z$ ... *Zentrifugalbeschleunigung*
$\vec{a}_{cor}$ ... *Coriolisbeschleunigung*
$\vec{a}_F$ ... *Führungsbeschleunigung* (*für* $\tilde{\vec{v}} = 0$; *zeitl. Ableitung der Führungsgeschwindigkeit*)

Grundgleichung der Dynamik

$$\boxed{m\ddot{\tilde{\vec{r}}} = \vec{F} - m\ddot{\vec{r}}_0 - m\dot{\vec{\omega}} \times \tilde{\vec{r}} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \tilde{\vec{r}}) - 2m\vec{\omega} \times \dot{\tilde{\vec{r}}}}$$

4 Erhaltungssätze

4.1 Impulsbilanz

Die zeitliche Änderung des Impulses ist gleich der einwirkenden Gesamtkraft.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

Aus der Impulsbilanz folgt für $\vec{F} = 0$ der **Impulserhaltungssatz**:

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = const}$$

4.2 Energiebilanz

$$\begin{aligned} m\ddot{\vec{r}} &= \vec{F} \qquad | \cdot \dot{\vec{r}} \\ m\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m \left|\dot{\vec{r}}\right|^2\right) = \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} =: P \end{aligned}$$

Die zeitliche Änderung der kinetischen Energie ist gleich der Leistung der einwirkenden Gesamtkraft.

$$\frac{dT}{dt} = P$$

Unter der Einbeziehung eines Potentials U (konservative Kraft) folgt:

$$P = \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} = -\vec{\nabla} U \cdot \dot{\vec{r}} = -\frac{\partial U}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt} = -\frac{dU}{dt}$$

Hieraus folgt der **Energieerhaltungssatz**:

$$\boxed{\frac{d}{dt}(T + U) = 0 \quad \Rightarrow \quad T + U = E = const}$$

Berechnung des Potentials einer konservativen Kraft

$$\vec{F} = -gradU$$

1. Möglichkeit

$$U = -\int \vec{F}\, d\vec{r}$$

2. Möglichkeit

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{\partial U}{\partial x} \qquad \rightarrow \qquad U = -\int F_x dx + f_1(y, z) \\ F_y &= -\frac{\partial U}{\partial y} \qquad \rightarrow \qquad U = -\int F_y dy + f_2(x, z) \\ F_z &= -\frac{\partial U}{\partial z} \qquad \rightarrow \qquad U = -\int F_z dz + f_3(x, y) \end{aligned}$$

Für ein Massenpunktsystem gilt:

- Die gesamte kinetische Energie des MP-Systems ergibt sich aus der Summe der kin. Energie des Gesamtkörpers (Energie des Massenmittelpunktes) und der kin. Energien aller MPs in demselben „Körper“.

$$T = \frac{1}{2} m \dot{r}_c^2 + \sum_{\nu=1}^{N} \frac{1}{2} m_\nu \dot{\tilde{r}}_\nu^{\;2}$$

- Die gesamte potentielle Energie des MP-Systems ergibt sich aus der Summe der auf jeden einzelnen Massenpunkt wirkenden externe pot. Energie (bspw. Erdanziehung) und aller pot. Energien die zwischen den Massenpunkten wirken (bspw. Anziehungskräfte).

$$U = \frac{1}{2} \sum_{\nu,\mu=1}^{N} U_{\nu\mu}(r_{\nu\mu}) + \sum_{\nu=1}^{N} U_\nu(r_\nu)$$

4.3 Drehimpulsbilanz

$$\begin{aligned} \vec{r} \times | \qquad m\ddot{\vec{r}} &= \vec{F} \\ m\ddot{\vec{r}} \times \vec{r} &= \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}\right) = \vec{r} \times \vec{F} \; =: M \end{aligned}$$

Die zeitliche Änderung des Drehimpulses ist gleich dem einwirkenden Gesamtdrehmoment.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

Aus der Drehimpulsbilanz folgt für $\vec{M} = 0$ der **Drehimpulserhaltungssatz**:

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = const}$$

Für Massenpunktsysteme gilt:
Die zeitliche Änderung des Gesamtdrehimpulses eines MP-Systems ist gleich dem Gesamtdrehmoment der äußeren Kräfte, sofern die inneren Zentralkräfte sind.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{ext}$$

4.4 Massenmittelpunktsatz (Schwerpunktsatz)

Dieser Satz findet nur in Massenpunktsystemen Anwendung. In solchen gilt (2. N.A. für N Körper):

$$\vec{F}_\nu = m_\nu \ddot{\vec{r}}_\nu = \vec{F}_\nu^{ext} + \sum_{\mu=1}^{N} \vec{F}_{\nu\mu}$$

Summation über die N Bewegungsgleichungen ergibt:

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \ddot{\vec{r}}_\nu &= \sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu^{ext} + \underbrace{\sum_{\nu=1}^{N}\sum_{\mu=1}^{N} \vec{F}_{\nu\mu}}_{=0\ weil\ \vec{F}_{\nu\mu}=-\vec{F}_{\mu\nu}} \\
&= \sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu^{ext} = \vec{F}^{ext} \\
Mit\ \vec{p} &= \sum_{\nu=1}^{N} \vec{p}_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\vec{r}}_\nu\ folgt: \\
\frac{d\vec{p}}{dt} &= \vec{F}^{ext}
\end{aligned}$$

Die zeitliche Änderung des Gesamtimpulses eines MP-Systems ist gleich der Resultante der auf das System einwirkenden äußeren Kräfte

Aus $\vec{r}_c = \frac{1}{m}\sum m_\nu \vec{r}_\nu$ und $m = \sum m_\nu$ ergibt sich für den Gesamtimpuls

$$\vec{p} = \sum m_\nu \dot{\vec{r}}_\nu = m\dot{\vec{r}}_c$$

und somit für den **Schwerpunktsatz**:

$$\boxed{m\ddot{\vec{r}}_c = \vec{F}^{ext}}$$

Der Massenmittelpunkt eines MP-Systems bewegt sich so, als ob in ihm die gesamte Masse des Systems konzentriert wäre und an ihm die Resultante aller äußeren Kräfte wirkte.

4.5 Virialsatz

Der zeitliche Mittelwert der kinetischen Energie ist gleich dem halben **Virial** des MP-Systems.

$$\boxed{\overline{T} = \frac{1}{2}\overline{\sum m_\nu \dot{r}_\nu^2} = \frac{1}{2}\overline{\sum \vec{r}_\nu \cdot \vec{\nabla}_\nu U}}$$

4.6 Das D'Alembert'sche Prinzip

Arten von Nebenbedingungen:

- **Holonome** NB sind Zwangsbedingungen, die als Gleichungen formulierbar sind. Sie sind weiter unterteilt in:
  - **Skleronome** (starre) Zwangsbedingungen, wenn diese nicht explizit von der Zeit abhängen.
  - **Rheonome** (fließende) Zwangsbedingungen, wenn diese explizit von der Zeit abhängen.

$$f_k(\vec{x}, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad df_k = \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial f_k}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f_k}{\partial t} dt = 0$$

- **Anholonome** NB sind Zwangsbedingungen, die nicht in dieser Form formulierbar sind, z.B. Ungleichungen. Bspw.:
  - Beschränkung des Massenpunktes auf einen Raumbereich
  - Abhängigkeit der Beschränkungen von der Geschwindigkeit
  - D.h. es existiert keine Funktion f_k, sodass gilt

$$df_k = \sum_{i=1}^{3N} f_{ki}(\vec{x},t)dx_i + f_{k0}(\vec{x},t)dt = 0$$

Virtuelle Verrückungen
Unter einer virt. Verrückung $\delta\vec{r}_i$ verstehen wir eine gedachte Ortsveränderung der i-ten Punktmasse, die folgende Bedingungen erfüllt:

1. $\delta\vec{r}_i$ ist infinitisimal klein,
2. $\delta\vec{r}_i$ ist mir den Nebenbedingungen vereinbar,
3. $\delta\vec{r}_i$ ist nur für $\delta t = 0$ definiert, d.h. Verrückung erfolgt zu einem festen Zeitpunkt.

D'Alembert'sches Prinzip

Zwangskräfte leisten bei virtuellen Verrückungen keine Arbeit.

$$\boxed{\sum_{i=1}^{3N} \tilde{F}_i \, \partial x_i \; = \; \sum_{i=1}^{3N} (m_i \ddot{x}_i \; - \; F_i) \, \partial x_i = 0}$$

Gleichgewichtsfall ($\ddot{x}_i = 0$) $\Rightarrow$ **Prinzip der virtuellen Arbeit**

Ein MP-System ist nur dann im Gleichgewicht, wenn die gesamte virtuelle Arbeit der am System angreifenden eingeprägten Kräfte verschwindet bzw. nicht positiv ist.

$$\sum_{i=1}^{3N} F_i \, \partial x_i \leq 0$$

Die Erhaltungsstze bleiben weiterhin gültig, wenn unter den einwirkenden Kräften alle wirkenden Kräfte verstanden werden.

$$\vec{F}_\nu = \vec{F}_\nu^{ext} + \sum_\mu \vec{F}_{\nu\mu}$$

5 Lagrange'sche Mechanik

Lagrange'sche Gleichungen I. Art

Aus dem D'Alembert'schen Prinzip und anholonomen Bedingungen

$$\sum_{i=1}^{3N} f_{ki} dx_i + f_{k0} dt = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, r)$$

folgt mit $\delta t = 0$ und nach einem Durchmultiplizieren mit einem Lagrange'schen Multiplikator λ_k:

$$\sum_{i=1}^{3N} \left(m_i \ddot{x}_i \;-\; F_i \;-\; \sum_{k=1}^{r} \lambda_k f_{ki} \right) \partial x_i = 0 \qquad (3N - r = f)$$

⇒ **Lagrange-Gleichung I.Art**:

$$\boxed{m_i \ddot{x}_i = F_i + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k f_{ki} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 3N)}$$

Für die Zwangskräfte gilt:

$$\tilde{F}_i = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k f_{ki}$$

Speziell für **holonome** Bedingungen gilt:

$$\tilde{F}_i = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i}$$

Lagrange'sche Gleichungen II. Art

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} &= 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, f) \\ Mit\, L &= T - U \end{aligned}$$

Zyklische Koordinaten
... sind generalisierte Koordinaten, von den die Lagrange-Funktion nicht abhängt. Sie geben Anlass zu Erhaltungssätzen:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

$$\Rightarrow \;\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = const$$

6 Hamilton'sche Mechanik

Hamilton'sche Prinzip (Prinzip der kleinsten Wirkung)

Die von einem MP-System (im Konfigurationsraum) tatsächlich durchlaufene Bahnkurve zeichnet sich gegenüber den zugelassenen Vergleichsbahnen dadurch aus, dass für sie die Wirkung einen Extremwert - meist ein Minimum - annimmt. ($\partial S = 0$)

Zugelassene **Vergleichsbahnen** sind in ihrem Verlauf nur in ihren Endpunkten invariant zur eigentlichen Bahn, und diese entsprechen auch den Endpunkten der tatsächlichen Bahn.

Wikipedia:
Das Prinzip besagt, dass für ein physikalisches System mit einer Lagrange-Funktion L das Wirkungsintegral

$$S(q) = \int L\, dt$$

minimal (oder stationär) sein muss. Die Integration erfolgt dabei über einen festen Zeitbereich und für genau eine formell mögliche Realisierung des Systems, q genannt. Von allen möglichen Realisierungen q finden in der Natur nach dem Prinzip der stationären Wirkung genau solche q_{stat} statt, bei denen $S(q_{stat})$ stationär ist.

Hamilton-Funktion

$$\boxed{H = \sum_{i=1}^{f} p_i\,\dot{q}_i - L}$$

Die in Aufgaben gesuchte Hamilton-Funktion hängt in der Regel nur von q_i, p_i und t ab. Somit ist ein Weg zu finden um $\dot{q}_i$ zu ersetzen und die Hamilton-Funktion neu aufzuschreiben.
Hängt die Hamilton-Funktion nicht explizit von der Zeit ab, ist diese gerade die Energie des Systems.

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \;\rightarrow\; \frac{dH}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{H = T + U = const}$$

Kanonische Gleichungen

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

Andere nützliche Gleichungen

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}, \qquad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$